This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

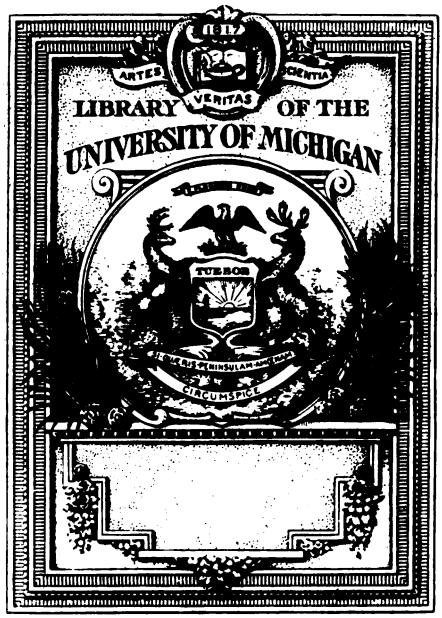
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Emmanuel Lasserre;

8t
R.32

QA
35
.L128l
1784

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Inſtitut de Bologne; Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

NOUVELLE ÉDITION,

Avec de nouveaux Eléments d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne & ſphérique, de Sections coniques, de pluſieurs autres Courbes, des Lieux géométriques, de Calcul Différentiel & de Calcul Intégral.

Par M. l'Abbé MARIE, *de la Maiſon & Société de Sorbonne, Sous-Précepteur des Enfants de Monſeigneur* LE COMTE D'ARTOIS; *ci-devant Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXIV.
Avec Approbation, & Privilege du Roi.

Hist of Science
Marsden
12-21-32
27272

PRÉFACE.

Les Éléments d'Arithmétique, d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie Rectiligne, & de Trigonométrie Sphérique forment la première Partie de cet Ouvrage. La seconde contient un abrégé des Sections Coniques, de plusieurs autres Courbes, & des Lieux Géométriques. Elle est terminée par les Éléments du Calcul Différentiel, & du Calcul Intégral.

Pour faire entrer ces diverses matières dans un seul Volume, il a fallu les presser un peu, & supprimer assez souvent des opérations intermédiaires dans le courant des calculs. Il en est résulté le double avantage, de renfermer entre des limites assez étroites toutes les parties élémentaires des Mathématiques pures, & d'offrir aux Lecteurs une suite de difficultés propres à exercer leurs forces, & à provoquer leur ardeur.

Cette lutte continuelle produit les meilleurs effets pour les jeunes Gens destinés à faire des progrès rapides dans les Mathématiques. Rien ne les flatte, rien ne les anime comme le plaisir de vaincre ces difficultés. Rien aussi ne leur donne

plus de facilité pour les Calculs, & plus d'énergie pour la réſolution des Problêmes.

Voulant leur procurer ces avantages, M. *l'Abbé de la Caille*, dont la mémoire eſt ſi juſtement célèbre, rédigea ſes Leçons de Mathématiques d'après ce plan. Je m'y ſuis conformé dans les différentes Éditions que j'ai données de ſon Ouvrage.

J'ai mis en petit caractère, ce qui m'a paru moins utile ou moins aiſé. On pourra donc ſe borner à ce qui eſt en gros caractère, quand on voudra n'apprendre que les premiers Eléments des Mathématiques. Si on veut pouſſer plus loin cette étude, il faut ne lire d'abord que ce qui eſt en gros caractère, après quoi on reprendra dans une ſeconde lecture tout le fil de ces Leçons.

TABLE
DES CHAPITRES
ET DE QUELQUES MÉTHODES PRINCIPALES.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, Page 2
Des Regles de l'Arithmétique, 4
De l'Addition, 5
De la Souſtraction, 7
De la Multiplication, 9
De la Diviſion, 16

DES FRACTIONS.

De quelques opérations préliminaires, 25
De l'Addition des Fractions, 34
De la Souſtraction des Fractions, 35
De la Multiplication des Fractions, Ibid.
De la Diviſion des Fractions, 37

DES FRACTIONS DÉCIMALES, 40

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion des Fractions décimales, 41
De la Transformation & de l'utilité des décimales, 47
De quelques autres Fractions, 52

ÉLÉMENTS D'ALGEBRE.

Notions préliminaires, 60

De l'Addition Algébrique, 65
De la Souſtraction Algébrique, 66
De la Multiplication Algébrique, 67
De la Diviſion Algébrique, 72
De la formation des Puiſſances, 79
De la maniere d'exprimer & de calculer toutes ſortes de Puiſſances, au moyen de leurs expoſants, 87
De l'extraction des Racines, & en particulier de la Racine quarrée, 93
De l'extraction de la Racine cubique, 104
Deux méthodes pour extraire par approximation les Racines d'un degré quelconque, 106

APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÊMES, 114

Réſolution des Équations du premier degré, 115
Réſolution des Équations du ſecond degré, 130

DES RAPPORTS ET DES PROPORTIONS, 139

Des Proportions & Progreſſions Arithmétiques, 142
Des Proportions & Progreſſions Géométriques, 150

DE LA REGLE DE TROIS ET DE QUELQUES AUTRES REGLES QUI EN DÉPENDENT, 164

Regle de Compagnie, 167
Regle d'Alliage, 169
Regle de fauſſe Poſition, 172
Regle d'intérêt, 179
Quelques Notions ſur les Séries, 181
De la Sommation des Séries, 185
De la Méthode inverſe des Séries, 190

DES LOGARITHMES, 194

Des Propriétés des Logarithmes en général, 198
Du Calcul des Logarithmes par les Séries, 200

De l'usage des Logarithmes dans la résolution de plusieurs Équations, 203

INTRODUCTION A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS, 205

Démonstration de la formule du Binome, 207
Méthode pour trouver les Facteurs commensurables, du premier degré, 214; du second degré, 216
Maniere de transformer les Équations, & d'en faire évanouir le second terme, 219
Du Calcul des Quantités radicales, 221
Méthode pour extraire les Racines des quantités en partie rationelles & en partie incommensurables, 225
Résolution des Équations du troisieme degré, 228
Résolution des Équations du quatrieme degré, 231
Des Équations plus élevées que celles du quatrieme degré, 236
Méthode générale pour en trouver les Facteurs d'un degré quelconque, Ibid.
Méthode pour trouver les Racines par approximation, 238
Méthode pour trouver les Racines égales, 240
Des Problêmes indéterminés du premier degré, 241

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE,

PREMIERE PARTIE.

Des Lignes, 252
Des Angles, 254
Des Lignes perpendiculaires, 256
Des Lignes perpendiculaires considérées dans le Cercle, 258
Des Tangentes, 260
Des Lignes paralleles, 261
De la mesure des Angles, 263

DES FIGURES.

Du Triangle, 265
De la ſimilitude & de l'égalité des Triangles, 267
Des autres Polygones & de leurs principales propriétés, 270
De Polygones ſymmétriques, 272
Des Polygones réguliers, 273
Des Lignes proportionnelles, 277
Des Lignes proportionelles conſidérées dans le Cercle, 282
Solutions de quelques Problêmes ſur les Lignes proportionelles, 285
Conſtruction géométrique des Équations déterminées du premier & du ſecond degré, 287
Des Figures ſemblables, 292

SECONDE PARTIE DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

Des Surfaces, 294
De la comparaiſon des Surfaces, 299
Des Surfaces planes, 304
Des Lignes droites coupées par des plans paralleles, 307

TROISIEME PARTIE DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

Des Solides, 309
De la meſure des Surfaces des Solides, 313
De la meſure des Solides, 316

APPLICATION DES PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGEBRE AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE, 324

Du Calcul des Sinus, Ibid.
Du Calcul des Tables de Sinus par les Séries, 334
Méthode d'approximation pour trouver la Quadrature du Cercle, 339
Réſolution des Équations du troiſieme degré dans le cas irréductible, par les Sinus, 341
Réſolution des Triangles, par les Sinus, Coſinus, &c. 343

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES, 349
Principes & Proportions pour la Réſolution des Triangles ſphériques, 355
Applications des Principes & des Proportions qui précédent, 358
Réſolution des Triangles ſphériques-obliquangles, 363
Quelques Applications de la Trigonométrie ſphérique, 369

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES.

Notions préliminaires ſur l'uſage de l'Algebre, dans la deſcription des Courbes, 374
Origine des Sections Coniques, & leur Équation générale, 380
De la Parabole, 382
De l'Ellipſe, 384
De l'Hyperbole, 390
De la Quadrature des Sections Coniques, 397
De quelques autres Courbes, 403
Des Lieux géométriques, 411
Réſolution des Problêmes indéterminés du ſecond degré, 416
Réſolution des Problêmes déterminés qui ne paſſent pas le quatrieme degré, 421

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL, 428

Regles du Calcul différentiel, 432
Des Différentielles ſecondes, troiſiemes, &c. 434
Des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles, 435
Des Différentielles des quantités affectées de Sinus, de Coſinus, &c. 437
Applications du Calcul différentiel à la théorie des Courbes, 439
Des Développées, 444

Des Points d'inflexion, & de la Méthode de Maximis & Minimis, 449
Des Fractions dont le Numérateur & le Dénominateur se réduisent à zéro dans certains cas, 455
Quelques autres Applications du Calcul différentiel, 458

ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL, 471

Méthode pour ramener l'intégration de plusieurs Différentielles binomes à celles d'autres Différentielles connues, 474
De l'intégration des Fractions différentielles, rationelles, 479
Méthode pour intégrer par Séries, 485
De l'intégration des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles, 489
De l'intégration des Quantités Différentielles où il entre des Sinus, des Cosinus, &c. 493
De l'Intégration des Différentielles à plusieurs Variables, 498
Applications du Calcul Intégral, 503
De la Quadrature des Courbes, Ibid.
De la Rectification des Courbes, 507
De la Mesure des Solidités, 510
Des Surfaces courbes des Solides de révolution, 512
De la Méthode inverse des Tangentes, & des Équations différentielles, 513
Résultats des Solutions de quelques Problêmes énoncés dans le cours de l'Ouvrage, 521

TABLE

Des Numéros ajoutés ou changés.

NUMÉROS AJOUTÉS.

Depuis le Numéro 5 juſqu'au Numéro 15.

16
29
32
39. 40.
43.....51
59
64
68.....71
74
77.....80
81.....97
100.....106
113.....116
126.....129
132.....137
141.....149
167.....175
180.....185
186.....217
229
251.....274
275.....280
283.....288
296.....358

NUMÉROS CHANGÉS.

Depuis le Numéro 1 juſqu'au Numéro 5.

15
17.....23
36.....39
63
67
71.....74
80
97
106.....126
131
137
149.....164
217.....229
230.....251
282

Depuis le commencement de la Géométrie, Numéro 358, juſqu'à la fin de l'Ouvrage, Numéro 929, tout a été ajouté, ou entiérement changé, à l'exception des Numéros 509, 575, 657, 658 : de maniere que ce qui reſte de l'Ouvrage de M. l'Abbé DE LA CAILLE ne fait pas la dixieme partie de celui-ci.

EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 12 Août 1778.

MEſſieurs DE LA LANDE & BAILLY qui avoient été nommés par l'Académie pour examiner la ſeconde Édition des *Leçons de Mathématiques de feu M. l'Abbé DE LA CAILLE, augmentées conſidérablement par M. l'Abbé MARIE*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne d'être approuvé & imprimé ſous ſon Privilege; en foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 12 Août 1778.

LE MARQUIS DE CONDORCET.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſants, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſeront dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le temps de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-

deſſus ſpécifiés, il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſants, ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenants; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſants, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le ſieur HUE DE MIROMESNIL; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le ſieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit ſieur HUE DE MIROMESNIL; le tout à peine de nullité deſdites Préſentes, du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſants & leurs ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour duement ſignifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original: commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le premier jour de Juillet, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-dix-huit, & de notre regne le cinquieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé LEBEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 1477, folio 582, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenſes, article 4, à

toutes perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit exemplaires, preſcrits par l'art. CVII, du même Réglement. A Paris le 20 Août 1778.

Signé A. M. LOTTIN l'aîné, Syndic.

LEÇONS

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MATHÉMATIQUES.

1. On comprend ſous le nom de *Mathématiques*, les Sciences qui ont pour objet les Nombres, l'Étendue, le Mouvement, la Lumiere, & en général tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation ou de diminution.

2. Mais chacune de ces Sciences a une dénomination particuliere, ſuivant la nature de l'objet qu'elle contemple. La Science des Nombres, par exemple, s'appelle *Arithmétique*. Celle qui a pour objet la connoiſſance des dimenſions de l'Étendue, s'appelle *Géométrie*. La Science du Mouvement, s'appelle *Méchanique* : celle qui traite de la Lumiere, s'appelle *Optique*, & ainſi des autres.

3. L'Arithmétique ſert de fondement aux autres parties des Mathématiques. Elle eſt d'ailleurs d'un uſage ſi univerſel dans la ſociété, qu'il faut au moins ſavoir en pratiquer les premieres regles.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE.

4. Tous les hommes ont une idée distincte de l'*Unité*. La vue d'un objet quelconque, suffit pour faire naître cette idée.

Celle de la *Pluralité* n'est pas moins facile à acquérir. Il suffit de voir deux ou plusieurs objets qui se ressemblent.

5. Mais toute pluralité étant le résultat des unités particulieres qui concourent à la former, on dût bientôt sentir la nécessité d'imaginer un moyen de distinguer telle ou telle pluralité de toute autre.

6. Trois hommes, par exemple, quatre hommes, cent hommes rassemblés ne pouvoient pas être désignés de la même maniere. Il sembloit donc indispensable d'avoir recours à autant de signes différents, qu'il pouvoit y avoir de *Nombres*.

7. Cependant la moindre réflexion dût faire prévoir l'inconvénient qu'auroit entraîné cette multitude innombrable de signes. On renonça donc à ce moyen, & par un procédé aussi simple qu'ingénieux, on vint à bout d'exprimer toutes sortes de Nombres, par la simple combinaison des dix *Chiffres* si connus.....

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Zéro, Un, Deux, Trois, Quatre, Cinq, Six, Sept, Huit, Neuf.

8. Le premier ne signifie rien quand il est seul; mais par une convention généralement adoptée, zéro placé à la droite d'un autre chiffre, lui donne une valeur dix fois plus grande. Ainsi pour exprimer dix ou une unité de *Dixaine*, on écrit 10; pour exprimer vingt ou deux dixaines, on écrit 20; & successivement trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix, s'écrivent par 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

9. Les autres chiffres ont la même propriété que le zéro; c'eſt-à-dire, que *tout chiffre placé à la droite d'un autre, le rend dix fois plus grand.*

Une *unité ſimple* peut donc devenir une unité de dixaine, une unité de *centaine*, une unité de *mille*, &c. en mettant un, deux, trois zéros ou tels autres chiffres qu'on voudra, à la droite du chiffre 1.

Un 5, un 4 & un 6 placés de cette manière, 546 ſont donc une expreſſion abrégée du nombre *cinq cent quarante-ſix.*

10. Trois chiffres ainſi diſpoſés à la ſuite l'un de l'autre, forment ce qu'on appelle la *Tranche* des unités. Trois autres chiffres mis ſur la même ligne que ceux-ci vers la gauche, comme on le voit dans cet exemple, 921546, forment la tranche des Milles. On prononce ainſi : *Neuf cent vingt-un mille cinq cent quarante-ſix.* La tranche des *Millions* vient enſuite, puis celle des *Billions*, celle des *Trillions*, & ainſi des autres.

11. Elles ſont compoſées de trois chiffres, dont le premier à droite marque toujours des unités du même ordre que la tranche. Ainſi dans la premiere tranche ce ſont des unités ſimples; dans la ſeconde ce ſont des unités de mille; dans la troiſieme, des unités de million; &c.

Le ſecond chiffre de chaque tranche marque des dixaines en général : ces dixaines prennent le nom de la tranche où elles ſe trouvent. Il en eſt de même pour les centaines, que le troiſieme chiffre de chaque tranche déſigne toujours.

12. Avec cette Remarque, & un peu d'exercice, il n'y a pas de nombre déja écrit en chiffres, que l'on n'apprenne bien vîte à prononcer : il n'y en a pas non plus de prononcé ou d'écrit *en toutes lettres*, que l'on ne ſache bientôt mettre en chiffres. On peut s'exercer ſur les Exemples ſuivants, dont on trouvera les réſultats à la fin du Livre, afin que chacun puiſſe les comparer avec les ſiens.

Soit donc propoſé 1°. d'aſſigner la valeur des nombres

A B C D E

75....893.....1111.....67509.....10200701

Soit propoſé 2°. d'exprimer en chiffres les nombres

F G H

trois cent-deux...huit mille-un...quinze mille-ſeize...

I K

cinquante millions mille.....vingt-deux billions quatre millions ſoixante dix-neuf.

Paſſons maintenant aux Regles de l'Arithmétique. On en compte quatre principales, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, & la Diviſion.

Des Regles de l'Arithmétique.

13. PUISQUE les Nombres ſont ſuſceptibles d'augmentation ou de diminution, il eſt clair qu'on peut les aſſujettir à deux ſortes d'opérations; l'une par laquelle on les augmente, ce qui s'appelle faire une *Addition*; l'autre par laquelle on les diminue, ce qu'on appelle *Souſtraction*. Toutes les autres opérations de l'Arithmétique dépendent plus ou moins de ces deux opérations fondamentales, comme on le verra par la ſuite.

14. On diſtingue deux ſortes de Nombres, *les entiers* & *les fractionaires*. Les premiers ſont ceux qui contiennent *l'unité* ſans reſte, tels que deux, ſept, mille, &c; les autres ne contiennent que des parties de l'unité, par exemple, un tiers, un vingtieme, &c. Or il eſt clair que ces deux eſpeces de nombres étant également ſuſceptibles d'accroiſſement ou de diminution, on peut les ſoumettre aux mêmes regles. Voyons d'abord celles que l'on doit ſuivre pour les Nombres entiers.

Si ces nombres ne passent pas dix, auquel cas on les appelle *nombres simples*, on n'a pas besoin de regles pour les calculer, parce qu'on opere alors très-facilement. Mais lorsqu'il s'agit de nombres *composés*, il faut avoir recours à certaines opérations qui n'ont été inventées que pour suppléer au peu d'étendue de notre esprit : or les plus élémentaires de ces opérations sont d'une extrême facilité, comme on va le voir.

De l'Addition.

15. L'ADDITION sert à trouver la *somme* de plusieurs nombres donnés. Par exemple, 5, 7 & 4 ajoutés ensemble, font 16; & pour abréger le discours, on écrit $5+7+4=16$. (Le signe $+$ est le signe consacré pour l'Addition : on prononce *plus ;* le signe $=$ signifie qu'il y a égalité : on prononce *égale.*)

Lorsque les nombres à ajouter sont composés de plusieurs chiffres, par exemple, lorsqu'on cherche la somme de 432 & 363, voici la Regle qu'il faut suivre.

1°. *Ecrivez ces nombres l'un au-dessous de l'autre, en sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.*

2°. *Tirez un trait au-dessous ; & allant de droite à gauche, prenez la somme des unités ; si elle ne passe pas 9, écrivez-la sous la colonne des unités ; si elle surpasse 9, n'écrivez que les unités, & réservez les dixaines pour les ajouter à la colonne suivante.*

3°. *Prenez de même la somme des dixaines, des centaines, &c. & écrivez-la successivement au-dessous de la colonne correspondante.* Ainsi dans la premiere colonne je dis; $2+3=5$, j'écris 5 au-dessous.

Dans la seconde, $3+6=9$.

Dans la troisieme, $4+3=7$, j'écris 7, & j'ai la somme cherchée, 795.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 363 \\ \hline 795 \end{array}$$

Si l'on propose d'ajouter ces trois nombres, 6078, 9198, 483, je les écris l'un sous l'autre suivant la Regle, & je dis....8+8=16,+3=19; c'est-à-dire, la somme de la premiere colonne, est 19 ou 1 dixaine & 9 unités; je n'écris que 9 au-dessous de la colonne des unités, & je tiendrai compte de la dixaine dans la somme de la colonne suivante.

6078
9198
483
15759

Je dis donc, 1+7=8,+9=17,+8=25; par la même raison je n'écris que 5 sous la seconde colonne, & je retiens les deux dixaines pour la colonne suivante.

Après quoi je dis...2+0=2,+1=3,+4=7; je pose 7.

Enfin 6+9=15; & parce que c'est la derniere colonne, j'écris 15 tout de suite. Ainsi la somme cherchée est 15759.

Voici quelques Additions à faire.

L	M	N
5783	77756	10376786
4328	3388	789632
5987	9763	589
8521	90257	73

16. On voit bien qu'en ajoutant successivement toutes les parties des Nombres donnés, on doit trouver la somme totale. Ainsi cette Regle est infaillible.

Tout infaillible qu'elle est cependant, il n'est pas rare de se tromper en la pratiquant. Il est donc à propos de la vérifier en recommençant l'opération; ce que l'on peut faire, en prenant la somme des colonnes de bas en haut.

Comme les erreurs qui échappent dans le cours des opérations numériques, proviennent souvent de la confusion des colonnes ou des chiffres mal faits, on ne sauroit prendre

trop-tôt l'habitude de bien ſéparer les colonnes, & de donner aux chiffres une forme bien diſtincte. Cette double précaution fait éviter beaucoup de fautes.

Il faut prendre garde auſſi à une autre cauſe d'erreur; *on* oublie quelquefois d'ajouter à la colonne ſuivante ce que l'on a retenu ſur celle qui précede.

De la Souſtraction.

17. LA Souſtraction ſert à trouver la *différence* de deux quantités données. Or cette différence eſt toujours égale à ce qui reſte de l'une de ces quantités, quand on en a retranché l'autre.

On la trouve ſans calcul dans les nombres ſimples. Il eſt clair, par exemple, que ſi on ôte 2 de 5, il reſte 3, & qu'ainſi 3 eſt la différence qu'il y a entre 2 & 5. Cette opération s'exprime ainſi en abrégé, $5-2=3$; (ce ſigne — ſignifie *moins*); de même $9-4=5$, & $8-7=1$.

18. Regle pour la ſouſtraction des nombres compoſés. *Pour ſouſtraire un nombre d'un autre, mettez le plus petit au-deſſous du plus grand, comme dans l'Addition, & tirez un trait au-deſſous; puis écrivez ſucceſſivement ſous chaque colonne les excès des unités, dixaines, centaines, &c. du nombre ſupérieur, ſur les unités, dixaines, centaines, &c. du nombre inférieur, & vous aurez l'excès total ou la différence entre ces deux nombres.*

Ainſi pour ſouſtraire le nombre 243 du nombre 695, je les écris d'abord comme vous le voyez..... je dis enſuite, $5-3=2$ que je poſe ſous la colonne des unités: $9-4=5$, que j'écris ſous la colonne des dixaines: $6-2=4$ que je poſe au rang des centaines. La différence cherchée eſt donc 452.

695
243
452

Il eſt clair en effet qu'en prenant ſucceſſivement toutes les différences partielles, on doit avoir pour réſultat la dif-

férence totale : & c'eſt-là tout le fondement de cette regle.

19. *Lorſque le chiffre inférieur eſt plus grand que le chiffre qui lui correſpond dans le nombre ſupérieur, il faut ajouter à ce chiffre correſpondant une dixaine priſe ſur le chiffre qui le ſuit à gauche ; puis écrire l'excès du chiffre ſupérieur, ainſi augmenté, ſur l'inférieur ; & ſe ſouvenir que par-là on a diminué d'une unité le chiffre ſupérieur ſuivant.*

Pour ôter 38 de 64, par exemple, je dis... 4—8, cela ne ſe peut. Je détache une unité du 6, que je tranſporte ſur la colonne des unités ſimples, où elle vaut dix, & ajoutant ces dix unités aux quatre autres, je dis.... 14—8=6, que je poſe au rang des unités : puis 5—3 =2. La différence eſt donc 26.

Par une opération ſemblable, on trouveroit que NEWTON, a vécu 84 ans. Né en 1643, il eſt mort en 1727.

20. Si le chiffre qui ſuit à gauche étoit un *zéro*, ou s'il étoit ſuivi lui-même d'autres *zéros*, on iroit de proche en proche, juſqu'à ce qu'on eût trouvé un chiffre dont on pût détacher une unité. Par la décompoſition de cette unité, *tous les zéros précédents deviendroient des* 9, & il reſteroit une dixaine pour l'ajouter au chiffre plus petit que le chiffre inférieur.

Si l'on vouloit, par ex. ſouſtraire 18 de 200, on diroit.... 0—8, cela ne ſe peut. Alors il faudroit détacher une unité du 2, que l'on décompoſeroit en dix dixaines ; & de ces dix dixaines, on en laiſſeroit 9 à la place du ſecond zéro. La dixieme, tranſportée ſur le premier, rendroit poſſible la ſouſtraction de 8, & on diroit 10—8=2....9—1=8....1—0 =1 ; reſteroit donc 182.

200
18
182

Un homme qui devoit 3000*, en a payé 1296, que

lui reſte-t-il à payer ?..... 3000
0—6, cela ne ſe peut. Je détache une 1296
unité du 3. Cette unité vaut 1000=990
+10. Je dis donc, 10—6=4.... 1704
9—9=0.... 9—2=7.... 2—1=1.
Lui reſte donc 1704[#] à payer.

11. Lorſque le chiffre ſupérieur n'eſt pas aſſez grand, on peut, ſans avoir recours à ceux qui le ſuivent, lui ajouter une dixaine : mais alors, pour compenſer ce que l'on a ajouté au nombre ſupérieur, il faut ſuppoſer que le chiffre ſuivant du nombre inférieur eſt augmenté d'une unité. On voit bien que cela revient au même.

Voici quelques autres exemples.

	6000		1798		6532		5002		150001
	4000		1653		5421		4573		76385
O		P		Q		R		S	

22. *Quand une Souſtraction eſt bien faite, il faut néceſſairement que le reſte ajouté au nombre ſouſtrait, ſoit égal au nombre dont on avoit à le ſouſtraire.* Car un Tout quelconque doit être égal à ſes parties priſes enſemble : & c'eſt de là que l'on a déduit un moyen prompt & facile de vérifier les ſouſtractions. Ajoutez donc le reſte au plus petit nombre, & voyez ſi leur ſomme eſt égale au plus grand des deux nombres.

De la Multiplication.

23. On ſe ſert de la Multiplication pour trouver ſans beaucoup de calcul, la ſomme d'un nombre que l'on veut ajouter pluſieurs fois à lui-même. Pour trouver, par exemple, la ſomme de 12 ajouté neuf fois, il faudroit écrire neuf fois 12, & en chercher la ſomme, ce qui ſeroit aſſez long ; par la Multiplication on trouve tout de ſuite que 9 fois 12 font 108.

Dans cet Exemple, on appelle 12 *le Multiplicande*,

9 *le Multiplicateur*, & 108 *le Produit*. En général le multiplicande & le multiplicateur s'appellent les *racines* ou les *facteurs* du produit.

24. *Le produit eſt donc la ſomme du multiplicande pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur* : ou ce qui eſt la même choſe, le produit contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient l'unité.

25. Si au lieu d'écrire neuf fois 12 en colonne, pour en prendre la ſomme, on écrivoit douze fois 9, il eſt clair qu'on trouveroit la même ſomme 108; d'où il ſuit que *lorſqu'on a deux nombres à multiplier, on peut indifféremment prendre celui qu'on voudra pour multiplicande; l'autre ſera le multiplicateur; le produit ſera le même.*

26. On n'a pas beſoin de regles pour la Multiplication des nombres ſimples; on voit facilement que le produit de 2 multiplié par 3, eſt 6; ce qui s'exprime ainſi; 2×3, ou $2 . 3 = 6$. (le ſigne ×, ou le point mis entre deux nombres, ſignifie *multiplié par*); de même $3 \times 4 = 12$, $7 . 5 = 35$, &c. Il faut ſe rendre très-familiers les produits des nombres ſimples, ſi l'on veut pratiquer sûrement & promptement la Multiplication.

Voici les moins aiſés de ces produits.....

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

27. Lorſqu'on a deux nombres compoſés, comme 32 & 24, à multiplier l'un par l'autre, *il faut* 1°. *poſer celui que l'on aura choiſi pour multiplicateur* (c'eſt ordinairement le plus petit) *au-deſſous du multiplicande*, comme dans l'Addition; ainſi je poſe 24 ſous 32.

2°. Il faut *écrire au-deſſous, en allant de droite à gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur.* Ainſi *j'écris d'abord le produit de chaque chiffre du multiplicande, par les unités du multiplicateur*, en diſant.... $2 \times 4 = 8$, je poſe 8... $3 \times 4 = 12$, je poſe 12.

32
24
128
64
768

Après cela, *j'écris auſſi de droite à gauche, en commençant par la colonne des dixaines, le produit des chiffres du multiplicande par les dixaines du multiplicateur*, & je dis, $2 \times 2 = 4$, je poſe 4 au rang des dixaines.... $3 \times 2 = 6$, je poſe 6..... 3°. *Il faut prendre la ſomme de ces* deux *produits*; ce qui donnera 768 pour produit total.

28. Pour concevoir cette opération, on peut, en la faiſant, raiſonner ainſi. Le produit de 32 par 24 eſt évidemment égal aux dixaines & aux unités de 32, priſes autant de fois qu'il y a d'unités dans 24, c'eſt-à-dire, priſes 4 fois, & 2 dixaines de fois. Il faut donc dire d'abord, les unités du multiplicande priſes 4 fois produiſent 8 unités que j'écris. Enſuite les 3 dixaines du multiplicande priſes 4 fois, produiſent 12 dixaines; j'écris 12 ſur la gauche de 8. Ainſi les 3 dixaines & les 2 unités de 32 priſes 4 fois, produiſent 128 unités.

Paſſant maintenant aux 2 dixaines du multiplicateur, je dis; les 2 unités du multiplicande priſes 2 dixaines de fois, produiſent 4 dixaines. J'écris 4 dans la ſeconde colonne à gauche, ou, ce qui revient au même, j'écris 4 dans la colonne du *multiplicateur* actuel, parce que 4 exprime des dixaines, & qu'ainſi il doit être dans la colonne des dixaines. Enfin je dis, les trois dixaines du multiplicande priſes 2 dixaines de fois, produiſent 6 dixaines de

dixaines, c'eſt-à-dire, 6 centaines; j'écris 6 après 4, afin qu'il ſe trouve dans le rang des centaines. Donc les 3 dixaines & les 2 unités de multiplicande priſes 2 dixaines de fois, produiſent 64 dixaines, ou 6 centaines & 4 dixaines. J'ajoute ce produit à celui que j'ai trouvé plus haut, afin d'avoir le produit de toutes les parties du multiplicande par toutes celles du multiplicateur. Ce produit total eſt donc 768.

Soit propoſé de multiplier 564 par 249.... Je commence par écrire ces deux nombres l'un ſous l'autre; puis je multiplie tout le multiplicande 564 par les 9 unités du multiplicateur, en diſant $4\times9=36$, je poſe 6, & retiens 3 ... $6\times9=54$, mais à cauſe de 3 que je viens de retenir, je dis $54+3=57$, je poſe 7, & retiens 5 ... $5\times9=45$: or $45+5$ que j'ai retenu $=50$, je poſe 50 de ſuite, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier par ce premier chiffre 9.

	564
	249
	5076
	2256
	1128
	140436

Je paſſe enſuite aux 4 dixaines du multiplicateur, par leſquelles je multiplie 564, en diſant.... $4\times4=16$; je poſe 6 au rang des dixaines, & retiens 1 ... $6\times4=24$, $+1=25$, je poſe 5, & retiens 2 ... $5\times4=20$, $+2=22$, j'écris 22.

Enfin, je multiplie 564 par les 2 centaines du multiplicateur; diſant à l'ordinaire, $4\times2=8$, je poſe 8 au rang des centaines.... $6\times2=12$, je poſe 2, & retiens 1 .... $5\times2=10$, $+1=11$, je poſe 11.

Je prends la ſomme de ces différents produits, & j'ai 140436 pour produit total.

29. Lorſqu'il y a un ou pluſieurs zéros à la fin de l'un ou des deux nombres donnés, on abrege l'opération, en ne multipliant que les autres chiffres, & mettant à la ſuite de leur produit autant de zéros qu'il y en a, ſoit à la fin du multiplicande, ſoit à la fin du multiplicateur.

Par exemple, pour multiplier 120 par 120, on mettra deux zéros à la ſuite de 144, produit de 12 par 12, & on

aura 14400 pour produit. Car il eſt bien évident que des dixaines multipliées par des dixaines, produiſent des centaines. Or ce ſont 12 dixaines que l'on a ici à multiplier par 12 dixaines. Leur produit doit donc être 144 centaines=14400. On trouveroit de même que 406000 × 10700 = 4 344 200 000.

Voici quelques Exemples de Multiplications toutes faites.

5874		886633
685		777
29370		6206431
46992		6206431
35244		6206431
4023690		688913841
466		53687
1002	1 000 000	908
932	1 000	429496
46600	1 000 000 000	4831830
466932		48747796

En voici quelques autres à faire.

3020804	55554444
570504	88979765
T	U

987654321
123456789
X

Pour connoître ſi l'on ne s'eſt pas trompé dans la multiplication, on peut, en attendant que l'on ſache la diviſion,

changer l'ordre des nombres donnés, c'eſt-à-dire, du multiplicateur faire le multiplicande, & réciproquement ; car on doit trouver le même produit.

30. On peut auſſi ſe ſervir de ce qu'on appelle la preuve par 9. C'eſt une opération ingénieuſe & prompte, qu'il eſt bon de ſavoir. Voici en quoi elle conſiſte.

1°. Ajoutez les chiffres du multiplicande, comme s'ils exprimoient tous des unités ſimples, & de leur ſomme retranchez 9 auſſi ſouvent que faire ſe pourra. Ou il ne vous reſtera rien après cette ſouſtraction, ou il vous reſtera un nombre moindre que 9. Dans le premier cas écrivez zéro. Dans le ſecond, écrivez le chiffre qui vous reſte.

2°. Faites de même pour les chiffres du multiplicateur, & vous aurez un ſecond reſte que vous pourrez écrire au-deſſous du premier.

3°. Multipliez ces deux reſtes, & de leur produit retranchez 9 auſſi ſouvent que vous le pourrez. Vous aurez un troiſieme reſte, que vous mettrez à côté des deux premiers.

4°. Ajoutez les chiffres du produit, comme ceux des deux facteurs, retranchez de leur ſomme tous les 9 qu'elle contient, & mettez le quatrieme reſte au-deſſous du précédent.

Si la multiplication que vous voulez vérifier eſt bonne, ce dernier reſte doit être le même que l'avant-dernier.

Je voudrois ſavoir, par exemple, ſi 97350 eſt le véritable produit de 354 par 275.

J'ajoute les chiffres du multiplicande, en diſant $3+5+4=12$; j'en ôte 9; reſte 3 que je mets en réſerve.

J'écris au-deſſous le reſte 5 provenant des chiffres du multiplicateur.

3	1	6
5	1	6

Je multiplie le premier reſte 3 par le ſecond reſte 5, & du produit 15 j'ôte 9. Reſte 6 que j'écris à côté de 3.

Enfin j'ajoute de même les chiffres du produit 97350, & je trouve qu'après en avoir retranché deux fois 9, il reſte 6, comme dans la derniere ſouſtraction. D'où je conclus que l'opération eſt bonne. Et voici ſur quoi eſt fondée cette concluſion.

31. Si j'ôte de 10, de 100, de 1000, &c. tous les 9 qui y ſont contenus, il eſt évident, qu'il reſtera toujours 1. En faiſant la même opération ſur 20, ſur 200, ſur 2000, &c. on trouvera conſtamment 2 pour reſte. En général, *tout nombre exprimé par un chiffre ſuivi d'un ou de pluſieurs zéros, donnera toujours ce chiffre pour reſte, après la ſuppreſſion des 9 que ce nombre contient.*

Or il n'eſt aucun nombre que l'on ne puiſſe décompoſer aux ſeules unités près, en nombres entiers & *décimaux*. Le multiplicande 354, par exemple, peut ſe décompoſer en $300 + 50 + 4$. On trouvera donc le même reſte, après avoir ôté les 9 de la ſomme de $3 + 5 + 4$, ajoutés comme unités ſimples, que ſi on les avoit ôtés ſucceſſivement de $300 + 50 + 4$. Il en eſt de même pour le multiplicateur 275; & c'eſt-là le fondement des deux premieres parties de la regle.

Cela poſé, je remarque qu'en multipliant un nombre dans lequel 9 eſt contenu un certain nombre de fois ſans reſte, par un autre nombre qui contienne auſſi 9 ſans reſte, le produit doit pareillement le contenir ſans reſte.

Si donc 354 le contient avec un reſte 3, & ſi 275 le contient avec un reſte 5, leur produit doit évidemment le contenir avec un reſte 15. Supprimant donc le 9 contenu dans ce reſte 15, il doit reſter 6; & c'eſt effectivement ce qui eſt reſté après avoir ôté tous les 9 de 97350.

Voilà le fondement de la quatrieme partie de la Regle. Voici celui de la troiſieme.

Pour ſavoir ce qui reſte du produit de deux nombres quelconques, après la ſuppreſſion de tous les 9, il n'y a qu'à multiplier le reſte du multiplicande par celui du multiplicateur, & ſouſtraire de ce produit les 9 qu'il contient. Le reſte ſera toujours celui que l'on cherche.

On peut le démontrer généralement de cette maniere. Soit le multiplicande $= 9B + m$: & le multiplicateur $= 9C + n$, (B & C expriment le nombre de fois que les deux facteurs contiennent 9; m & n repréſentent les deux reſtes.) Le produit ſera $81BC + 9Cm + 9Bn + mn$. Or les trois premiers termes de ce produit ſont évi-

demment diviſibles ſans reſte par 9. Si le quatrieme l'eſt auſſi, toi le produit l'eſt de même. S'il provient un reſte de la diviſion de m par 9, ce reſte ſera celui que l'on cherche. Donc pour ſavoir, &c.

Appliquons cette méthode à un autre exemple.

Je ſuppoſe que l'on ait trouvé 265325592 pour produit de 6546×4053, & qu'on veuille le vérifier. Le premier reſte eſt 7; le ſecond eſt 3; leur produit eſt 21; ſon reſte eſt 3; celui du produit total eſt 3 auſſi. L'opération eſt donc bonne.

7 | 3
3 | 3

32. Obſervez 1°, que pour abréger, on peut ſouſtraire les 9 à meſure qu'on en trouve dans le cours de l'addition des chiffres.

2°. Que 3 pourroit ſervir ainſi que 9.

3°. Qu'il y a deux erreurs à éviter. L'une qui conſiſte dans la tranſpoſition des chiffres du produit total, comme ſi au lieu d'écrire 97350, on écrivoit 79350, ou 57903, ou &c. L'autre, qui eſt de mettre dans ce produit des zéros au lieu des 9, ou d'oublier les 9, & de ne rien mettre à leur place. Car alors le réſultat de la vérification ſeroit le même; & cependant les produits ſeroient bien différents. Mais des erreurs difficiles à commettre, ne doivent pas empêcher de ſe ſervir d'une regle auſſi expéditive. Au reſte la diviſion tend directement à vérifier la multiplication.

De la Diviſion.

33. LA Diviſion ſert à trouver combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre; & comme il ne peut y être contenu qu'autant de fois qu'il peut en être ſouſtrait, la diviſion eſt un moyen abrégé de faire ces ſouſtractions.

Ainſi, pour ſavoir combien 12 contient de fois 4, la maniere la plus naturelle eſt d'ôter 4 de 12; reſte 8: enſuite 4 de 8; reſte 4: enfin 4 de 4; reſte zéro: d'où l'on voit que la quantité 12 eſt épuiſée, après que 4 en a été retranché 3 fois, & qu'ainſi 12 contient 4 préciſément

ment 3 fois. Mais cette méthode seroit trop longue, si les nombres étoient fort grands. On a donc imaginé un moyen de trouver en peu de temps combien de fois une quantité appelée *le Dividende*, contient une autre quantité appelée *le Diviseur*. On appelle *Quotient* le nombre qui exprime combien de fois le dividende contient le diviseur.

Dans cet exemple 12 est le dividende, 4 le diviseur, & 3 le quotient.

34. Il suit clairement de ces notions, I°. Que *le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient l'unité.*

35. II°. Que le diviseur pris autant de fois que le quotient contient l'unité, doit être égal au dividende, (car alors c'est remettre le diviseur autant de fois qu'on l'a ôté; ce qui doit rétablir le dividende), ou, ce qui est la même chose, *le produit du diviseur par le quotient est égal au dividende.*

Donc, *pour savoir si un quotient est exact, il faut le multiplier par le diviseur, & en comparer le produit avec le dividende.*

Or on peut regarder le dividende comme le produit d'une multiplication, dont le diviseur & le quotient sont les facteurs. Ainsi diviser le dividende par le diviseur pour avoir un quotient, c'est la même chose que de diviser un produit par un de ses facteurs, pour trouver l'autre facteur.

Donc, *quand on connoît un produit & un facteur de ce produit, il faut, pour trouver l'autre facteur, diviser le produit par le facteur connu.*

36. Cela posé, parcourons les différents cas de la division. Il y en a trois; le premier a lieu, lorsque le dividende & le diviseur sont l'un & l'autre des nombres simples, comme si on proposoit de diviser 8 par 4.

Le second, lorsque le dividende est un nombre composé, & que le diviseur est un nombre simple; 7953, par exemple, à diviser par 3.

Le troisieme cas est le plus ordinaire, c'est quand le

dividende & le diviſeur ſont tous deux des nombres compoſés; par exemple, 147475 à diviſer par 362.

Premier Cas de la Diviſion.

37. *Lorſque le dividende & le diviſeur ſont des nombres ſimples*, on n'a pas beſoin de regles pour trouver le quotient. Par exemple, on voit tout de ſuite que le quotient de 8 diviſé par 4 eſt 2.

Pour abréger, on écrit le diviſeur immédiatement au-deſſous du dividende, & on les ſépare par un trait, qui ſignifie *diviſé par :* ainſi $\frac{8}{4} = 2$ ſignifie que 8 diviſé par 4 égale 2. De même $\frac{9}{3} = 3$.

Quand on ne trouve pas un quotient exact ; (comme ſi on vouloit diviſer 9 par 4, où l'on voit que 9 contient 4 plus de 2 fois, mais moins que 3 fois, & qu'ainſi le quotient véritable eſt entre 2 & 3) : *alors on écrit pour quotient le plus petit des deux nombres entre leſquels le vrai quotient doit ſe trouver : on multiplie ce nombre par le diviſeur, on retranche du dividende le produit de cette multiplication, & l'on a un reſte qu'on écrit à côté du quotient, en mettant le diviſeur au-deſſous de ce reſte, dont on le ſépare par un trait.*

Par exemple, il faut dire, 9 contient 4 deux fois & plus, mais non pas trois fois : j'écris donc 2 pour quotient, & je dis... $2 \times 4 = 8$, enſuite $9 - 8 = 1$, & j'ai $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; ce qui ſignifie que 9 diviſé par 4, a 2 pour quotient, & qu'il reſte encore une des unités de 9 à partager en quatre parties. De même $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \ldots \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \ldots \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

38. REMARQUES. I. La diviſion conſiſte en trois opérations. 1°. *On diviſe le dividende par le diviſeur, pour avoir un quotient ;* 2°. *on multiplie le diviſeur par le quotient, pour avoir un produit ;* 3°. *on ôte ce produit du dividende, pour avoir un reſte.*

II. Si le diviſeur eſt plus grand que le dividende, comme s'il falloit diviſer 4 par 7, alors on ſe contente

d'écrire $\frac{4}{7}$ comme un reſte de diviſion, & cette expreſſion repréſente le quotient.

III. Une quantité qui peut ſe diviſer exactement & ſans reſte par une autre, eſt *multiple* de cette autre quantité. Ainſi 8 eſt multiple de 4 & de 2.... 12 eſt multiple de 6, de 4, de 3, & de 2. Tout nombre eſt multiple de l'unité: mais 8 n'eſt pas multiple de 7, ni de 6, ni de 5, ni de 3. De même 11, n'eſt multiple d'aucun nombre entier plus grand que 1.

IV. Tout nombre entier qui n'eſt multiple d'aucun autre nombre entier plus grand que l'unité, s'appelle *nombre premier*. On trouve dans différents Auteurs des Tables de ces nombres. Voici ceux qui ſont moindres que 500.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.

401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499.

On peut voir dans le cinquieme Volume des Mémoires de Mathémathique & de Phyſique, préſentés à l'Académie Royale des Sciences, (*page* 485) la méthode que M. Rallier des Ourmes a donnée pour trouver les nombres premiers. Cette méthode eſt fort ſimple, quoique indirecte.

Le célebre Jean Bernoulli en avoit déja indiqué une autre (*Tome I. page* 90 de ſes Ouvrages). Elle eſt fondée ſur la propriété commune à tous les nombres premiers, excepté 2 & 3, de ne différer que d'une unité, de 6 ou de ſes multiples; ce qui n'eſt pas réciproque.

On a imprimé depuis peu à Berlin des Tables qui contiennent tous les nombres premiers depuis 1 juſqu'à 102000.

Second Cas de la Diviſion.

39. *Lorſque le dividende eſt un nombre compoſé, & que le diviſeur eſt un nombre ſimple:* 1°. Je cherche combien de

fois le diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende, en allant de gauche à droite.

2°. J'écris le chiffre qui exprime ce nombre de fois, & par ce chiffre je multiplie le diviseur que l'on place ordinairement sur la droite du dividende.

3°. Je soustrais ce produit du premier chiffre du dividende, & j'abaisse le second chiffre à côté du reste, s'il y en a. Après quoi, je recommence les mêmes opérations, jusqu'à ce que je sois parvenu à diviser successivement tous les chiffres du dividende.

Ainsi pour diviser 7953 par 3, j'écrirai d'abord le diviseur à droite du dividende, comme on le voit ici.

Ensuite je dirai... En 7 combien de fois 3? deux fois. J'écris 2 au quotient. Je multiplie 3 par 2, & je soustrais le produit 6, de 7; il me reste 1, à côté duquel j'abaisse 9.

Je dis ensuite... En 19 combien de fois 3? six fois. Je mets 6 au quotient. Je multiplie 3 par 6, & je soustrais le produit 18, de 19. Il me reste encore 1, qui, ajouté au chiffre suivant 5, fait 15.

```
7953 | 3
.... | 2651
 6
 19
 18
 15
 15
 03
  3
  0
```

Le même procédé dans cette troisieme division me fait trouver 5 pour quotient, 15 pour produit, 0 pour reste.

J'abaisse le 3, & je divise comme à l'ordinaire. Le quotient est 1, le produit 3, le reste 0. D'où je conclus que 3 est contenu 2651 fois exactement dans 7953. Pour m'en assurer, je multiplie 2651 par 3; je retrouve le dividende. L'opération est donc bonne.

Dans un cas aussi simple, on a plutôt fait de prendre sur chaque chiffre du dividende la partie désignée par le diviseur. On auroit pu dire, par exemple.... Le tiers de 7 est 2 avec un reste. Ce reste est 1, qui ajouté à 9, fait 19. Le tiers de 19 est 6. Le tiers de 15 est 5. Celui de 3 est 1. Donc 2651 est le tiers cherché de 7953.

Voici quelques autres exemples de cette abréviation.

$\underline{12538}=6269 \qquad \underline{8764}=1752\frac{4}{5} \qquad \underline{97593}=13941\frac{6}{7}$

2 5 7

40. REMARQUES. I. On commence la diviſion par la gauche, afin que s'il y a des reſtes dans les premiers chiffres, on puiſſe les joindre aux chiffres ſuivants. En commençant par la droite, on ſeroit preſque toujours obligé de revenir ſur ſes pas.

II. Si le premier chiffre du dividende eſt plus petit que le diviſeur, il faut chercher combien de fois celui-ci eſt contenu dans les deux premiers du dividende.

III. Lorſqu'après une ſouſtraction il ne reſte rien, & que le chiffre abaiſſé eſt moindre que le diviſeur, il faut mettre zéro au quotient, & abaiſſer le chiffre ſuivant, s'il y en a. On met zéro au quotient, pour conſerver la valeur reſpective des chiffres.

IV. Quand après une ſouſtraction, il ſe trouve un reſte, ce reſte doit toujours être plus petit que le diviſeur. S'il lui étoit même égal, c'eſt qu'alors le chiffre mis en dernier lieu au quotient ſeroit trop petit d'une unité. Il faut donc interrompre le cours d'une diviſion, auſſi-tôt que l'on trouve un reſte qui n'eſt pas plus petit que le diviſeur.

V. A meſure que l'on abaiſſe un chiffre, il eſt à propos de le marquer par un point: cela ſert à reconnoître chaque fois où l'on en eſt, & de combien de chiffres le quotient doit être compoſé.

VI. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient, parce que l'Arithmétique dont nous nous ſervons eſt décimale.

Troiſieme Cas de la Diviſion.

41. *Si le dividende & le diviſeur ſont des nombres compoſés;* ſi on a, par exemple, 147475 à diviſer par 362, on commencera par écrire ces deux nombres, comme on

le voit ici. . . . . 147475 { 362

puis on cherchera combien de fois le diviseur 362 est contenu dans le dividende 147475, ce que l'on fera par parties.

On dira donc d'abord : les trois premiers chiffres 147 du dividende ne contiennent pas les trois chiffres du diviseur (abstraction faite de la valeur relative de 147, qui, dans l'exemple présent, exprime des milles, pendant que 362 n'exprime que des unités). Il faut donc prendre les quatre premiers chiffres 1474 du dividende, & chercher combien de fois 362 y est contenu. Il y est 4 fois & plus ; ce que je trouve en cherchant seulement combien de fois les deux premiers chiffres 14 du dividende contiennent 3, premier chiffre du diviseur. Je multiplie le diviseur 362 par le quotient trouvé 4, pour savoir si ce produit 1448, est plus petit que 1474. Je mets donc 4 au quotient. Je soustrais ensuite 1448 de 1474. Il me reste 26 ; & la premiere partie de la division est faite.

J'abaisse à côté du reste 26 le cinquieme chiffre 7 que je marque d'un point, & le second membre de la division consiste à diviser 267 par 362 : la division n'est pas possible, parce que 267 ne contient pas même une fois 362 ; je pose donc 0 au quotient, & la seconde partie de la division est faite.

Ensuite j'abaisse à côté de 267 le dernier chiffre 5, & le troisieme membre de la division consiste à diviser 2675 par 362. Je dis donc, en 26 combien de fois 3 ? 8 fois ; je multiplie 362 par 8, & je trouve le produit 2896, lequel étant plus grand que le dividende 2675, me fait connoître que 8 est trop grand. Je le diminue donc d'une unité, & après avoir multiplié 362 par 7, je vois que le produit 2534 peut être soustrait de 2675. Soustraction faite, il reste 141 : & parce qu'il n'y a plus de chiffres à abaisser, la division est finie. Ainsi le quotient est $407 + \frac{141}{362}$. Voyez le détail du calcul dans l'Exemple ci-joint.

147475 { 362
... { $407\frac{141}{362}$
1448
2675
2534
141

Autre Exemple. On demande le quotient de 790758 diviſé par 394 ?

Je prends 790 pour premier membre de diviſion, & après avoir mis un point ſous le 0, je demande combien de fois 7 contient 3. Il le contient deux fois avec un reſte : mais avant de mettre 2 au quotient, je multiplie 394 par 2, afin de voir ſi le produit pourra ſe ſouſtraire de 790. Je trouve que le réſultat de cette multiplication ne donne que 788 : ainſi je mets 2 au quotient.

Puis je ſouſtrais 788 de 790; il reſte 2, à côté duquel j'abaiſſe le quatrieme chiffre 7, & j'ai 27 à diviſer par 394. La diviſion ne peut ſe faire, & je mets 0 au quotient.

J'abaiſſe un nouveau chiffre, ce qui me donne 275, nombre plus foible encore que le diviſeur 394. Je poſe donc un ſecond 0 au quotient.

Abaiſſant enfin le 8, je cherche combien de fois 2758 contient 394, ou plutôt combien de fois 27 contient 3. Au premier aſpect, il ſemble que l'on doit mettre 9 au quotient : mais ſi on eſſaye de multiplier 394 par 9, on trouvera 3546, qui ne peut être ſouſtrait de 2758.

En multipliant de même 394 par 8, on trouvera 3152, nombre encore trop fort : mais en ne multipliant le diviſeur que par 7, le produit 2758, pourra ſe ſouſtraire du dernier membre de diviſion, & il ne reſtera rien. Le quotient demandé eſt donc 2007, ſans reſte.

42. *La preuve de l'exactitude de ces opérations ſe fait en ajoutant le dernier reſte de la diviſion au produit du diviſeur par le quotient.* Leur ſomme doit égaler le dividende. Car s'il eſt vrai, par exemple, que 362 ſoit contenu 407 fois dans 147475, avec le reſte 141, ne faut-il pas néceſſairement que $362 \times 407 + 141 = 147475$?

43. On peut auſſi s'aſſurer qu'une diviſion eſt exacte en ſupprimant les 9 contenus, 1°. dans le diviſeur, 2°. dans le quotient, 3°. dans le produit de leurs reſtes, 4°. dans le dividende. Car après ces ſouſtractions, les deux derniers reſtes doivent être égaux comme dans la multiplication.

Obſervez ſeulement que lorſque la diviſion n'a pu ſe faire ſans reſte, il faut ajouter les chiffres de ce reſte comme des unités ſimples, au produit du reſte du diviſeur par celui du quotient, & ôter de cette ſomme tous les 9 qu'elle contient.

Vérifions l'avant-dernier quotient par cette méthode. Le reſte du diviſeur 362 eſt 2; celui du quotient 407 eſt 2 auſſi. Leur produit eſt 4. Le reſte 141 donne 6, que j'ajoute à 4. La ſomme eſt 10. J'en ôte 9; reſte 1, qui doit reſter auſſi du dividende 147475, ſi l'opération eſt bonne; c'eſt effectivement ce qui reſte.

2	1
2	1

44. REMARQUES. I. Au lieu de demander combien de fois tout le diviſeur eſt contenu dans tout le dividende, on demande ſeulement combien de fois le premier chiffre à gauche du diviſeur eſt contenu dans le premier, ou dans les deux premiers chiffres à gauche du dividende. C'eſt que le produit de ce premier chiffre du diviſeur par le quotient, décide communément du nombre de fois que tout le diviſeur eſt contenu dans le dividende.

II. Je dis *communément*; car il arrive aſſez ſouvent que ce produit peut être ſouſtrait du premier ou des deux premiers chiffres du dividende, & que lorſqu'on vient à comparer le produit total du diviſeur par le même quotient, avec la partie correſpondante du dividende, la ſouſtraction n'eſt plus poſſible.

III. Cela arrive ſur-tout, lorſque le ſecond chiffre du diviſeur eſt au-deſſus de 5. Mais alors, on regarde ce que le produit de ce ſecond chiffre par celui que l'on veut mettre au quotient, feroit refluer d'unités ſur le produit du premier chiffre par ce même quotient, & on reconnoît auſſi-tôt le chiffre qu'il convient d'employer.

IV. Quand le dividende & le diviſeur ſont terminés par des zéros, on peut effacer le même nombre de zéros dans l'un & dans l'autre, & faire le reſte de la diviſion ſuivant les Regles précédentes. Ainſi ayant à diviſer 417000 par

2500; je diviſe ſeulement 4170 par 25, & le quotient eſt $166\frac{20}{25}$. Pour diviſer 43495000 par 2850000, je diviſe ſeulement 43495 par 2850; & j'ai $15\frac{745}{2850}$. De même le quotient de 100000 diviſé par 1700 eſt $58\frac{14}{17}$.

V. Quand le diviſeur ſeul eſt terminé par des zéros, on abrege la diviſion, en ſéparant à la fin du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros à la fin du diviſeur; on diviſe enſuite les autres par les chiffres reſtants du diviſeur; on joint le reſte de la diviſion, s'il s'en trouve, à la gauche des chiffres qu'on a ſéparés, & on en fait une fraction: Par exemple, ayant à diviſer 238873 par 3600, je diviſe 2388 par 36, je trouve le quotient 66 & un reſte 12: je dis donc que le quotient cherché eſt $66\frac{1273}{1600}$. Le quotient de 324755 diviſé par 300, eſt $1082\frac{155}{300}$. Le quotient de 843554 diviſé par 1000, eſt $843\frac{554}{1000}$.

VI. On a dû voir par ce qui précede, que *la diviſion eſt l'opération inverſe de la multiplication*, & que par conſéquent *ces deux regles peuvent ſe ſervir mutuellement de preuve.*

VII. Ainſi pour apprendre en peu de tems la pratique de la diviſion, commencez par multiplier un nombre par un autre. Diviſez enſuite leur produit par l'un des deux (par le plus grand ordinairement, pour avoir plutôt fait): vous trouverez toujours l'autre pour quotient, ſans reſte. Vous ſaurez donc à chaque fois quel chiffre il faut mettre au quotient, & par-là vous acquerrez promptement la facilité de diviſer tous les autres nombres.

VIII. Lorſqu'on a pris au hazard un dividende & un diviſeur, il y a tout le diviſeur moins 1 contre 1 à parier, que la diviſion ne ſe fera pas ſans reſte.

IX. Le quotient doit avoir autant de chiffres qu'il y a de membres de diviſion: or le nombre de ces membres eſt toujours déterminé par celui des points que l'on met ſous chacun de leurs derniers chiffres. On peut donc, dès le premier membre de la diviſion, ſavoir le nombre de chiffres que le quotient doit avoir.

Voici maintenant quelques divisions toutes faites.

$$\begin{array}{r|l} 46728 & 21 \\ \cdots & \\ 42 & 2225 \\ \hline 47 & \\ 42 & \\ \hline 52 & \\ 42 & \\ \hline 108 & \\ 105 & \\ \hline (3) & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 723\,12146 & 8369 \\ \cdots & \\ 66952 & 8640 \\ \hline 53601 & \\ 50214 & \\ \hline 33874 & \\ 33476 & \\ \hline (3986) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 823945687089 & 8247685671 \\ \cdots & \\ 74229171039 & 99 \\ \hline 816539766 99 & \\ 74229171039 & \\ \hline (7424805660) & \end{array}$$

En voici quelques autres à faire.

$$Y\ \frac{2567875}{2568} \qquad Z\ \frac{38678267}{99887} \qquad A'\ \frac{700200031}{683679}$$

DES FRACTIONS.

De la nature des Fractions en général, de leur valeur & de leur comparaiſon.

45. UNE Quantité quelconque eſt diviſible en deux moitiés, en trois tiers, en quatre quarts, en cinq cinquiemes, &c; dont ſi on ne prend qu'une moitié, ou qu'un ou deux tiers, ou qu'un, ou deux ou trois quarts, &c, on n'aura qu'une portion plus ou moins grande de la quantité dont il s'agit. C'eſt cette portion que l'on déſigne en général par le mot *fraction.*

46. L'idée de fraction comprend donc *l'eſpece* & *le nombre* de parties que l'on veut prendre pour avoir une portion plus ou moins grande de telle ou telle quantité. Ainſi $\frac{1}{3}$ ſignifie que l'unité étant diviſée en 3 parties égales, on en a pris une : la fraction $\frac{4}{5}$ exprime que l'unité étant diviſée en 5 parties égales, on en a pris 4, &c.

Le nombre ou terme ſupérieur s'appelle *le numérateur* de la fraction, & l'inférieur s'appelle *le dénominateur;* ainſi dans la fraction $\frac{4}{5}$, le numérateur eſt 4, & le dénominateur eſt 5.

47. Une fraction proprement dite eſt donc une quantité moindre que l'unité, parce que ſon numérateur eſt plus petit que ſon dénominateur. Cependant, il n'eſt pas rare de trouver des expreſſions en forme de fractions, dont le numérateur eſt égal, ou même plus grand que le dénominateur. Or quand le numérateur eſt égal au dénominateur, la fraction eſt égale à l'unité; par ex. $\frac{4}{4}$ ſignifiant que l'unité eſt diviſée en 4 parties égales, & que l'on prend à la fois ces 4 parties, il eſt clair qu'on a l'unité entiere. Ainſi $\frac{11}{11} = 1 \ldots \frac{99}{99} = 1$; &c. Et quand le numérateur ſurpaſſe le dénominateur, la valeur de la frac-

tion ſurpaſſe l'unité : ainſi $\frac{12}{4} = 3 \ldots \frac{49}{7} = 7 \ldots \frac{101}{20} = 5 + \frac{1}{20}$, &c.

48. Il n'eſt pas toujours aiſé de diſtinguer au premier coup d'œil quelle eſt la plus grande de deux fractions, à moins qu'elles n'ayent un même numérateur, ou un même dénominateur. On ne voit pas tout de ſuite, par exemple, quelle eſt la plus grande de ces deux fractions... $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. Mais, 1°. *ſi elles ont un même numérateur, celle qui a un dénominateur plus petit eſt la plus grande :* ainſi il eſt clair que la fraction $\frac{1}{2}$ eſt plus grande que la fraction $\frac{1}{4}$; la fraction $\frac{1}{5}$ eſt plus grande que $\frac{1}{7}$, &c.

2°. *Si deux fractions ont le même dénominateur*, alors *la plus grande eſt celle qui a le plus grand numérateur.* Il eſt évident, par exemple, que $\frac{2}{3}$ ſont plus que $\frac{1}{3}$, & que $\frac{4}{5}$ valent plus que $\frac{1}{5}$.

49. Si une quantité eſt double, triple, ou centuple d'une autre, la moitié de la premiere quantité ſera évidemment double, triple, ou centuple de la moitié de la ſeconde quantité. Le tiers, le quart, le millieme, ou telle autre partie que l'on voudra de la premiere, ſera également double, triple ou centuple du tiers, du quart, du millieme, & en général de la partie correſpondante de la ſeconde. D'où il ſuit que *les parties ſemblables de deux ou de pluſieurs quantités ont toujours entre elles le même rapport que ces quantités.*

50. La valeur d'une fraction ne change donc pas, ſoit que l'on diviſe, ſoit que l'on multiplie ſes deux termes par un même nombre ; & par conſéquent *il y a une infinité de fractions de même valeur, quoique exprimées en termes différents.*

Exemples. $\frac{16}{72} = \frac{12}{36} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, comme il eſt évident. La ſeconde fraction vient des deux termes de la premiere, diviſés l'un & l'autre par deux. On a diviſé ceux de la ſeconde par 3, & ceux de la troiſieme par 6, ce qui a donné la fraction $\frac{1}{2}$, viſiblement égale à celles qui la précedent. On ſeroit parvenu immédiatement à ce dernier réſultat, en diviſant les deux termes de la premiere fraction par 36.

Pareillement $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{10}{45} = \frac{210}{315}$ = &c : mais quand il s'agit d'évaluer une fraction, on sent bien que cela est plus aisé dans les petits nombres que dans les grands; $\frac{2}{3}$, par exemple, d'une quantité quelconque, ont une valeur plus décidée que $\frac{210}{315}$ de la même quantité. D'où il suit qu'une méthode qui apprendroit à trouver, dans tous les cas qui en sont susceptibles, *l'expression la plus simple* d'une fraction, seroit infailliblement fort utile. On l'a trouvée, cette méthode; & nous allons l'expliquer en parlant du calcul des fractions.

Du Calcul des Fractions; & d'abord de quelques opérations préliminaires.

OUTRE les quatre Regles ordinaires que nous avons développées dans le calcul des Nombres entiers, il y en a quelques autres qui sont particulieres aux fractions. Elles consistent 1°. à transformer tel nombre entier que l'on veut, en fraction; 2°. (& celle-ci est la plus usitée,) à réduire plusieurs fractions au même dénominateur; 3°. à réduire une fraction quelconque à la plus simple expression. On sentira bientôt l'utilité de ces Regles.

51. *Transformer les entiers en Fractions.* On peut donner à un nombre entier la forme d'une fraction, en lui donnant 1 pour dénominateur; ainsi 6 mis en forme de fraction, est $\frac{6}{1}$... $8 = \frac{8}{1}$, &c.

On peut aussi le présenter sous une forme fractionaire qui ait un dénominateur à volonté. Pour cet effet on multiplie le nombre entier par le dénominateur qu'on a choisi, le produit est le numérateur de la fraction; ainsi pour réduire 6 à une fraction dont le dénominateur soit 7, on écrit $\frac{42}{7}$. Or comme en faisant la division de 42 par 7, on a 6 au quotient, il est clair que $\frac{42}{7}$ & 6 sont deux expressions équivalentes.

S'il falloit réduire en une fraction ſeule un nombre entier joint à une fraction, on multiplieroit le nombre entier par le dénominateur de la fraction, on ajouteroit le numérateur à ce produit, & de la ſomme on feroit le numérateur de la fraction cherchée; ainſi $6\frac{1}{4}$ ſe réduit à la fraction $\frac{27}{4}$. . $3\frac{1}{22}$ ſe réduit à $\frac{67}{22}$.

52. *Réduire pluſieurs Fractions au même dénominateur.*

Multipliez le numérateur, puis le dénominateur de chaque fraction, par chacun des dénominateurs de toutes les autres fractions. Vous aurez d'autres fractions reſpectivement égales aux premieres & qui auront toutes le même dénominateur.

Voulez-vous, par exemple, réduire $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ au même dénominateur? multipliez les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 4, vous aurez $\frac{4}{8}$; multipliez enſuite les deux termes de la fraction $\frac{1}{4}$ par 2, vous aurez $\frac{2}{8}$: les deux nouvelles fractions ſeront donc $\frac{4}{8}$ & $\frac{2}{8}$.

Pareillement pour réduire les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{4}$, au même dénominateur, on multipliera les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ par 7, puis par 4, & on aura $\frac{2\times7\times4}{3\times7\times4} = \frac{56}{84}$. Multipliant de même ceux de la fraction $\frac{5}{7}$ par 3, puis par 4, on trouvera $\frac{5\times3\times4}{7\times3\times4} = \frac{60}{84}$. Multipliant enfin ceux de la fraction $\frac{1}{4}$ par 7, les produits ſeront $\frac{3\times3\times7}{4\times3\times7} = \frac{63}{84}$. Ainſi les trois fractions réduites ſont $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$, & chacune eſt reſpectivement égale à celle dont elle tire ſa premiere origine.

53. On pourroit réduire par la même méthode tant de fractions qu'on voudroit au même numérateur, en multipliant les deux termes de chacune par chaque numérateur des autres. Ainſi les trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{4}$, ſe réduiſent à celles-ci, $\frac{10}{42}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{10}{40}$: mais cette réduction au même numérateur trouve rarement ſon application.

54. *Pour réduire une Fraction à l'expreſſion la plus ſimple.*

Il faut examiner d'abord, ſi le numérateur eſt plus grand que le dénominateur; car alors, il faut diviſer le numéra-

eur par le dénominateur : ainſi $\frac{12}{4}$ ſe réduit à 3.... $\frac{8}{5}$ ſe réduit à $2\frac{3}{5}$.

Il faut voir enſuite, ſi le numérateur & le dénominateur ne pourroient pas être diviſés tous deux ſans reſte par un même nombre ; car alors, l'expreſſion deviendroit plus ſimple, ſans changer de valeur. Elle deviendra d'autant plus ſimple, que ſes deux termes ſeront diviſés par un plus grand nombre.

Il arrive ſouvent que cette réduction eſt impoſſible ; mais comme il eſt rare que l'on puiſſe juger du premier abord, ſi elle eſt poſſible ou non, on peut s'en aſſurer au moyen de certaines propriétés des nombres, dont nous ne rapporterons que les principales.

55. I. Tout nombre pair eſt diviſible par 2 : ainſi tant que les termes d'une fraction ſeront des nombres pairs, ils pourront toujours être réduits à leur moitié. La fraction $\frac{128}{432}$, par exemple, ſe réduit à $\frac{8}{27}$, en diviſant quatre fois par 2.

II. Tout nombre terminé par 0, eſt diviſible par 5 & par 10. Ainſi la fraction $\frac{20}{90}$ ſe réduit à $\frac{2}{9}$.

III. Tout nombre terminé par 5, eſt diviſible par 5. Ainſi $\frac{15}{85}$ ſe réduiſent à $\frac{3}{17}$. De même $\frac{120}{215}$ ſe réduiſent à $\frac{24}{43}$.

IV. Tout nombre tel que la ſomme de ſes chiffres eſt un multiple de 3, eſt diviſible par 3. Ainſi la fraction $\frac{288}{651}$ eſt diviſible par 3, & ſe réduit d'abord à $\frac{96}{217}$, puis à $\frac{32}{19}$. Et ſi de plus le nombre diviſible par 3 eſt pair, on peut alors le diviſer par 6. On peut le diviſer par 9, lorſque la ſomme de ſes chiffres eſt multiple de 9 (31).

V. Quand le nombre qu'expriment les deux derniers chiffres d'un nombre eſt diviſible par 4, le nombre lui-même peut ſe diviſer par 4 : la fraction $\frac{184}{240}$ peut donc ſe réduire d'abord à $\frac{46}{60}$, puis à $\frac{23}{30}$, après quoi elle eſt *irréductible*. La fraction $\frac{2064}{10976}$ peut ſe réduire de même à $\frac{516}{2744}$: enſuite à $\frac{172}{2548}$, puis à $\frac{86}{1274}$, & enfin à $\frac{43}{637}$.

VI. Tout nombre eſt diviſible par 8, lorſque la partie de ce nombre exprimée par ſes trois derniers chiffres eſt diviſible par 8. Ainſi $\frac{888}{3432} = \frac{111}{304}$.

56. Au lieu d'eſſayer les unes après les autres ces di-

verſes propriétés des nombres, on va plus directement au fait, en ſe ſervant de la méthode générale, fondée ſur ce principe, que *pour réduire à l'expreſſion la plus ſimple une fraction quelconque, il faut diviſer ſes deux termes par leur plus grand diviſeur commun.*

Or pour trouver le plus grand commun diviſeur poſſible de deux nombres quelconques, diviſez le plus grand par le plus petit; & ſi la diviſion ſe fait ſans reſte, le plus petit nombre eſt le plus grand diviſeur cherché.

Si après la diviſion, il ſe trouve un reſte, diviſez le plus petit nombre donné, par ce reſte; & ſi la diviſion ſe fait ſans un nouveau reſte, le premier reſte eſt le plus grand diviſeur cherché.

S'il ſe trouve un ſecond reſte, diviſez le premier par le ſecond, & ſi la diviſion ſe fait ſans troiſieme reſte, le ſecond eſt alors le plus grand commun diviſeur que vous puiſſiez trouver.

En général, le reſte qui diviſe exactement le reſte précédent, eſt le plus grand diviſeur cherché.

EXEMPLE. On veut réduire la fraction $\frac{91}{294}$ à l'expreſſion la plus ſimple qu'il ſoit poſſible. Pour cela 1°, diviſez 294 par 91; vous trouverez 3 pour quotient, 273 pour produit, & 21 pour reſte.

2°. Diviſez 91 par ce premier reſte 21 : le quotient ſera 4, le produit 84, & le ſecond reſte, 7.

3°. Diviſez le premier reſte 21 par le nombre 7, & vous aurez 3 pour quotient exact. D'où vous conclurez que 7 eſt le plus grand commun diviſeur de 294 & de 91.

4°. Diviſant donc ces deux nombres par 7, vous aurez, ſous l'expreſſion la plus ſimple, la fraction $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$.

57. Reprenons ces diverſes opérations, & faiſons voir, 1°. que 7 eſt un diviſeur commun des nombres propoſés; 2°. qu'il eſt le plus grand de tous leurs diviſeurs communs.

Puiſque 7 diviſe 21, il doit diviſer $21 \times 4 = 84$, & par conſéquent $84 + 7 = 91$. Mais s'il diviſe 91, il doit diviſer auſſi $91 \times 3 = 273$, & par conſéquent $273 + 21 = 294$. Il eſt donc diviſeur commun des deux nombres propoſés.

Il

Il eſt auſſi le plus grand de tous leurs diviſeurs communs : car tout autre nombre qui diviſeroit 91 & 294, devroit diviſer 21 qui reſte de 294 après en avoir ſouſtrait $91 \times 3 = 273$: il devroit également diviſer 7, reſte de 91 après en avoir ſouſtrait $21 \times 4 = 84$. Or un nombre plus grand que 7 ne peut être un diviſeur exact de 7.

58. Pour démontrer cette regle d'une maniere générale, il faut obſerver que deux quantités ne ſont diviſibles ſans reſte par un même nombre, que lorſqu'elles ſont des produits exacts de ce nombre. La plus grande quantité eſt produite par ce nombre pris plus de fois que dans la plus petite quantité. Or deux quantités A & B étant ainſi compoſées, ſi ayant ôté la plus petite B de la plus grande A, autant de fois qu'il eſt poſſible, par exemple trois fois, il n'y a pas de reſte, il eſt clair que A eſt compoſé de B pris trois fois, que B eſt compoſé de B pris une fois, & que par conſéquent B eſt, dans ce cas, le plus grand commun diviſeur des quantités A & B.

2°. Mais ſi ayant retranché B de A autant de fois qu'il eſt poſſible, (c'eſt-à-dire, trois fois dans cet exemple) il ſe trouve un reſte C ; alors $A - C$ eſt une quantité compoſée de B pris trois fois juſtes ; ou $A - C = 3$ B ; par conſéquent ſi C eſt contenu un certain nombre de fois juſte, par exemple, 4 fois dans B, il ſera auſſi contenu un nombre juſte de fois dans $A - C$. Il eſt clair en effet qu'on aura $B = 4$ C, & $A - C = 3$ B deviendra $A - C = 3 \times 4$ C, d'où l'on tire $A = 13$ C. Il faut donc ôter C de B autant de fois qu'il eſt poſſible, & ſi cela ſe fait ſans reſte, C eſt la quantité qui a ſervi à compoſer les quantités A & B.

3°. Mais ſi ayant ôté C de B autant de fois qu'il eſt poſſible, par exemple 4 fois, il ſe trouve un reſte D : alors $B - D$ eſt une quantité compoſée de C pris juſte 4 fois, ou $B - D = 4$ C. Donc ſi D eſt contenu un certain nombre de fois juſte, par exemple 3 fois dans C, il ſera juſtement auſſi dans A & dans B, il ſera le nombre qui aura ſervi à compoſer les quantités A & B. Car on aura $C = 3$ D. Donc dans l'équation $B - D = 4$ C, on aura $B - D = 4 \times 3$ D, & par conſéquent $B = 13$ D ; & l'équation $A - C = 3$ B, deviendra $A - 3$ D $= 3 \times 13$ D. Donc $A = 42$ D.

En continuant ce raiſonnement, on verra que le dernier reſte qui ſe peut retrancher un certain nombre de fois juſte du reſte précédent, eſt la quantité qui a ſervi à former les deux quantités A & B, & par conſéquent qu'il eſt leur plus grand commun diviſeur.

Il eſt évident auſſi que c'eſt la même choſe de diviſer une quantité par une autre, que d'en retrancher cette autre, autant de fois qu'il eſt poſſible.

59. Quand la fraction ne ſe peut réduire à une expreſſion plus ſimple, ces diviſions donnent enfin l'unité pour dernier reſte. Car l'unité eſt un diviſeur commun à tous les nom-

bres. Il eſt fâcheux cependant de ne pouvoir reconnoître qu'une fraction eſt irréductible, qu'après avoir fait tous les frais de calcul néceſſaires pour s'en aſſurer.

Pour ſe rendre familiere la pratique de cette regle, il n'y a qu'à multiplier ſucceſſivement par un même nombre les deux termes de quelques fractions irréductibles. On verra que le plus grand diviſeur commun des fractions provenues de ces multiplications, ſera toujours le nombre par lequel on aura multiplié.

Par exemple, les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ multipliés par 84 donnent $\frac{168}{252}$. Et pour tamener cette derniere fraction à la premiere, il n'y aura qu'à diviſer d'abord 252 par 168, enſuite 168 par 84, reſte de la premiere diviſion. On trouvera que la ſeconde diviſion ſe fait exactement, & par conſéquent que le plus grand commun diviſeur cherché eſt 84.

Voici quelques fractions toutes réduites . . . .

$$\frac{441}{567} = \frac{7}{9} \cdots \frac{48}{272} = \frac{3}{17} \cdots \frac{840}{1848} = \frac{5}{11} \cdots \frac{3661}{11506} = \frac{7}{22}.$$

En voici quelques autres à réduire.

$$B' \frac{504}{1152} \quad C' \frac{1248}{2016} \quad D' \frac{14142}{38264} \quad E' \frac{202994}{294215}.$$

De l'Addition des Fractions.

60. POUR ajouter enſemble des fractions, *réduiſez-les au même dénominateur, & de la ſomme de tous les numérateurs des fractions réduites, faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.*

Ainſi pour ajouter les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, réduiſez-les à celles-ci $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$; leur ſomme eſt $\frac{5}{6}$.

Pour ajouter enſemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, je les réduis à celles-ci (52) $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$; la ſomme des numérateurs eſt 46, j'ai donc $\frac{46}{24}$, & en réduiſant à l'expreſſion la plus ſimple, $1\frac{11}{12}$.

S'il y a des nombres entiers joints aux fractions, il faut

ajouter leur ſomme à celle des fractions, ainſi $4\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}=6\frac{4}{6}$; . . . . $3\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}=8\frac{5}{12}$.

De la Souſtraction des Fractions.

61. POUR ſouſtraire une fraction d'une autre, *réduiſez-les au même dénominateur, prenez la différence entre les deux numérateurs, & faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.*

Voulez-vous, par exemple, ſouſtraire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$? réduiſez ces fractions à celles-ci $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$; il eſt clair que la différence eſt $\frac{5}{12}$.

S'il y a des nombres entiers joints aux fractions, il faut les ſouſtraire à l'ordinaire, & joindre leur différence à la nouvelle fraction; ainſi pour ôter $3\frac{1}{2}$ de $4\frac{1}{4}$, il faut écrire $1\frac{2}{4}$, ou $1\frac{1}{4}$.

62. Mais ſi la fraction à ſouſtraire eſt plus grande que celle dont on ſouſtrait, ou ſi l'on a une fraction à ſouſtraire d'un entier, alors il faut réduire en fraction une unité de ce nombre entier. Par exemple, pour ôter $3\frac{2}{3}$ de $6\frac{1}{4}$, je réduis la quantité $6\frac{1}{4}$ à $5\frac{5}{4}$, & réduiſant $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{4}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{8}{12}$ & $\frac{15}{12}$; j'ôte $\frac{8}{12}$ de $\frac{15}{12}$, reſtent $\frac{7}{12}$; j'ôte 3 de 5, & j'ai 2 pour reſte; enſorte que la différence cherchée eſt $2\frac{7}{12}$.

De même, pour ôter $\frac{2}{3}$ de 4, je réduis 4 à cette expreſſion; $3\frac{3}{3}$ de ſorte que retranchant $\frac{2}{3}$ de $3\frac{3}{3}$, reſtent $3\frac{1}{3}$. Pour ôter $\frac{4}{5}$ de 2, je réduis 2 à $1\frac{5}{5}$, & la différence eſt $1\frac{1}{5}$.

De la Multiplication des Fractions.

63. Le multiplicateur d'une fraction peut être un nombre entier, ou un nombre fractionaire. Dans le premier cas, on multiplie le numérateur ſeul par l'entier, & on diviſe le produit par le dénominateur de la fraction. Ainſi $\frac{2}{13}\cdot 5=\frac{10}{13}$.

Dans le ſecond cas, on multiplie les deux numérateurs

l'un par l'autre, & on diviſe leur produit par celui des deux dénominateurs. C'eſt ainſi qu'en multipliant $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{4}$, on trouve $\frac{15}{28}$ pour produit.

La raiſon de cette double Regle eſt très-facile à comprendre. Car en ſe rappellant le Principe de la multiplication en général, on verra que le produit doit toujours contenir le multiplicande, comme le multiplicateur contient l'unité (24). Or dans le premier cas, le multiplicateur 5 contient cinq fois l'unité. Il faut donc que le produit contienne cinq fois auſſi le multiplicande $\frac{2}{13}$, & par conſéquent que le produit ſoit $\frac{10}{13} = \frac{2 \cdot 5}{13}$.

Par la même raiſon, il faut dans le ſecond cas, que le produit ne ſoit que les $\frac{3}{4}$ du multiplicande, puiſque le multiplicateur n'eſt que les $\frac{3}{4}$ de l'unité. Or les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ ſont $\frac{15}{28}$: le quart de $\frac{1}{7}$ en effet eſt $\frac{1}{28}$; donc le quart de $\frac{5}{7}$ eſt $\frac{5}{28} = \frac{5}{7 \cdot 4}$: donc les trois quarts de $\frac{5}{7}$ ſont $\frac{15}{28} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4}$.

Autrement. Si au lieu de ne multiplier $\frac{5}{7}$ que par $\frac{3}{4}$, on avoit eu à les multiplier par 3, il eût fallu, ſuivant la premiere Regle, écrire $\frac{15}{7}$ pour produit. Donc en les multipliant par un nombre quatre fois plus petit que 3, ou par $\frac{3}{4}$, on doit avoir un produit quatre fois moindre que $\frac{15}{7}$; on doit donc avoir $\frac{15}{28}$.

Exemples. $\frac{5}{8} \cdot 9 = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8} \ldots \frac{11}{18} \cdot 36 = \frac{11 \cdot 36}{18} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 18}{18} = \frac{11 \cdot 2}{1} = 22 \ldots \frac{19}{24} \cdot 12 = \frac{19 \cdot 12}{2 \cdot 12} = \frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \ldots \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} \ldots \frac{8}{19} \cdot \frac{57}{64} = \frac{8 \cdot 57}{19 \cdot 64} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 19}{19 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{3}{8}$.

64. Toute fraction proprement dite étant moindre que l'unité, le produit de deux fractions de cette eſpece, doit être moindre que le multiplicande, dans le même rapport que le multiplicateur eſt moindre que l'unité. C'eſt pourquoi $\frac{1}{2}$, par exemple, multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{4}$ pour produit, &c.

65. Si le multiplicande & le multiplicateur étoient des

nombres entiers joints à des fractions, on les transformeroit en une seule fraction chacun, pour les faire rentrer dans le second cas dont nous avons parlé.

Exemples. $3\frac{2}{9}.\ 7\frac{1}{3} = \frac{29}{9}.\frac{22}{3} = \frac{638}{27} = 23\frac{17}{27}$..... $12\frac{6}{7}.\ 30\frac{1}{90} = \frac{90}{7}.\frac{2701}{90} = \frac{2701}{7} = 385\frac{6}{7}$.... $10\frac{1}{100}.$ $15\frac{1}{10} = \frac{1001}{100}.\frac{151}{10} = \frac{151451}{1000} = 151\frac{451}{1000}$.

66. REMARQUES. I. On a souvent des fractions à multiplier par des nombres qui sont des diviseurs exacts des dénominateurs. Alors on parvient tout de suite à l'expression la plus simple du produit, en divisant le dénominateur par l'entier, au lieu de multiplier le numérateur. C'est ainsi, par exemple, que $\frac{5}{12}.\ 2 = \frac{5}{6}$; &c.

II. Souvent aussi le nombre par lequel on doit multiplier, est égal au dénominateur même. Alors le produit est égal au numérateur : ainsi $\frac{3}{11}.\ 11 = 3$; &c.

III. Quand on a plusieurs fractions à multiplier les unes par les autres, il est très-rare que le calcul ne puisse pas s'abréger, en effaçant des nombres communs au numérateur & au dénominateur du produit.

Exemples. $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{4}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$... $\frac{1}{7}.\frac{25}{40}.\frac{8}{9} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$. Voici quelques autres réductions à faire. $\frac{5}{8}.\frac{1}{5} = F'$... $\frac{7}{10}.\frac{20}{21} = G'$... $4\frac{9}{27}.$ $\frac{27}{213} = H'$.

De la Division des Fractions.

67. Ou le diviseur d'une fraction est un nombre entier, ou c'est un nombre fractionaire; s'il est entier, multipliez le dénominateur seul par ce nombre, & divisez par leur produit le numérateur de la fraction. Ex. $\frac{1}{4}$ divisés par 2 donnent $\frac{1}{4.2} = \frac{1}{8}$ pour quotient.

Si le diviseur est fractionaire, multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, & divisez leur produit par celui que vous donnera la multiplication du dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur. Ex. $\frac{2}{5}$ divisés par $\frac{1}{7} = \frac{2.7}{5.1} = \frac{14}{15}$.

Pour bien concevoir ces deux Regles, il faut se ressouvenir que dans une division quelconque, le quotient doit être à l'unité, comme le dividende est au diviseur (34). Or

dans le premier cas le dividende $\frac{2}{4}$ est les $\frac{2}{3}$ du diviseur $\frac{2}{3}$ donc le quotient doit être les $\frac{3}{2}$ de l'unité.

Il est aisé d'ailleurs de s'en convaincre par le raisonnement suivant. Diviser une quantité quelconque par 2, c'est en prendre la moitié : or la moitié de $\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{8}$; donc la moitié de $\frac{3}{4}$ est $\frac{3}{8}$.

Dans le second cas, si on eût eu simplement $\frac{2}{5}$ à diviser par 3, le quotient auroit été $\frac{2}{5.3} = \frac{2}{15}$: mais comme le diviseur $\frac{3}{7}$ est sept fois plus petit que 3, le quotient $\frac{2}{15}$ est sept fois trop foible. Il faut donc le multiplier par 7, ce qui donne $\frac{2.7}{5.3} = \frac{14}{15}$ pour le vrai quotient.

On peut le démontrer aussi de cette maniere. Dans une division quelconque, le quotient doit être au dividende comme l'unité est au diviseur. Or le diviseur est ici les $\frac{3}{7}$ de l'unité, donc le dividende doit être les $\frac{3}{7}$ du quotient. On a donc $\frac{2}{5} = \frac{3}{7} q$, (en désignant par q le quotient cherché); d'où l'on tire $\frac{2.7}{5.3}$ ou $\frac{14}{15} = q$.

68. Les divisions des fractions se vérifient comme celles des nombres entiers, en multipliant le diviseur par le quotient.

Or le quotient d'une quantité divisée par une fraction proprement dite, doit être toujours plus grand que le dividende. Car le quotient est d'autant plus grand, que le diviseur est plus petit. Puis donc qu'il est égal au dividende, quand le diviseur est 1, il sera plus grand que lui, toutes les fois que le diviseur sera moindre que l'unité.

Si le dividende & le diviseur sont des entiers joints à des fractions, on les transformera en une seule fraction chacun, sur laquelle on opérera ensuite à l'ordinaire.

69. Mais si le dividende est un nombre entier, & que le diviseur soit fractionaire, alors on multipliera l'entier par le dénominateur de la fraction, & on divisera le produit par le numérateur.

Exemple. 8 divisé par $\frac{3}{5}$ donne $\frac{8.5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$; car s'il

ne s'agiſſoit de diviſer 8 que par 3, il faudroit écrire $\frac{8}{1}$; donc en diviſant 8 par $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire, par une quantité cinq fois plus petite que 3, on doit avoir un quotient cinq fois plus grand que $\frac{8}{1}$: on doit donc avoir $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Il n'y auroit d'ailleurs qu'à mettre l'entier 8 ſous la forme fractionnaire $\frac{8}{1}$, pour ramener cet exemple à la ſeconde Regle.

Voici maintenant quelques exemples de diviſions de fractions ſur leſquels on peut s'exercer. (Les deux points mis entre le dividende & le diviſeur ſignifient *diviſé par*, comme le trait dont nous nous ſommes ſervi juſqu'ici).

$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = I' \ldots \frac{12}{19} : \frac{9}{19} = K' \ldots \frac{1}{17} : \frac{1}{17} = L' \ldots 16 : \frac{16}{19} = M'$.

70. Remarques. I. Une portion de fraction, telle, par exemple, que les $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{7}$, s'appelle *une fraction de fraction*. Or il eſt évident que cette expreſſion, $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{7}$ ſignifie qu'il faut prendre trois fois le quart de $\frac{3}{7}$. Il faut donc diviſer d'abord $\frac{3}{7}$ par 4, ce qui donne $\frac{3}{7.4} = \frac{3}{28}$; puis multiplier ce quotient par 3, ce qui donnera $\frac{9}{28}$, produit de $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{7}$; d'où il faut conclure 1°, que la valeur d'une fraction de fraction ſe trouve en multipliant l'une par l'autre les deux fractions qui l'expriment; 2°, qu'il n'y a par conſéquent aucune différence entre la valeur de $\frac{3}{7}$ de $\frac{1}{4}$, & la valeur de $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{7}$.

II. Souvent la fraction que l'on doit diviſer a le même dénominateur que la fraction par laquelle doit ſe faire la diviſion. Alors on a tout de ſuite pour quotient la fraction des deux numérateurs. Ainſi pour diviſer $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{5}$, il n'y a qu'à écrire $\frac{3}{4}$.

III. Si le numérateur du dividende peut ſe diviſer ſans reſte par le numérateur du diviſeur, il faut effectuer cette diviſion, afin de parvenir immédiatement à l'expreſſion la plus ſimple. Même remarque à faire ſur les deux dénominateurs. Exemple. $\frac{12}{13}$ diviſés par $\frac{1}{11}$ donnent 1 pour quotient.

IV. Il n'eſt pas rare de trouver deux numérateurs ou deux dénominateurs diviſibles par un même nombre. Alors on ſimplifie le calcul en exécutant cette diviſion. Soit, par exemple, la fraction $\frac{15}{16}$ à diviſer par $\frac{5}{8}$. On diviſera d'abord les numérateurs par 5, puis les dénominateurs par 8; le quotient ſera $\frac{3}{2}$.

Des Fractions Décimales.

71. PAR Fractions Décimales, on entend généralement toutes les fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros. Telles sont les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{641}{1000}$, $\frac{8}{10000}$, &c.

On voit bien que sous cette forme elles rentrent dans la classe des fractions ordinaires. Ainsi on peut les assujettir aux mêmes Regles, & les calculer avec la même facilité.

Mais pour abréger le calcul, on a imaginé de sous-entendre les dénominateurs des fractions décimales, & de substituer aux Regles générales quelques Regles particulieres, dont voici le Principe.

72. La numération ordinaire a pour base la convention, que tout chiffre placé à la droite d'un autre, lui donne une valeur décuple (10). Ainsi pour écrire trois dixaines, on met zéro sur la droite du 3, & on écrit 30; donc pour écrire trois dixiemes, il suffit de mettre un zéro sur la gauche du 3, comme on le voit ici, 03.

Seulement pour fixer le rang des unités simples, on est convenu de le séparer du rang des dixiemes par une virgule, & au lieu d'écrire $\frac{3}{10}$, on écrit 0,3. On écriroit 0,2 pour deux dixiemes; 0,7 pour sept dixiemes; 0,9 pour neuf dixiemes, & si on avoit dix, ou vingt ou trente dixiemes à écrire, on en feroit une ou deux ou trois unités.

73. En suivant la même marche, on verra que puisque les centaines occupent le troisieme rang vers la gauche, à partir de celui des unités, les centiemes doivent occuper le troisieme rang en sens contraire. Et comme pour écrire cinq cents, on écrit 500, il est clair que pour écrire cinq centiemes, on peut se servir de l'expression suivante; 0,05. Pour exprimer huit mille, on écrit 8000; donc pour exprimer huit milliemes, on écrira 0,008. &c. &c.

Si au lieu de huit milliemes, on eût voulu en écrire

deux cent douze, on ſe ſeroit ſervi de cette expreſſion 0,212. En général on écrit toujours le numérateur comme les nombres entiers.

74. D'après cela on devinera ſans peine la valeur des quantités ſuivantes :

0,1 = N′ ... 3,42 = O′ ... 354,0063 = P′ ... 8,700201 = Q′.

Il ne ſera guere plus difficile de transformer en chiffres les quantités que voici.

Trois dix-milliemes = R′.

Mille + quatre centiemes = S′.

Neuf + deux millioniemes = T′.

Treize mille cent-millioniemes = U′.

75. Cela poſé, on voit que le premier rang des décimales ſur la droite de la virgule, exprime des dixiemes; que le ſecond rang exprime des centiemes, & ainſi de ſuite : de maniere que 2,9654 n'eſt qu'une expreſſion abrégée de la quantité $2 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{4}{10000}$ que l'on peut réduire à celle-ci $2 + \frac{9654}{10000}$.

Paſſons aux Regles du calcul de ces fractions.

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion des Fractions Décimales.

76. Si aux Regles déja connues pour les nombres entiers, on ajoute celle qui concerne la virgule des décimales, rien n'eſt plus ſimple ni plus commode que le calcul de ces fractions.

I. Soit donc propoſé d'ajouter 4852,791 ... 4,00745 ... 2,7 ... 0,0049. J'écris d'abord ces quatre nombres l'un ſous l'autre, avec cette ſeule précaution que les virgules ſe trouvent dans la même colonne, comme vous le voyez ici.

```
4852,791
   4,00745
   2,7
   0,0049
-----------
4859,50335
```

Puis j'ajoute ces nombres à l'ordinaire, & j'ai ſoin de placer la virgule de la ſomme totale, ſous la colonne de autres virgules. Autre exemple.

37,5602385642
91,7832036785
8,12
1,30005
138,7634922427

II. La ſouſtraction des décimales ſe fait comme celle des nombres entiers. Il ſuffit, pour l'entendre, de jeter les yeux ſur les exemples ſuivants.

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,0045514
8,92	2,8135	5,83435	2,8374486

III. La multiplication des décimales ne differe preſque pas de celle des nombres entiers. On multiplie à l'ordinaire tous les chiffres du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, ſans avoir d'abord égard aux virgules : mais lorſqu'on a pris la ſomme de chaque produit, pour avoir un produit total, *il faut ſéparer par une virgule autant de chiffres ſur la droite, qu'il y a de décimales dans le multiplicande & le multiplicateur* : enſorte que ſi cette ſomme n'étoit pas compoſée d'autant de chiffres qu'il y a de décimales dans ces deux nombres, il faudroit mettre ſur la gauche un nombre ſuffiſant de zéros : voyez le ſecond Exemple.

43,7	2,4542	3,7	21,32
13	0,00053	4,12	0,100103
1311	73626	74	6396
437	122710	37	2132
568,1	0,0013007726	148	2132
		15,244	2,13419596

77. Ces multiplications peuvent ſe vérifier par la ſimple ſuppreſſion des 9 (30) ou par la diviſion. Quant à ce que la Regle a de particulier pour les décimales qu'il faut ſéparer, on peut s'en rendre raiſon de cette maniere. Le produit doit toujours être au multiplicande, comme le multiplicateur eſt à l'unité (24). Donc ſi le multiplicateur exprime des dixiemes de l'unité, par exemple, le produit doit exprimer des dixiemes du multiplicande. Donc ſi le multiplicande exprime des centiemes de l'unité, le produit doit alors donner des milliemes de l'unité. Ainſi $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0,001$. Or il eſt clair que pour avoir ces milliemes d'unité, il faut que le produit ait trois décimales, c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a dans les deux facteurs enſemble.

78. Lorſque le multiplicande a des décimales, & que le multiplicateur eſt 10, ou 100, ou 1000, &c, il ſuffit de retirer la virgule vers la droite, d'autant de rangs qu'il y a de zéros dans le multiplicateur. Ainſi $45,3289 \times 100 = 4532,89 \ldots$. $0,007854 \times 10000 = 78,54 \ldots$. $36,5 \times 1000 = 36500$.

79. Si le multiplicande & le multiplicateur avoient un grand nombre de décimales, l'opération ſeroit fort longue, & donneroit un réſultat beaucoup plus exact qu'on n'en a beſoin communément. Alors on peut ſimplifier le calcul, de cette maniere.

1°. Multipliez tous les chiffres du multiplicande par le premier à gauche du multiplicateur.

2°. Multipliez-les enſuite par le ſecond chiffre à gauche du multiplicateur; mais en écrivant ce produit, ne tenez compte que des dixaines que la multiplication du premier chiffre à droite du multiplicande pourra donner; ajoutez-les au produit de ſon ſecond chiffre; & conſéquemment écrivez-en la ſomme ſous le premier chiffre du produit déja écrit.

3°. Servez-vous du troiſieme chiffre du multiplicateur pour multiplier ceux du multiplicande, à ne commencer qu'au ſecond: encore faudra-t-il ne retenir que les dixaines de ce produit pour les ajouter aux unités du ſuivant. Vous en écrirez la ſomme ſous les deux produits déja écrits.

4°. A meſure que vous avancerez vers la droite du multiplicateur, vous commencerez la multiplication par un chiffre plus avancé vers la gauche du multiplicande, & retrancherez les dixaines de ce premier pro-

duit, vous les ajouterez aux unités du ſuivant, juſqu'à ce que v
ſoyez parvenu au dernier chiffre du multiplicateur.

5°. Ajoutez tous les produits, & dans leur ſomme ſéparez autant
décimales qu'il y en avoit dans le multiplicande, lorſque vous l'av
multiplié par les unités du multiplicateur, ou, ce qui eſt plus généra
voyez quel rang tiennent dans les deux racines, la décimale par l
quelle vous multipliez chaque fois, & celle par laquelle commen
alors la multiplication. La ſomme de ces deux rangs indiquera toujou
le nombre de décimales que doit avoir le produit général.

Trois exemples ſuffiront pour rendre cette méthode familiere.

.....	.....	....
9,34528	2,302585	0,234567
3,44776	0,984977	0,003431
.....	.....	....
2803584	20723266	703701
373811	1842068	93827
37381	92103	7037
6541	20725	234
654	1611	0,000804739
56	161	
32,22027	2,2679932	

Dans le premier, je multiplie d'abord par 3, & j'écris le produit : enſuite par 4, en diſant 4 foit 8 = 32, que je n'écris pas : mais je retiens les trois dixaines pour les ajouter au produit ſuivant. Je dis donc 4 fois 2 = 8, & 3 de retenues font 11. J'écris 1 ſous le 4, & je continue à l'ordinaire.

Puis je multiplie par le ſecond 4, en commençant par le 2 du multiplicande. 4 fois 2 font 8. Je retiens 1, parce 8 approche plus de 10 que de 1, & je dis ; 4 fois 5 font 20, & un de retenu font 21. J'écris 1 dans le même rang que les premiers chiffres des autres produits, &c. &c.

Après avoir fait toutes ces multiplications j'ajoute les produits, & je ſépare cinq décimales, parce qu'il y en avoit cinq au multiplicande, lorſque j'ai multiplié par les 3 unités du multiplicateur ; ou, parce qu'en multipliant par la premiere décimale du multiplicateur, j'ai commencé par la quatrieme du multiplicande.

En faiſant tout au long cette multiplication, on auroit trouvé 32,220282 5728, c'eſt-à-dire, que le produit trouvé par la méthode abrégée, ne differe pas du produit exact, de $\frac{2}{10000}$ d'unité.

Afin de reconnoître à quelles décimales du multiplicando & du multiplicateur on en eſt chaque fois, il eſt à propos de les marquer d'un point à meſure qu'on s'en ſert. Voyez les exemples.

Comme il eſt aiſé de ſe rendre raiſon des différentes parties de

me méthode, nous laiſſons à chercher ces petits détails. Nous obſerverons ſeulement que dans le produit du troiſieme exemple, il faut mettre trois zéros, parce que 3 étant au troiſieme rang des décimales dans le multiplicateur, & 7 au ſixieme du multiplicande, le produit doit avoir 9 décimales.

80. IV. La diviſion des décimales ne differe de celle des nombres entiers, qu'en ce qu'*il faut ſéparer dans le quotient autant de chiffres ſur la droite, qu'il y a de décimales de plus dans le dividende que dans le diviſeur.*

6,9345 | 3	8,445 | 3,22	49,1 | 20,074
6 2,3115	644 2,6	40 148 2,44
0,9	2005	89520
9	1932	80296
,03	73	92240
3		80296
04		11944
3		
15		
15		
0		

Ainſi dans le ſecond exemple on a procédé à la diviſion, comme ſi l'on eût eu 8445 à diviſer par 322. Le quotient s'eſt trouvé 26. Mais parce que le dividende avoit trois décimales, & que le diviſeur n'en avoit que deux, on en a mis une au quotient, en plaçant la virgule avant le 6.

81. Lorſque le diviſeur a plus de décimales que le dividende, (voyez le 3e. exemple) on ajoute autant de zéros que l'on veut au dividende; enſorte cependant que cela rende le nombre de ſes décimales un peu plus grand que celui des décimales du diviſeur, afin d'en avoir quelques-unes au quotient. Ici on eſt cenſé en avoir ajouté quatre

au dividende; car ſi l'on diviſe 49,10000 par 20,074, on trouvera le quotient 2,44.

Si l'on veut avoir égard aux reſtes de ces ſortes de diviſions, il faut leur ajouter de nouveaux zéros, & les quotients qu'on en tirera, en continuant la diviſion par le même diviſeur, ſeront de nouvelles décimales; ainſi dans le ſecond exemple, ajoutant trois zéros au reſte 73, on auroit le quotient 2,6226, avec un autre reſte 228.

82. La Regle pour la diviſion des décimales eſt fondée ſur ce que le quotient doit toujours être à l'unité, comme le dividende eſt au diviſeur. En effet; le quotient doit exprimer des dixiemes de l'unité, par exemple, toutes les fois que le dividende exprime des dixiemes du diviſeur. Or pour exprimer des dixiemes du diviſeur, il faut que le dividende ait une décimale de plus que lui. Il faut donc alors que le quotient ait une décimale, c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviſeur.

Quand il faut diviſer par 10, par 100, ou par 1000 une fraction décimale, il ſuffit d'avancer la virgule d'un, de deux, ou de trois rangs, vers la gauche. Ainſi $\frac{12465}{100} = 1,2465 \ldots \frac{8,34}{1000} = 0,00834$.

83. Lorſque par la méthode ordinaire les diviſions ſeroient trop longues, à cauſe du grand nombre de décimales, on peut en abréger le calcul de la maniere ſuivante.

Je ſuppoſe que l'on veuille vérifier le produit 32,22027 trouvé ci-deſſus, en le diviſant par 9,34528. Après avoir diſpoſé ces deux nombres comme dans la diviſion ordinaire, je demande en 32 combien de fois 9? Je mets 3 au quotient. Enſuite je multiplie tout le diviſeur par 3, & je ſouſtrais le produit du dividende; reſte 418445.

Je diviſe ce reſte, en diſant, combien de fois 9 eſt-il contenu dans 41? Je mets 4 au quotient; & je multiplie le diviſeur par 4; je dis donc 4 fois 8 font 32, que je n'écris pas. Je retiens ſeulement les trois dixaines que j'ajoute au produit ſuivant, comme on l'a vu dans la multiplication. Car ce n'eſt ici que l'opération inverſe.

Souſtrayant de 418443 ce qui provient de cette multiplication, je diviſe le reſte 44632 par le même diviſeur, & je mets au quotient un ſecond 4 par lequel je multiplie le diviſeur, à commencer au 2. Je dis

donc, 4 fois 2 font 8; je retiens 1, que j'ajoute à 20 = 5 × 4; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que j'aye retrouvé 3,44776.

```
                    .....
32,22027 | 9,34528
2803584  | 3,44776
 418443
 373811
 ------
  44632
  37381
  -----
   7251
   6541
   ----
    710
    654
    ---
     56
     56
     --
      0
```

De la transformation & de l'utilité des Décimales.

84. On ſait que les fractions ordinaires peuvent être transformées en une infinité d'autres, qui auroient toutes la même valeur. Les fractions décimales ont le même avantage, d'une maniere encore plus ſimple; car ſoit la fraction 0,4: il eſt clair que ſa valeur ne changera pas tant que ſon numérateur & ſon dénominateur ſeront multipliés par le même nombre; & ſi 10, ou 100, ou 1000, &c. ſert de multiplicateur, il eſt également clair qu'en ajoutant un, ou deux, ou trois zéros ſur la droite du 4, on fera d'un ſeul coup la multiplication du numérateur & du dénominateur (73). Ainſi 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = &c.

85. Il ſuit de-là que *lorſqu'une fraction décimale eſt terminée par des zéros, on peut les ſupprimer tous, ſans altérer ſa valeur.*

Mais ſi on ſupprimoit d'autres chiffres que des zéros, on ſent bien que la fraction diminueroit de valeur: en ſupprimant, par exemple, le chiffre 3, dans la quantité

au dividende; car ſi l'on diviſe 49,10000 par 20,074, on trouvera le quotient 2,44.

Si l'on veut avoir égard aux reſtes de ces ſortes de diviſions, il faut leur ajouter de nouveaux zéros, & les quotients qu'on en tirera, en continuant la diviſion par le même diviſeur, ſeront de nouvelles décimales; ainſi dans le ſecond exemple, ajoutant trois zéros au reſte 73, on auroit le quotient 2,6226, avec un autre reſte 228.

82. La Regle pour la diviſion des décimales eſt fondée ſur ce que le quotient doit toujours être à l'unité, comme le dividende eſt au diviſeur. En effet; le quotient doit exprimer des dixiemes de l'unité, par exemple, toutes les fois que le dividende exprime des dixiemes du diviſeur. Or pour exprimer des dixiemes du diviſeur, il faut que le dividende ait une décimale de plus que lui. Il faut donc alors que le quotient ait une décimale, c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviſeur.

Quand il faut diviſer par 10, par 100, ou par 1000 une fraction décimale, il ſuffit d'avancer la virgule d'un, de deux, ou de trois rangs, vers la gauche. Ainſi $\frac{2465}{100} =$ 1,2465... $\frac{834}{1000} =$ 0,00834.

83. Lorſque par la méthode ordinaire les diviſions ſeroient trop longues, à cauſe du grand nombre de décimales, on peut en abréger le calcul de la maniere ſuivante.

Je ſuppoſe que l'on veuille vérifier le produit 32,72027 trouvé ci-deſſus, en le diviſant par 9,34528. Après avoir diſpoſé ces deux nombres comme dans la diviſion ordinaire, je demande en 32 combien de fois 9? Je mets 3 au quotient. Enſuite je multiplie tout le diviſeur par 3, & je ſouſtrais le produit du dividende; reſte 418445.

Je diviſe ce reſte, en diſant, combien de fois 9 eſt-il contenu dans 41? Je mets 4 au quotient; & je multiplie le diviſeur par 4; je dis donc 4 fois 8 font 32, que je n'écris pas. Je retiens ſeulement les trois dixaines que j'ajoute au produit ſuivant, comme on l'a vu dans la multiplication. Car ce n'eſt ici que l'opération inverſe.

Souſtrayant de 418443 ce qui provient de cette multiplication, je diviſe le reſte 44632 par le même diviſeur, & je mets au quotient un ſecond 4 par lequel je multiplie le diviſeur, à commencer au 2. Je dis

donc, 4 fois 2 font 8; je retiens 1, que j'ajoute à 20 = 5 × 4; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que j'aye retrouvé 3,44776.

```
                    .....
32,22027 | 9,34528
2803584  | 3,44776
---------
 418443
 373811
 ------
  44632
  37381
  -----
   7251
   6541
   ----
    710
    654
    ---
     56
     56
     --
      0
```

De la transformation & de l'utilité des Décimales.

84. On ſait que les fractions ordinaires peuvent être transformées en une infinité d'autres, qui auroient toutes la même valeur. Les fractions décimales ont le même avantage, d'une maniere encore plus ſimple; car ſoit la fraction 0,4: il eſt clair que ſa valeur ne changera pas tant que ſon numérateur & ſon dénominateur ſeront multipliés par le même nombre; & ſi 10, ou 100, ou 1000, &c. ſert de multiplicateur, il eſt également clair qu'en ajoutant un, ou deux, ou trois zéros ſur la droite du 4, on fera d'un ſeul coup la multiplication du numérateur & du dénominateur (73). Ainſi 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = &c.

85. Il ſuit de-là que *lorſqu'une fraction décimale eſt terminée par des zéros, on peut les ſupprimer tous, ſans altérer ſa valeur.*

Mais ſi on ſupprimoit d'autres chiffres que des zéros, on ſent bien que la fraction diminueroit de valeur: en ſupprimant, par exemple, le chiffre 3, dans la quantité

0,683, il ne reſte plus que 0,68, quantité moindre de $\frac{1}{1000}$ que la précédente.

86. Cette diminution eſt d'autant moins ſenſible, que la fraction a plus de chiffres. Ainſi la quantité 0,680003 n'eſt diminuée que de $\frac{1}{1000000}$, lorſqu'on retranche le dernier chiffre 3. On peut donc négliger pluſieurs décimales dans une quantité qui en a beaucoup, ſans diminuer ſenſiblement la valeur de cette quantité.

87. Comme il en réſulte pourtant une petite erreur, on doit la corriger, du moins en partie, quand cela eſt poſſible : & cette correction conſiſte à ajouter une unité au dernier des chiffres conſervés, toutes les fois que le premier ſur la gauche de ceux que l'on retranche ſurpaſſe 5. Si on négligeoit, par exemple, les quatre dernieres décimales de la fraction 0, 12346889, il faudroit écrire 0,1235, & non 0,1234.

La raiſon en eſt que 0,1235 differe moins de la quantité propoſée 0,12346889, que 0,1234. Car la fraction 0,1235 équivaut à 0,12350000, & la fraction 0,1234 = 0,12340000. La quantité propoſée ſe trouve compriſe entre ces deux fractions, mais elle approche davantage de la premiere.

88. En général, ou le premier des chiffres retranchés eſt au-deſſous de 5, ou c'eſt un 5, ou il ſurpaſſe 5. Dans le premier cas, il ne faut rien ajouter au chiffre qui reſte le dernier. Dans le ſecond cas, on peut indifféremment ajouter ou ne pas ajouter une unité à ce dernier chiffre ; mais dans le troiſieme cas, l'erreur ſera toujours moindre, ſi on ajoute cette unité.

Soit, pour exemple, la quantité 9,685243 que je ſuppoſe exprimer des livres & des parties décimales de livre de notre monnoie ; ſi on ne veut retrancher que les trois derniers chiffres 243, qui valent à peine un $\frac{1}{10}$ de denier, on écrira 9,685. Si on veut retrancher les quatre derniers chiffres 5243, dont la valeur n'eſt guere que d'un denier, on écrira indifféremment 9,68 ou 9,69. Mais en ſupprimant les cinq derniers chiffres 85243, qui équivalent environ à 20 deniers = 1ˢ 8ᵈ, il faudra écrire 9,7, au lieu de n'écrire que 9,6 ; en effet le réſultat total de la quantité propoſée étant, à très-peu de choſe près, 9ᵗᵗ 13ˢ 8ᵈ,

on

on en approche davantage en écrivant $9,7 = 9^{tt}\ 14^{f}$, qu'en n'écrivant que $9,6 = 9^{tt}\ 12^{f}$.

89. Dans les calculs ordinaires on a rarement beſoin de plus de ſix décimales : ſouvent même deux ou trois ſuffiſent.

90. Lorſque les premiers chiffres à gauche de deux fractions décimales ne ſont pas les mêmes, il eſt clair que la plus grande eſt celle dont le premier chiffre ſurpaſſe celui de l'autre. Ainſi 0, 8 ſurpaſſe 0, 79 . . . . 0, 54 ſurpaſſe 0,49999 . . . Par la même raiſon, 0, 111 ſurpaſſe 0, 1109999.

91. Et ſi les premiers chiffres d'une fraction décimale ſont les mêmes que ceux d'une autre fraction, la plus grande ſera toujours celle qui aura quelques chiffres de plus, pourvu qu'ils ne ſoient pas tous des zéros. La fraction 0, 76324102, par exemple, eſt plus grande que la fraction 0, 76324.

92. C'eſt de-là que dérive la principale utilité des décimales. Elle conſiſte à approcher de plus en plus de l'égalité avec les différentes expreſſions numériques dont il n'eſt pas poſſible d'avoir rigoureuſement la valeur. Or toutes les parties des Mathématiques offrent une foule d'exemples de ces ſortes d'*approximations :* en voici quelques-uns tirés de la ſimple Arithmétique.

Il eſt bien rare qu'un nombre pris au hazard, ſoit exactement diviſible par un autre nombre pris de même (44). Preſque toujours il y a un reſte que l'on joint au quotient, en forme de fraction. Par exemple, en diviſant 147475 par 362 ; on a trouvé (41) pour quotient 407 avec le reſte 141, dont on a fait la fraction $\frac{141}{362}$ que l'on a ajoutée au quotient. Mais cette fraction eſt incommode, quand il s'agit de l'évaluer ſous cette forme. On a donc imaginé un moyen de transformer ces fractions en d'autres, dont la valeur ſoit la même, ou du moins qui en approchent autant que le Calculateur le juge à propos.

93. Ce moyen ſe réduit à ajouter un zéro à chaque reſte de diviſion, afin de pouvoir continuer de diviſer :

& comme en ajoutant un zéro, ce reſte devient dix fois trop grand, on corrige l'erreur qui en réſulte, en plaçant au rang des dixiemes, le chiffre provenu de cette diviſion ultérieure.

Reprenant donc l'exemple qui précède, j'ajouterois un zéro au reſte 141, & j'aurois 1410 à diviſer par 362. Le quotient ſeroit 3, que j'écrirois au rang des dixiemes; le nouveau reſte ſeroit 324, auquel je pourrois ajouter un zéro, pour en former le nouveau dividende 3240. Je diviſerois ce nombre par le même diviſeur 362, ce qui me donneroit 8 pour quotient, & 344 pour reſte. Le 8 ſeroit mis au rang des centiemes, & l'addition d'un troiſieme zéro me feroit trouver 9 pour le rang des milliemes. Il y auroit encore un reſte 182, que je négligerois, au cas qu'il ſuffît d'avoir trois décimales. Le quotient cherché ſeroit donc $407,389 = 407\frac{141}{362}$, à moins d'un millieme près.

94. Toutes les fractions ordinaires peuvent ſe transformer de même en fractions décimales qui leur ſoient parfaitement égales, ou qui en approchent du moins autant que l'on voudra. $\frac{1}{2}$, par exemple, ſe transforme en 0, 5, dont la valeur eſt exactement la même: mais $\frac{1}{3}$ n'eſt ſuſceptible que d'une approximation infinie, à laquelle on peut procéder ainſi. Ajoutez un zéro au numérateur 1, & diviſez 10 qui en réſulte, par le dénominateur 3. Le quotient le plus approché en nombres entiers, ſera 3, que vous placerez au rang des dixiemes; il reſtera 1, auquel vous ajouterez un zéro, comme ci-deſſus; & vous aurez encore une fois 10 à diviſer par 3. Le quotient ſera donc le même que le précédent, & il eſt clair que cela n'aura jamais de fin. On a donc $\frac{1}{3} = 0,33333$ &c; & par conſéquent $\frac{2}{3} = 0,66666$, &c.

La même méthode fait trouver $\frac{1}{4} = 0,25$; donc $\frac{3}{4} = 0,75$. On trouve auſſi que $\frac{1}{5} = 0,2$; donc $\frac{4}{5} = 0,8$. La fraction $\frac{1}{6}$ ſe transforme en 0, 16666 &c, où l'on voit que le même chiffre revenant toujours, il n'eſt pas poſſible d'avoir exactement en décimales la valeur de $\frac{1}{6}$.

La fraction $\frac{1}{7}$ eſt dans le même cas. On ne peut la mettre en décimales ſans trouver 0, 142857 142857 142857 &c. Or le retour périodique des mêmes chiffres, annonce l'impoſſibilité d'une transformation rigoureuſe. Il eſt vrai que dans les deux derniers exemples on peut pouſſer auſſi loin que l'on veut l'approximation qui en réſulte, dans l'un en écrivant le même chiffre, dans l'autre en répétant la même période, ſans ſe donner la peine de recommencer le calcul.

95. En général, il eſt impoſſible de réduire en décimales une fraction ordinaire, dans deux cas différents. Le premier a lieu toutes les fois que deux diviſions ſucceſſives donnent le même reſte. Le ſecond, lorſque les chiffres du quotient reviennent dans le même ordre.

Il ſuit de-là que le dénominateur fait connoître la limite la plus reculée du retour périodique dont il s'agit. Le dénominateur 7, par exemple, indique qu'en réduiſant $\frac{1}{7}$ en décimales, les chiffres ne peuvent reparoître dans le même ordre, plus tard qu'au ſeptieme rang. On en trouvera aiſément la raiſon, en y réfléchiſſant un peu. Il eſt plus ordinaire cependant qu'ils reviennent, dans des cas ſemblables, avant le rang déſigné par le dénominateur. On peut le vérifier ſur la fraction $\frac{3}{13}$ entre autres.

96. S'il eſt toujours facile de transformer en décimales les fractions ordinaires, on éprouve ſouvent de la difficulté pour ramener les premieres à celles-ci. On opere néanmoins cette réduction d'une maniere bien facile, dans les exemples les plus familiers.

On ſuppoſe que l'on demande en fraction ordinaire la valeur de 0, 3333 &c... Si on multiplie par 10 la quantité donnée, on aura (78) 3,333 &c; & ſi on la ſouſtrait de ce produit, il ne reſtera qu'une quantité neuf fois plus grande que 0, 3333 &c. Ce reſte eſt 3, dont la neuviéme partie eſt $\frac{1}{3}$. On conclura donc que 0, 3333 &c. $= \frac{1}{3}$; comme on le ſait d'ailleurs.

Il en eſt de même de la fraction 0, 142857 142857 &c, qui, multipliée par 10, devient 1, 428 57 142857 &c. Si on retranche de ce produit le triple de la quantité donnée, le reſte ne ſera que ſept fois plus grand que cette quantité. Or le triple de 0, 142857 142857 &c, eſt 0, 428 57 142857 &c. Le reſte ſera donc 1, dont la ſeptieme partie eſt un $\frac{1}{7}$, comme ci-deſſus.

La fraction 0, 125 peut se transformer en $\frac{1}{8}$, par la méthode du plus grand commun diviseur (56). Mais outre qu'il y a beaucoup de fractions décimales qui ne sont pas susceptibles d'une transformation exacte, on voit bien que ce seroit un tâtonnement perpétuel, s'il n'y avoit pas d'autres méthodes.

De quelques autres fractions.

97. L'espece des fractions est toujours relative à l'unité dont elles font partie ; & comme dans les Sciences, dans les Arts, dans la Société même, on emploie différentes sortes d'unités, il est à propos de rappeler ici les noms qu'on a donnés à leurs fractions les plus usitées.

I. Le besoin très-fréquent d'un grand nombre de divisions du cercle, détermina les anciens Géometres à supposer que tous les cercles étoient composés de 360 parties égales, généralement connues sous le nom de *Degrés*. (On préféra le nombre 360 à tous les autres nombres inférieurs, parce qu'il a plus de diviseurs exacts; & on le préféra à tous les nombres supérieurs, pour éviter l'embarras d'une plus grande quantité de chiffres). Chaque degré est donc $\frac{1}{360}$ de la circonférence du cercle auquel il appartient.

Mais comme on a souvent besoin aussi de différentes parties du degré, on a imaginé de le considérer à son tour comme une unité formée de l'assemblage de 60 parties égales, appellées des *Minutes*. Chaque minute est donc $\frac{1}{60}$ de degré, & par conséquent $\frac{1}{21600}$ de cercle.

Pour mettre encore plus de précision dans la mesure des arcs circulaires, on a sous-divisé les minutes en 60 *Secondes* chacune; les secondes ont été sous-divisées en 60 *Tierces*; les tierces en 60 *Quartes*, & ainsi de suite. Il y a donc 1296000 secondes dans chaque circonférence de cercle, & par conséquent 77760000 tierces. Chaque degré est de 3600 secondes, & de 216000 tierces.

On a cherché à abréger le discours, en marquant les diverses parties du cercle par des signes particuliers: de maniere qu'au lieu d'écrire tout au long 18 degrés, 34

minutes, 53 secondes, 26 tierces, on n'écrit simplement que $18° 34' 53'' 26'''$.

II. La division du Temps en *jours* est aussi ancienne que le monde; chaque lever du Soleil faisoit une époque trop brillante dans la Nature, pour que les premiers hommes n'en tirassent pas une mesure du temps.

Mais les divers travaux de la journée exigeant des sous-divisions de cette mesure, on imagina de partager le jour en plusieurs parties égales. Le nombre de ces parties étant arbitraire, on choisit le nombre 24, duquel on forma les 24 *Heures* du jour.

La durée d'une heure a été sous-divisée en 60 minutes, celle d'une minute en 60 secondes, & ainsi de suite, le jour est donc de $1440' = 86400'' = 5184000'''$, & la minute $= 3600''$. Mais ces sous-divisions sont de beaucoup postérieures à la premiere; parce qu'il falloit, avant d'en pouvoir faire usage, trouver le moyen de mesurer d'aussi petites parties du temps, & on sait que l'Horlogerie est un Art assez récent.

III. Pour mesurer les distances, il a fallu se servir d'une unité quelconque, dont la longueur fût connue, & la porter successivement d'un bout à l'autre de chaque distance à mesurer. Rien dans le monde ne fixant cette unité, chaque Peuple en a pris une à sa fantaisie. La plus usitée parmi nous est la toise.

Or la Toise se divise en six parties égales, que l'on nomme *Pieds;* le pied se divise en 12 *Pouces;* le pouce en 12 *Lignes*, & la ligne en 12 *Points*. De sorte que le pied est $\frac{1}{6}$ de la toise, que le pouce en est $\frac{1}{72}$, que la ligne en est $\frac{1}{864}$, &c.

Les besoins de la Société & du Commerce n'eurent pas plutôt introduit l'usage des Poids & des Monnoies, que chaque Nation, & presque chaque Ville voulut avoir les siens. De-là cette diversité vétilleuse dans la maniere de peser & de compter, chez les différents Peuples.

Comme il falloit cependant établir une unité de poids & une unité de monnoie pour base de ces deux opérations,

chaque pays en choiſit une. La nôtre s'appelle *la Livre ;* & nous en diſtinguons de deux eſpeces, *la Livre Poids* & *la Livre Monnoie.*

IV. La premiere ſe diviſe en 16 parties égales, appellées des *Onces ;* chaque once contient 8 *Gros ;* le gros contient 72 *Grains.* Une livre peſe donc 128 gros, ou 9216 grains. On emploie aſſez ſouvent une autre fraction de la livre, qui en eſt la moitié, & on la nomme le *Marc ;* le marc ne contient donc que 8 onces.

V. L'autre eſpece de livre ſe diviſe en *Sous :* elle en contient 20. C'eſt une meſure fictive, puiſque nous n'avons point de piece de monnoie qui vaille 20 ſous. Le ſou contient 12 *Deniers.* Ainſi il y a 240 deniers dans chaque livre. Tout le reſte de notre monnoie ſe rapporte à ces trois ſortes ; livres, ſous & deniers.

98. Cela poſé, appliquons les premieres regles de l'Arithmétique à ces différentes grandeurs ; & d'abord propoſons-nous d'en ajouter pluſieurs enſemble. Pour cet effet, on commence par écrire les unes ſous les autres les parties qui ont une même dénomination : puis on prend ſucceſſivement la ſomme de chaque colonne, en allant de droite à gauche, & on poſe à chaque fois ce qui reſte, quand on en a ôté, s'il y a lieu, de quoi former une ou pluſieurs unités, que l'on ajoute à la colonne ſuivante. Quelques exemples ſuffiront pour l'intelligence d'une regle auſſi élémentaire.

36^a	25^l	$47''$	3^j	17^h	42^l	16^u
49	33	28	9	13	25	33
55	31	49	11	23	17	42
141	31	4	25	6	25	31

toiſes.	pieds.	pouces.	lignes.
9	3	11	2
100	0	0	0
47	5	3	8
11	0	10	8
168	4	1	6

℔	onces.	gros.	grains.	livres.	ſous.	den.
10	15	7	70	325	17	4
9	10	4	18	15	11	6
47	3	6	40	25	1	8
	13	0	55	4	10	0
68	11	3	39	371	0	6

99. La ſouſtraction de ces ſortes de quantités s'opere avec la même facilité que leur addition. Après les avoir écrites l'une ſous l'autre, on ſouſtrait ſucceſſivement toutes les parties de l'une des parties correſpondantes de l'autre; & ſi par hazard quelques-unes des premieres ſurpaſſent celles qui leur correſpondent, on détache une unité de la colonne ſuivante dans le nombre ſupérieur, pour la décompoſer en unités du genre de celles que l'on veut ſouſtraire. Le reſte s'entend aſſez par les exemples ſuivants.

48°	16′	17″		19ʲ	14ʰ	19′	40″
25	3	12		3	11	43	30
23	13	5		16	2	36	10

17ʲ	11ʰ	47′	5″
13	18	55	40
3	16	51	25

toiſes.	pieds.	pouces.	lignes.
100	0	0	0
17	4	5	11
82	1	6	1

℔	onces.	gros.	grains.	livres.	sous.	deniers.
47	10	2	55	655	3	4
12	12	5	12	30	0	0
34	13	5	43	625	3	4

100. Quoique la multiplication & la diviſion de toutes ces quantités, à l'exception de celles qui ont rapport au Toiſé, n'ayent preſque jamais lieu dans les Mathématiques, il eſt à propos cependant de parler ici de ces deux regles, à cauſe du fréquent uſage que l'on en fait dans la Société.

On voudroit ſavoir, par exemple, le prix de 34 Aunes $\frac{1}{4}$ d'une étoffe qui coûteroit 6℔ 12ſ 6d l'Aune ?

Il eſt clair 1°, que 34 Aunes, à raiſon de 6℔ chacune, doivent coûter 204℔.

2°. Qu'à raiſon de 2ſ qui ſont la dixieme partie de la livre, elles doivent coûter 3℔ 8ſ. Donc à raiſon de 12ſ, leur prix doit être de 20℔ 8ſ. Ainſi nous avons déja. . . . . 224℔ 8ſ

3°. Puiſqu'à 2ſ chacune, 34 Aunes coûteroient 3℔ 8ſ, elles ne doivent coûter, à raiſon de 6d, (quart de 2ſ,) que 17ſ

Donc en réuniſſant ces valeurs, on auroit le prix de 34 Aunes, à 6℔ 12ſ 6d l'Aune. Mais comme il y a $\frac{1}{4}$ d'Aune de plus, il faut en ajouter le prix à celui que nous avons déja trouvé.

Or 4°, ces $\frac{1}{4}$ égalant $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, il eſt évident que la demi-Aune doit coûter . . . 3 6 3d

Le quart d'Aune vaut donc . . . . . 1 13 $1\frac{1}{2}$

Ainſi la ſomme totale eſt . . . . . 230℔ 4ſ $4\frac{1}{2}$d

Chaque opération dans cette regle porte ſa preuve. Deux autres exemples ſuffiront pour la rendre facile. Soit propoſé d'abord de trouver le prix de $42^{T}\ 5^{Pl}\ 9^{Po}$, à raiſon de 12℔ 19ſ 8d la toiſe.

Soit proposé ensuite de déterminer la valeur de $36^{m}\ 6^{on}\ 4^{Gros}$ d'Argent, à $51^{\#}\ 15^{f}\ 9^{d}$ le Marc.

	$12^{\#}$	19^{f}	8^{d}		
	42^{r}	5^{Pi}	9^{Po}		
	24			} pour 42^{r} à	$12^{\#}$
	48			}	
42^{r} à 2^{f}	37	16 . .		à	18^{f}
valent $4^{\#}\ 4^{f}$	2	2 . .		à	1^{f}
	1	1 . .		à	6^{d}
		7 . .		à	2^{d}
Le pied	10	16	$4\frac{2}{3}$	prix de	5^{Pi}
vaut $2^{\#}\ 3^{f}\ 3\frac{1}{3}^{d}$	1	1	$7\frac{2}{3}$	de	6^{Po}
		10	$9\frac{5}{6}$	de	3^{Po}
	$57^{\#}$	14^{f}	$10\frac{1}{6}^{d}$		

	$51^{\#}$	15^{f}	9^{d}		
	36^{m}	6^{on}	4^{Gros}		
	306			} pour 36^{m} à	$51^{\#}$
	153			}	
	18			à	10^{f}
	9			à	5^{f}
		18^{f} . .		à	6^{d}
		9 . .		à	3^{d}
Une once vaut	38	16	$9\frac{3}{4}$	prix de	6^{on}
$6^{\#}\ 9^{f}\ 5\frac{1}{8}^{d}$	3	4	$8\frac{13}{16}$	de	4^{Gros}
	$1906^{\#}$	8^{f}	$6\frac{9}{16}^{d}$		

101. Remarquez en passant, que pour prendre le dixieme d'un nombre de livres, il n'y a qu'à doubler le chiffre des unités, & le regarder ensuite comme exprimant des sous. Les chiffres qui resteront à gauche, exprimeront des livres. Ainsi $\frac{12^{\#}}{10} = 1^{\#}\ 4^{f}$ .... $\frac{347^{\#}}{10} = 34^{\#}\ 14^{f}$, &c. La raison en est évidente.

Ceux qui dans des moments de loisir voudront s'assurer s'ils possèdent bien la pratique de cette regle, pourront s'exercer sur les trois exemples suivants, dont les résultats se trouvent sous les lettres X^{l}, Y^{l}, Z^{l}.

I. La livre de Tabac coûte $3^{tt}\ 4^{s}$. Que coûteront donc 19 livres 13 onces de Tabac?

II. Si la *Toise courante* d'un mur coûte $37^{tt}\ 4^{s}$, combien coûteront $9^{te}\ 5^{pi}\ 11^{po}$ de ce mur?

III. On est convenu de payer un cercle gradué en degrés, minutes & secondes, à raison de $7^{tt}\ 8^{s}$ par degré. L'Ouvrier chargé de cette graduation a déja divisé $258°\ 48'\ 12''$. Que faut-il lui donner pour son travail?

102. Au lieu de la méthode que nous venons d'employer pour ces sortes de multiplications, on peut transformer le multiplicande & le multiplicateur en parties de la plus petite espece dont il soit fait mention dans l'exemple que l'on veut calculer. Ces parties n'étant que des fractions, les deux produisants auront donc une forme fractionaire; ainsi leur produit se trouvera par la regle de la multiplication des fractions (63).

Exemple. On a vu ce que 34 Aunes $\frac{3}{4}$ d'étoffe coûteroient, à raison de $6^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$ l'Aune. Si on vouloit le vérifier par cette autre méthode, on transformeroit d'abord 34 Aunes $\frac{3}{4}$ en $\frac{139}{4}$. On transformeroit de même $6^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$ en $\frac{1590}{240} = \frac{159}{24}$ de livre. Puis on multiplieroit les deux numérateurs l'un par l'autre, & on diviseroit leur produit par celui des deux dénominateurs. Il en résulteroit une fraction qui, étant réduite à sa plus simple expression, feroit connoître le prix cherché. Ainsi dans le cas présent, on auroit $\frac{139}{4} \cdot \frac{159^{tt}}{24} = \frac{22101^{tt}}{96} = 230^{tt}\ 4^{s}\ 4^{d}\ \frac{1}{2}$, comme nous l'avions déja trouvé.

103. Quant à la division de ces quantités, elle n'a point de difficulté dans le cas où le diviseur ne contient qu'une seule espece de grandeur. Supposons, par exemple, qu'un Ouvrier ait reçu $151^{tt}\ 14^{s}\ 6^{d}$ pour 42 jours de travail, & que l'on veuille savoir ce qu'il gagnoit par jour.

On divisera d'abord 151 par 42. Le quotient sera 3, le produit 126, & le reste 25; réduisant ce reste de livres en sous, on en aura 500, qui, avec les 14 du dividende, formeront le second membre de division, & ainsi des autres. Le quotient cherché sera donc $3^{tt}\ 12^{s}\ 3^{d}$.

Mais s'il entre dans le diviseur des quantités de diffé-

rente eſpece, alors il faut le transformer en parties de la plus petite eſpece de celles qu'il contient dans l'exemple propoſé ; & après avoir transformé de même le dividende, il faut le diviſer ſuivant la regle de la diviſion des fractions (67).

Appliquons cette méthode à la recherche du prix de la Toiſe, dans la ſuppoſition que $42^{t}\ 5^{pi}\ 9^{po}$ ayent coûté $557^{\#}\ 14^{f}\ 10\frac{1}{6}{}^{d}$.

$$557^{\#} = 133680^{d}$$
$$14^{f} = 168^{d}$$
$$10\frac{1}{6}$$

$557^{\#}\ 14^{f}\ 10\frac{1}{6}{}^{d} = 133858\frac{1}{6}{}^{d} = \frac{803149}{6}$ de denier $= \frac{803149}{1440}$ de livre.

Voilà le dividende mis ſous une forme fractionaire : paſſons au diviſeur.

Ses plus petites parties ſont des pouces : ainſi on aura, toute transformation faite, $42^{t}\ 5^{pi}\ 9^{po} = 3095^{po} = \frac{3093}{72}$ de toiſe $= \frac{1031}{24}{}^{t}$. Diviſant donc $\frac{803149}{1440}{}^{\#}$ par $\frac{1031}{24}$, on trouvera $\frac{19275576}{1484640}{}^{\#} = 12^{\#}\ 19^{f}\ 8^{d}$, comme ci-deſſus.

Telles ſont les premieres regles de l'Arithmétique. Pour traiter les autres d'une maniere plus générale, il eſt à propos d'expoſer auparavant les principes du Calcul Algébrique.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

104. L'ALGÈBRE eſt une eſpece d'Arithmétique univerſelle, dont les principaux avantages ſont 1°, de démontrer d'une maniere tout-à-fait générale, ce que l'Arithmétique ordinaire ne démontre que pour des cas particuliers.

2°, De mener rapidement à des réſultats qu'il eſt rare d'obtenir par l'Arithmétique, ſans de longs tâtonnements.

3°, D'exprimer avec un laconiſme ſingulier, ces mêmes réſultats que l'Arithmétique n'exprime ordinairement qu'avec beaucoup de paroles.

4°, De réſoudre une infinité de Problêmes, à la ſolution deſquels la Science des Nombres ne ſauroit guere atteindre.

5°, De fournir à l'Arithmétique même, dans des opérations compliquées, beaucoup de reſſources qui facilitent le calcul, en ſimplifiant le travail.

Ces avantages vont être rendus ſenſibles dans le Traité ſuivant.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

105. Les chiffres ont une valeur déterminée par la convention générale des Peuples qui les emploient. Ainſi quoique le chiffre 3, par exemple, puiſſe auſſi bien ſignifier 3 pouces, que 3 toiſes, que 3 lieues, que 3 heures &c, on n'eſt plus à temps de lui en faire ſignifier cent ou mille, &c. Les chiffres ne ſont donc point des ſignes propres à repréſenter indiſtinctement toutes les quantités poſſibles; & en conſéquence on a imaginé de leur ſubſtituer d'autres ſignes, dont la valeur n'étant fixée par

aucune eſpece de convention, pût ſucceſſivement varier au gré du Calculateur qui voudroit en faire uſage.

Ces ſignes étoient tout trouvés dans les lettres de l'Alphabet. Chacun les connoît dès l'enfance, & par leur généralité ils ſont ſuſceptibles de toutes les valeurs qu'on juge à propos de leur donner : bien entendu cependant que ſi en commençant un calcul, on donne telle ou telle valeur aux lettres que l'on emploie, ces lettres conſervent juſqu'à la fin de l'opération, les valeurs reſpectives qui leur ont été attribuées.

106. Cela poſé, on appelle *Quantité* ou *expreſſion Algébrique*, tout ce qui eſt déſigné par des lettres de l'Alphabet.

On eſt convenu de repréſenter par certains autres ſignes les diverſes opérations que l'on peut faire ſur ces quantités. Par exemple, pour ajouter a avec b, on écrit $a+b$ (15). Pour marquer que c eſt ſouſtrait de d, on écrit $d-c$ (17).

La multiplication à faire de b par c, s'indique de la maniere ſuivante..... $b \times c$ ou $b \,.\, c$. Mais la multiplication eſt cenſée faite, toutes les fois qu'une lettre eſt ſuivie d'une autre ou de pluſieurs autres, ſans la moindre interruption cauſée par des ſignes. Ainſi xy ſignifie que la quantité x, quelle qu'elle ſoit, a été multipliée par une autre quantité quelconque y..... abc ſignifie le produit des trois quantités a, b, & c.

La diviſion de deux quantités algébriques ſe marque comme celle des nombres. Ainſi pour marquer que a doit être diviſé par b, on écrit $\frac{a}{b}$ ou $a : b$. Pour marquer que xy doit être diviſé par abc, on écrit $\frac{xy}{abc}$, ou $xy : abc$.

107. On appelle *Monome* toute quantité iſolée, qui n'eſt ni précédée ni ſuivie d'aucune autre quantité dont elle ſoit ſéparée par le ſigne $+$ ou par le ſigne $-$. Voici

donc autant de *monomes* ; $a, b\,c\,d, m.n, \frac{\pi}{\varphi}, \frac{\alpha}{\beta}$; &c.

On appelle *Binome*, toute quantité qui a deux *Termes*, & par Terme on entend toute expreſſion ſéparée d'une autre par un des deux ſignes + ou —. De maniere que $a+b$ eſt un binome, ainſi que $fg-sut.....1+x$ en eſt un auſſi ; &c.

Par *Trinome*, on entend une quantité compoſée de trois termes ; en général celle qui en contient pluſieurs s'appelle *Polynome*.

108. On diſtingue deux ſortes de termes, les termes *Poſitifs* & les termes *Négatifs*. Ceux-ci ſont toujours précédés du ſigne —; les autres ſont tous précédés du ſigne +. Dans la quantité $+p-q-rr+x-y$, il y a deux termes poſitifs, & trois termes négatifs.

Quand le premier terme d'une quantité algébrique eſt poſitif, on néglige de l'affecter du ſigne +, parce qu'on eſt convenu de le regarder comme poſitif, toutes les fois qu'il n'eſt précédé d'aucun ſigne.

109. On a ſouvent les mêmes termes à écrire dans une même quantité : par exemple, $a+a+a-b-b+d$. Mais au lieu de les répéter ainſi, on a imaginé de ne les écrire qu'une fois chacun, en marquant par un chiffre qui les précède vers la gauche, combien de fois ils doivent être ajoutés ou ſouſtraits. Par exemple, $3a-2b+d$ eſt l'expreſſion abrégée de la quantité précédente. On appelle *Coefficients* ces chiffres reſpectifs dont chaque terme eſt affecté.

Lorſqu'un terme n'a point de coefficient marqué, il eſt cenſé avoir l'unité pour coefficient. C'eſt ainſi que dans l'exemple précédent, la lettre d eſt une expreſſion abrégée de $1d$; pareillement $fh-pq=1fh-1pq$; c'eſt à-dire, que ces ſortes de quantités ne doivent être priſes qu'une ſeule fois, ſoit en + ſoit en —.

110. Il arrive très-fréquemment qu'une quantité eſt multipliée par elle-même, & alors on l'écrit deux fois

le ſuite, ſans interruption de ſigne. Ainſi $a\,a$ marque le roduit de la quantité a par elle-même : $a\,a\,a$ marque pareillement le produit de la quantité $a\,a$ par a, & $a\,a\,a\,a$ dique le produit de $a\,a\,a$ par a. Pour abréger ces expreſſions, on eſt convenu de déſigner le nombre de fois u'une quantité doit être écrite de ſuite, par un chiffre is à la droite & un peu au-deſſus de la quantité. Ainſi a^2 eſt une expreſſion abrégée de $a\,a$, & a^3, a^4 tiennent lieu de $a\,a\,a$, $a\,a\,a\,a$.

Ces chiffres s'appellent des *Expoſants*. Leur fonction, comme on vient de le voir, eſt d'indiquer la multiplication plus ou moins réitérée d'une quantité par elle-même, tandis que la fonction des coefficients eſt de marquer l'addition répétée d'une même quantité. $3\,a$, ſignifie donc $a + a + a$, au lieu que $a^3 = a.a.a$; en ſorte que ſi on ſuppoſe $a = 5$, on aura $3\,a = 15$, pendant que $a^3 = 125$. Il y a donc une grande différence entre les expoſants & les coefficients, & il faut bien ſe garder de confondre les uns avec les autres.

111. Chaque lettre a ſon expoſant particulier; mais quand cet expoſant eſt l'unité, on eſt convenu de le ſous-entendre. Ainſi $b\,c$ eſt la même choſe que $b^1\,c^1$, & $x\,x\,x\,y\,y\,z = x^3\,y^2\,z^1 = x^3\,y^2\,z$.

112. On ne doit jamais réunir ſous un même coefficient que des termes abſolument ſemblables. Or *par termes ſemblables, on entend ceux qui ſont formés des mêmes lettres affectées reſpectivement des mêmes expoſants dans chacun de ces termes, quels que ſoient d'ailleurs leurs ſignes & leurs coefficients.*

Exemple. $a + 3\,a + 4\,a$ ſont trois termes ſemblables, c'eſt la même quantité a, qui eſt priſe d'abord une ſeule fois, puis trois fois, enſuite quatre autres fois. On peut donc réunir le tout ſous un ſeul coefficient, & écrire $8\,a$: & ſi on eût eu $-a - 3\,a - 4\,a$, on eût pu réduire le tout à $-8\,a$.

Si au lieu de $+3\,a$ on avoit $-3\,a$, alors ce ſeroit bien la même quantité a priſe trois fois, mais en ſens contraire,

c'eſt-à-dire, ſouſtraite trois fois. Réuniſſant donc les deux quantités poſitives $a + 4a = 5a$, on en auroit ſouſtrai $3a$, & le reſte eût été $2a$. Cette opération qu'il ne faut pas manquer de faire, quand il y a lieu, s'appelle *Réduction*. Elle eſt auſſi facile que fréquente.

Si on eût eu $a + 3a - 4a$, alors les quantités poſitives étant égales aux négatives, le réſultat eût été zéro. D'où on peut déduire la regle ſuivante.

113. *Toutes les fois qu'il y a des termes ſemblables dans une expreſſion algébrique, il faut les réduire à un ſeul terme, ou les effacer s'ils ſe détruiſent.*

On les efface, quand avec des coefficients égaux, ils ont des ſignes contraires. C'eſt ainſi que la quantité $2a + b - 2a - b$ ſe réduit à 0.

On les réduit à un ſeul terme, 1°, quand ils ſont affectés du même ſigne. Alors on ajoute leurs coefficients, & la ſomme ſert de coefficient au nouveau terme. C'eſt ainſi que nous avons réduit $a + 3a + 4a$, au terme $8a$, & que nous réduirions $\gamma s - \omega + 5\gamma s$ à $6\gamma s - \omega$; comme auſſi $f^2 - 3x + 4f^2 - 8x$ ſe réduiroit à $5f^2 - 11x$.

2°. La réduction à un ſeul terme a lieu auſſi, quand les termes ſemblables ſont affectés de ſignes contraires & de coefficients inégaux. Alors on ſouſtrait le petit coefficient du grand, & le reſte ſert de coefficient au nouveau terme, précédé du même ſigne que le grand. C'eſt en ſuivant ce procédé, que l'expreſſion $12m - 5n^2 - 8m + 4nn$ ſe réduit à $4m - n^2$; & que $\frac{1}{4}\pi + 2\phi - \frac{1}{4}\pi - 15\phi$ ſe réduit à $\frac{1}{2}\pi - 13\phi$.

114. Puiſque la ſimilitude des termes exige les deux conditions indiquées, ſavoir 1°, qu'ils ſoient compoſés préciſément des mêmes lettres; 2°, que chacune de ces lettres ait un même expoſant reſpectif dans tous ces termes, on ne doit jamais être embarraſſé pour prononcer ſur leur ſimilitude ou leur diſſimilitude. On jugera donc, du premier coup d'œil, quels ſont les termes ſemblables dans

dans les exemples suivants, & on les réduira sans peine.

I. $3x - 2xy - 3z + 2x - 32xy + 3z \ldots A''$

II. $\frac{2}{5}a - \frac{4a}{7b} - 6a + \frac{7}{4}a + \frac{a}{b} - u^2 \ldots\ldots B''$

III. $352\alpha\beta - \theta\omega^2 + \varphi - 57\alpha\beta + \theta\omega^2 \ldots\ldots C''$

Parmi les exemples des termes dissemblables, nous ne rapporterons que ceux-ci.

I. $ab - 30c + 4\gamma$

II. $x^2y - xy - xy^2$

III. $8\varphi^3 + 5\varphi^2 - \gamma\varphi^3$

115. C'est plutôt un usage qu'une regle dans les calculs algébriques, de faire garder aux lettres de chaque terme leur ordre alphabétique. Ainsi au lieu d'écrire cba, ou bca, ou bac, on écrit abc : au lieu d'écrire $\pi\gamma$, on écrit $\chi\pi$. Encore est-ce un usage dont il ne faut point être esclave : il contribue seulement à faire mieux discerner les termes semblables. On va voir maintenant avec quelle facilité toutes les premieres regles de l'Algèbre s'exécutent.

De l'Addition algébrique.

116. Pour ajouter des quantités algébriques, il suffit de les écrire les unes après les autres avec les signes qu'elles ont, & de faire ensuite les réductions convenables, s'il y a lieu.

Ainsi on ajoute cdn avec $4m^2$ en écrivant $cdn + 4m^2$. Pour ajouter $xy + z^3$ avec $u - t - z^3$, on écrit $xy + u - t$. La somme de b, de d & de $-f$ est $b + d - f$. Celle de $2m + 3n - q$ & de $q - 3n - 2m$ est zéro.

117. Et si l'on a des fractions algébriques à ajouter avec des quantités entieres ou fractionaires, on suivra les regles déja pref-

crites pour réduire au même dénominateur les fractions numériques. Par exemple, $\frac{a}{m}+1=\frac{a+m}{m}$ .... $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

De la Souſtraction algébrique.

118. POUR ſouſtraire une quantité A, d'une autre quantité B, on change tous les ſignes de la quantité A, & on l'écrit enſuite à côté de la quantité B: après quoi, s'il y a des réductions à faire, on les fait.

Exemples. On veut ſouſtraire g de c; on écrit $c-g$.

On veut ſouſtraire m^3+n^4 de x^3z-u^2: on écrit $x^3z-u^2-m^3-n^4$.

Veut-on ſouſtraire a^2b-4c de $5a^2b-4c$? on écrira $4a^2b$.

119. Ce changement de ſignes dans la quantité que l'on ſouſtrait, ne laiſſe aucun nuage, quand il s'agit de changer les $+$ en $-$. Car tout le monde conçoit du premier abord, que pour indiquer la ſouſtraction d'une quantité poſitive quelconque p, il faut lui donner la forme négative $-p$. Mais ce que l'on ne conçoit pas auſſi facilement, c'eſt que pour indiquer la ſouſtraction d'une quantité négative $-a$, il faille écrire $+a$.

Cependant les Inventeurs de cette regle n'avoient que deux partis à prendre, lorſqu'ils eurent des quantités négatives à ſouſtraire. Le premier parti étoit de laiſſer ces quantités ſous une forme négative: le ſecond, de leur donner une forme poſitive, en changeant leur ſigne $-$ en $+$. S'ils balancerent entre ces deux partis, une réflexion bien ſimple dut mettre fin à leurs doutes; voici cette réflexion.

120. Le but d'une ſouſtraction quelconque eſt de faire connoître la différence qu'il y a entre la quantité ſouſtraite, & celle dont on a dû la ſouſtraire. Cette différence eſt toujours marquée par le reſte de la ſouſtraction. Et comme on ſait d'ailleurs (22) que ce reſte doit toujours être tel, qu'en le réuniſſant à la quantité ſouſtraite,

on retrouve celle dont on a soustrait, les Inventeurs ne tardèrent sûrement pas à reconnoître qu'on ne pouvoit retrouver cette quantité qu'en changeant tous les signes de la quantité à soustraire. De-là ils conclurent généralement qu'il falloit toujours changer en — les signes +, & en + les signes — des termes à soustraire.

Nous avons, par exemple, écrit $c - g$ pour marquer que g étoit soustrait de c. Le reste de cette soustraction est donc exprimé généralement par $c - g$, & la preuve que ce reste est le seul véritable, quelles que soient les valeurs de c & de g, c'est qu'en le réunissant avec la quantité soustraite g, on a $c - g + g$, qui se réduit à c, comme cela doit être.

Il en a été de même, lorsque soustrayant $a^2b - 4c$ de $5a^2b - 4c$, nous avons trouvé pour reste, $4a^2b$. Ce reste, en effet, ajouté à $a^2b - 4c$, reproduit toute la quantité primitive $5a^2b - 4c$.

De la Multiplication algébrique.

121. Tout terme algébrique peut être regardé comme composé de quatre parties. La premiere est le signe qui le précède. La seconde est le coefficient dont ce terme est affecté. La troisieme est formée des lettres qu'il renferme. Les exposants respectifs de ces lettres forment la quatrieme partie. Or la multiplication de deux termes algébriques, l'un par l'autre, exige des regles particulieres pour ces quatre objets.

122. Regle pour les signes. Lorsque le multiplicande & le multiplicateur ont tous deux le même signe, soit + soit —, le produit doit toujours être affecté du signe +. Ainsi $a \times b = ab$ . . . . $-a \times -b$ donne pareillement ab (& non $-ab$).

Mais si le multiplicande & le multiplicateur ont des signes différents, le produit doit toujours être affecté du signe —. Ainsi $a \times -b$, ou $-a \times b$ donne également $-ab$

pour produit. Nous démontrerons cette regle, après avoir indiqué les trois autres.

123. Regle des coefficients. Multipliez l'un par l'autre, comme dans l'Arithmétique, les coefficients des deux facteurs, & faites servir leur produit de coefficient au produit algébrique. $3a \times 9b = 27ab$ .... $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}cp$.

124. Regle des lettres. On eſt convenu (106) que toutes les fois que deux ou pluſieurs lettres ſeroient écrites de ſuite, c'eſt-à-dire, ſans aucun ſigne + ou —, intermédiaire, cela ſignifieroit le produit des quantités déſignées par ces lettres. Ainſi pour multiplier $12x$ par $5y$, écrivez $60xy$, & pour multiplier $60xy$ par $3az$, écrivez $180axyz$.

125. Regle des expoſants. Lorſqu'une lettre affectée d'un expoſant quelconque doit être multipliée par cette même lettre, affectée d'un autre expoſant ou d'un expoſant égal au premier, il ne faut écrire qu'une ſeule fois cette lettre au produit, mais avec un expoſant égal à la ſomme des deux expoſants primitifs.

Exemple. $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32a^7b^4$. Cette regle n'eſt qu'un cas particulier & abrégé de la troiſieme : puiſque ſi on écrivoit tout au long $8aabbb \times 4aaaaab = 32aaaaaaabbbb$, on auroit évidemment (116) le même produit $32a^7b^4$.

126. Juſqu'ici nous n'avons parlé que de la multiplication des monômes. Celle des polynomes ſe fait à peu-près comme la multiplication des nombres compoſés.

D'abord on multiplie tous les termes du multiplicande par un des termes du multiplicateur, n'importe par lequel on commence. Puis on les multiplie ſucceſſivement par tous les autres termes du multiplicateur : & enfin ſi en prenant la ſomme de tous ces produits particuliers, on trouve quelque réduction à faire, on la fait.

Soit propoſé pour exemple de multiplier la quantité $a + 3c - d$ par $2a - d$, ... je diſpoſe ces termes

comme vous le voyez ici, ...

$$\begin{array}{r} a+3c-d \\ 2a-d \\ \hline 2aa+6ac-2ad \\ -ad-3cd+dd \\ \hline \text{Red. } 2aa+6ac-3ad-3cd+dd \end{array}$$

& je multiplie d'abord a par $2a$, le produit eſt $2aa$; enſuite $+3c$ par $2a$, le produit eſt $+6ac$; puis $-d$ par $2a$, le produit eſt $-2ad$. Je paſſe au ſecond terme du multiplicateur, & je multiplie a par $-d$, le produit eſt $-ad$; je multiplie $+3c$ par $-d$, le produit eſt $-3cd$; enfin je multiplie $-d$ par $-d$, le produit eſt $+dd$; j'ajoute tous ces produits enſemble, & réduction faite, je trouve pour produit total .... $2aa+6ac-3ad-3cd+dd$.

Autres exemples.

$$\begin{array}{r} a+x \\ a-x \\ \hline a^2+ax \\ -ax-xx \\ \hline a^2-x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a-2b \\ 2a+b \\ \hline 4aa-4ab \\ +2ab-2bb \\ \hline 4aa-2ab-2bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa+2ac-bc \\ a-b \\ \hline a^3+2aac-abc \\ -aab-2abc+bbc \\ \hline a^3-aab+2aac-3abc+bbc \end{array}$$

Les fractions algébriques ſe multiplient comme les fractions numériques .... $\frac{x}{y} \times \frac{u}{t} = \frac{ux}{yt}$ ... $\frac{c}{d} \times \frac{m+n}{p+q} = \frac{cm+cn}{dp+dq}$ ... $\frac{a+b}{1-x} \times \frac{a-b}{1+x} = \frac{a^2-b^2}{1-x^2}$.

mot *multiplié*, lequel n'ayant été mis en usage dans l'Arithmétique, que pour signifier des additions répétées d'une même quantité positive, doit naturellement offrir un sens louche, quand on le fait servir pour marquer une véritable soustraction de quantités négatives. Or c'est ce que l'on fait, en disant, par exemple, que $-a \times -b = +ab$.

De la Division algébrique.

129. QUAND on veut diviser une quantité algébrique par une autre, on les met ordinairement en fraction. Ainsi pour diviser $2bc$ par mn, on écrit $\frac{2bc}{mn}$; & parce que le numérateur de cette fraction n'a rien de commun avec son dénominateur, elle est censée irréductible à de moindres termes. On se contente alors d'indiquer la division.

Mais lorsqu'on peut réduire la fraction algébrique à une plus simple expression, il ne faut pas manquer de le faire. On y réussira communément au moyen des quatre regles suivantes. (Je dis *communément*, parce qu'il y a certains cas où l'on est obligé de se servir, outre cela, de la méthode du plus grand commun diviseur, avec quelques modifications).

I. Pour les signes. Le quotient de deux termes qui ont un même signe, est positif; & le quotient de deux termes qui ont différents signes, est négatif.

II. Pour les coefficients. Si on peut les diviser sans reste l'un par l'autre, il faut les effacer tous deux, & mettre leur quotient à la place du plus grand coefficient: s'ils ne sont pas divisibles sans reste, il faut les laisser en fraction tels qu'ils sont; enfin s'ils sont égaux, il faut les effacer l'un & l'autre.

III. Pour les lettres. Effacez celles qui étant communes au dividende & au diviseur, ont le même exposant dans les deux termes; & par-tout où elles sont seules, écrivez 1 à leur place.

IV. Pour les exposants. Quand une même lettre se trouve avec des exposants différents dans le dividende &

dans le diviſeur, on l'efface dans le terme où elle a l'expoſant le plus petit, (on met 1 à ſa place, ſi elle eſt ſeule) & dans l'autre terme on ne lui laiſſe pour expoſant que la différence des deux expoſants primitifs.

EXEMPLES. Pour diviſer $4ac^3de^3$ par $-2bd^3e^3f$, je dis d'abord; $+4$ diviſé par $-2 = -2$; que je mets au quotient, pour lui ſervir de coefficient. Je paſſe à la regle des lettres, en diſant, les lettres a & c ne ſe trouvent que dans le dividende, & les lettres b & f ne ſe trouvent que dans le diviſeur, il faudra donc les mettre au quotient, chacune à leur place. Puis, je vois par la regle des expoſants que $\frac{d}{d^3} = \frac{1}{d^2}$, & que $\frac{e^3}{e^3} = 1$. D'où je conclus que le quotient cherché eſt $-\frac{2ac^3}{bd^2f}$.

Pareillement, je trouverai que $\frac{3a^3}{12a^4b^3} = \frac{1}{4ab^3}$, en diſant $\frac{12}{3} = 4$. J'efface 3 dans le dividende, & je mets 4 à la place de 12 dans le diviſeur: puis je vois que ſelon la regle des expoſants, il faut mettre 1 dans le dividende à la place de a^3, & laiſſer a^1 ou a ſeulement dans le diviſeur. Ainſi le quotient eſt $\frac{1}{4ab^3}$.

On trouvera de même que $\frac{3abc}{3abc} = \frac{1}{1} = 1$ ... que $\frac{-4bd}{2bd} = -\frac{2}{1} = -2$ .... que $\frac{3aab}{5ac} = \frac{3ab}{5c}$ .... que $\frac{-12abd}{3a} = -\frac{4bd}{1} = -4bd$ .... que $\frac{4a^3bbd}{4abd} = \frac{aab}{1} = aab$, &c.

La regle des coefficients & celle des expoſants ne ſont, comme l'on voit, que des réductions de fractions aux expreſſions les plus ſimples.

Ainſi $\frac{a^3}{a^3}$ étant la même choſe que $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, il eſt évident que $\frac{aaa}{aaa} = \frac{1}{1}$ ou 1; on peut donc écrire $\frac{1}{1 \times aa}$, ou ſim-

plement $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$; d'où il suit que cette réduction exige que la différence des deux exposants serve d'exposant à la lettre qui avoit le plus grand, & que l'on substitue 1 à la lettre dont l'exposant étoit le plus petit, si elle est toute seule.

130. Ces regles peuvent s'appliquer aux fractions des Polynomes, lorsqu'il se trouve une même quantité dans tous les termes du dividende & du diviseur. Ainsi $\frac{ax-2abx}{ax+axx}$ se réduit à $\frac{1-2b}{1+x}$, en effaçant ax dans tous les termes, & mettant 1 à sa place dans ceux où il se trouve seul.

De même $\frac{3xx}{3axx+3bbxx}$ se réduit à $\frac{1}{a+bb}$. . . . . $\frac{4a^2xx+3a^3bbx}{aax-aabx}$ se réduit à $\frac{4x+3abb}{1-b}$ . . . . . $\frac{4abxx-2abb}{2aabb+4abbb}$ se réduit à $\frac{2xx-1}{ab+2b}$.

131. On divise aussi les Polynomes comme dans l'Arithmétique; & quoiqu'il arrive rarement que cette division se puisse faire, il faut cependant l'essayer, avant que de se contenter de faire quelques-unes des réductions précédentes.

Mais pour s'épargner bien des tâtonnements, il faut arranger les termes du dividende & ceux du diviseur, de façon que de part & d'autre, celui-là soit le premier, dont une lettre quelconque choisie à volonté, pourvu qu'elle soit commune à tous les deux, ait un plus grand exposant que dans les autres termes: que celui-là soit le second, où la même lettre ait l'exposant prochainement moindre, & ainsi de suite. Cela s'appelle *ordonner* une quantité. Voici un exemple dans lequel le dividende & le diviseur sont ordonnés par rapport à la lettre a.

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \left\{ a^2+2ab+b^2. \right.$$

On auroit pu l'ordonner de même par rapport à la lettre b. Quelquefois cependant il eſt plus commode de préférer une lettre à une autre. C'eſt lorſque celle-ci ſe trouve avec le même expoſant dans pluſieurs termes; par exemple, on a préféré la lettre x aux lettres b & c, dans la diviſion ſuivante, dont nous allons détailler le procédé.

$$\begin{array}{r|l} 9b^2x^3 - 3b^2cx^4 - 3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 & -3b^2x^2 + b^2cx \\ \underline{9b^2x^3 + 3b^2cx^4} & \overline{-3x^1 + cx} \\ 0 - 3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 & \\ \underline{+3b^2cx^3 - b^2c^2x^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Je dis donc.... $\frac{9b^2x^3}{-3b^2x^2} = -3x^3$ que je mets au quotient. Je multiplie le diviſeur par ce terme, & je ſouſtrais le produit $9b^2x^3 - 3b^2cx^4$, des deux premiers termes du dividende. Il ne me reſte rien. J'abaiſſe les deux termes ſuivants, & je dis; $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2} = +cx$, que je mets au quotient.

Multipliant enſuite le diviſeur par ce nouveau terme, je ſouſtraits le produit $-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$ des deux termes abaiſſés; reſte zéro. Il n'y a plus rien au dividende. La diviſion eſt donc finie, & le quotient exact eſt $-3x^2 + cx$. Je le vérifie, en le multipliant par le diviſeur; je retrouve le dividende, l'opération eſt donc bonne.

Au reſte pour acquérir de la facilité dans ces ſortes de calculs, il faut multiplier d'abord deux quantités algébriques l'une par l'autre, & diviſer enſuite leur produit par l'une des deux. Le quotient doit être l'autre quantité.

132. On peut auſſi s'exercer ſur des expreſſions ſemblables à celle-ci, .. $\frac{a^3 + m^3}{a + m}$. Elles ont cela de particulier, qu'elles font naître, pour ainſi dire, de nouveaux termes dans le dividende, à meſure que l'on pourſuit la diviſion, comme on va le voir dans l'exemple ſuivant.

$$\begin{array}{rl} a^5+m^5 & \left\{\begin{array}{l} a+m \\ \hline a^4-a^3m+a^2m^2-am^3+m^4 \end{array}\right. \\ -a^5-a^4m & \\ \hline \text{Prem. Reste.}\quad 0-a^4m+m^5 & \\ \quad +a^4m+a^3m^2 & \\ \hline \text{2. R.}\quad 0+a^3m^2+m^5 & \\ \quad -a^3m^2-a^2m^3 & \\ \hline \text{3. R.}\quad 0-a^2m^3+m^5 & \\ \quad +a^2m^3+am^4 & \\ \hline \text{4. R.}\quad 0+am^4+m^5 & \\ \quad -am^4-m^5 & \\ \hline \text{5. R.}\quad 0 & \end{array}$$

On trouve pour quotient $a^4-a^3m+a^2m^2-am^3+m^4$. En divisant $1-x^{12}$ par $1-x$, le quotient sera $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$.

Il en seroit de même pour d'autres exemples semblables. Aussi avec un peu d'usage voit-on, sans calcul, quels doivent être les quotients en pareil cas.

On trouveroit de même que $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+$ &c, &c sans fin; & que $\frac{1}{1+xx}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-$ &c $+$ &c . . . à l'infini pareillement.

133. La division des fractions algébriques par des entiers ou par d'autres fractions, ou d'un entier par une fraction, ne peut souffrir aucune difficulté (67). Exemples.

1°. Pour diviser par $4m$ la fraction $\frac{b}{c}$, on écrira d'abord $\frac{\frac{b}{c}}{4m}$; puis $\frac{b}{4cm}$. (On a soin, dans ce cas-là, de faire un peu plus long le trait qui sépare le diviseur du dividende, pour marquer que c'est $\frac{b}{c}$ que l'on veut diviser par $4m$, & non b par $\frac{c}{4m}$).

2°. Pour diviſer un entier x par une fraction $\frac{p}{q}$, on écrira $x \frac{q}{p} = \frac{qx}{p}$ . . . Pour diviſer xy par $\frac{3}{2}$ on écrira $\frac{2}{3} xy$.

3°. Le quotient d'une fraction diviſée par une autre fraction, ſe trouve comme celui des fractions numériques. Ainſi $\frac{m}{n} : \frac{s}{t} = \frac{mt}{ns}$ . . . . $\frac{3}{4} \varphi : \frac{4}{5} \omega = \frac{15}{16} \cdot \frac{\varphi}{\omega}$.

134. Il a été dit (129) que pour réduire certaines expreſſions algébriques à leurs moindres termes, il falloit ſe ſervir de leur plus grand diviſeur. Voici la maniere de le trouver. Elle ne differe de celle qui a été preſcrite pour les nombres, que dans quelques cas particuliers.

Après avoir ordonné les deux quantités, il faut diviſer la plus grande par la plus petite. Si la diviſion ſe fait ſans reſte, la plus petite eſt le diviſeur cherché : auquel cas il faut effectuer les deux diviſions, & ſubſtituer les deux quotients aux quantités propoſées.

Ex. $\frac{a+x}{aa-xx} = \frac{1}{a-x}$ . . . . $\frac{px+xx}{bmp+bmx} = \frac{x}{bm}$

En diviſant $aa - xx$ par $a + x$, la diviſion ſe fait exactement. Donc $a+x$ eſt le plus grand commun diviſeur. Effectuant donc la diviſion, ou trouvera 1°, que $\frac{a+x}{a+x} = 1$; 2°, que $\frac{aa-xx}{a+x} = a - x$. Donc $\frac{a+x}{aa-xx}$ ſe réduit à $\frac{1}{a-x}$.

Si la plus grande quantité ne pouvoit ſe diviſer ſans reſte par la plus petite, on diviſeroit à ſon tour celle-ci par le reſte de la premiere ; & ce reſte ſeroit le plus grand commun diviſeur, s'il diviſoit exactement la plus petite, &c.

Juſque-là c'eſt la même méthode pour les lettres & pour les nombres ; mais cette méthode ne s'étend pas à tous les cas algébriques

qui ſont ſuſceptibles de réduction, comme nous allons le voir, après les deux remarques ſuivantes.

135. 1°. Il n'eſt pas rare de trouver dans l'une des deux quantités propoſées, un diviſeur commun à tous ſes termes. Quand on en trouve, & que ce diviſeur n'eſt pas commun à tous les termes de l'autre quantité, on peut l'effacer dans la premiere quantité avant que de commencer la diviſion. Le calcul n'en ſera que plus ſimple, & le plus grand commun diviſeur n'en ſera point altéré.

Par exemple, dans $\frac{x^4 - z^4}{x^3 - xz^2}$ je vois que x^1 eſt commun aux deux termes du diviſeur, & qu'il ne l'eſt pas à ceux du dividende. Il ne peut donc pas faire partie du plus grand commun diviſeur que je cherche. Je l'efface donc, & par-là j'ai $\frac{x^4 - z^4}{x^3 - z^2} = x^3 + z^2$ ſans reſte. D'où je conclus que $x^2 - z^2$ eſt le diviſeur cherché. Effectuant donc les deux diviſions, je trouve $\frac{x^2 + z^2}{x}$; expreſſion plus ſimple que la premiere.

En général, toute quantité ſemblable à $\frac{bm + mx}{b^2n - nx^2}$ aura le même plus grand diviſeur que $\frac{b + x}{b^2 - x^2}$; & réciproquement. Soit donc que l'on diviſe, ſoit que l'on multiplie l'une des deux quantités données, par une grandeur qui n'ait aucun diviſeur commun avec l'autre, les réſultats auront toujours le même plus grand commun diviſeur que les deux quantités données.

136. 2°. Le changement des ſignes dans une de ces quantités, n'en produit aucun dans leur diviſeur commun, pourvu qu'on les change tous à la fois dans cette quantité. Il eſt clair, par exemple, que ſi $a^2 = b^2$ eſt diviſible par $a - b$, il le ſera encore par $-a + b$. Toute la différence ſera dans les ſignes des quotients.

Cela poſé, cherchons le plus grand diviſeur commun de $\frac{6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$. On voit d'abord que tous les termes du dividende peuvent être diviſés exactement par 2, mais non ceux du diviſeur. On peut donc ſimplifier l'opération en diviſant les premiers par 2.

Par la même raiſon, on peut diviſer par 3 les termes du diviſeur. Ainſi tout ſe réduit à trouver le plus grand diviſeur commun de $\frac{3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3}{4x^2 - 5xy + y^2}$.

Mais ici la méthode eſt en défaut, parce que le coefficient 3 n'eſt pas diviſible par 4. Pour y ſuppléer, on multipliera tout le dividende par 4, & l'on diviſera $12x^3 - 12x^2y + 4xy^2 - 4y^3$ par $4x^2 - 5xy + y^2$. Le quotient ſera $3x$, que l'on négligera à l'ordinaire : le reſte ſera $3x^2y + xy^2 - 4y^3$.

Suivant la méthode, il faudroit diviſer $4x^2 - 5xy + y^2$ par ce reſte.

Mais avant de procéder à cette diviſion, on effacera d'abord dans tous les termes de ce reſte la lettre y, qui leur eſt commune, & qui ne l'eſt pas à tous ceux du nouveau dividende. On aura donc $3x^2 + xy - 4y^2$ pour diviſeur.

On remarquera enſuite que cette quantité ne peut pas diviſer exactement $4x^2 - 5xy + y^2$, à cauſe des coefficiens. On multipliera donc celle-ci par 3, & on eſſayera la diviſion. Le quotient ſera 4, & le reſte ſera $-19xy + 19y^2$.

Ce ſecond reſte ſervira de diviſeur à $3x^2 + xy - 4y^2$: mais auparavant on effacera dans les deux termes la quantité $19y$ qui leur eſt commune. Procédant alors à une troiſieme diviſion, on aura $3x^2 + xy - 4y^2$ pour dividende, $-x + y$ pour diviſeur, & $-3x - 4y$ pour quotient exact. On peut donc aſſurer que $-x + y$ eſt le plus grand commun diviſeur cherché ; & ſi on effectue les diviſions, on trouvera que $\frac{6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$ ſe réduit à $\frac{2x^2 - 2xy}{-12x + 3y} = \frac{6x + 2y}{12x - 3y}$, fraction qu'il n'eſt plus poſſible de réduire.

Soit propoſé maintenant de trouver le plus grand diviſeur commun de $\frac{3bcq + 30mp + 18bc + 5mpq}{24ad - 7fgq - 42fg + 4adq}$.

1°. J'ordonne ainſi la quantité, $\frac{(3bc + 5mp)q + 18bc + 30mp}{(4ad - 7fg)q + 24ad - 42fg}$.

2°. Pour rendre la diviſion poſſible, il faudroit multiplier tout le dividende par $(4ad - 7fg)$: mais auparavant il faut être sûr que cette quantité ne diviſe pas exactement le diviſeur lui-même. Or par le fait elle le diviſe, & le quotient exact eſt $q + 6$.

Je ſubſtitue donc $q + 6$ au premier diviſeur, & je cherche le plus grand commun diviſeur de $\frac{(3bc + 5mp)q + 18bc + 30mp}{q + 6}$: il eſt viſible que c'eſt $q + 6$ lui-même, puiſque la diviſion réuſſit.

Ainſi l'expreſſion propoſée peut ſe réduire à $\frac{3bc + 5mp}{4ad - 7fg}$. On trouvera d'autres exemples dans les Éléments d'Algèbre de M. Clairaut.

De la Formation des Puiſſances.

237. On diſtingue les degrés des puiſſances d'une quantité quelconque par les expoſants de cette quantité. Ainſi a, ou a^1 eſt la premiere puiſſance de a. La ſeconde eſt a^2, la troiſieme eſt a^3 &c. En général a^m eſt la puiſſance m de a, quelle que ſoit la valeur de m.

Cette quantité a eſt la *Racine* de ces divers produits ; & la dénomination de cette racine dépend de la puiſſance correſpondante.

On verra dans les Éléments de Géométrie, pourquoi la premiere puiſſance d'une quantité s'appelle auſſi la *Puiſſance linéaire* de cette quantité ; & pourquoi la ſeconde puiſſance s'appelle le *Quarré* ; de maniere qu'au lieu de dire que c^2 eſt la ſeconde puiſſance de c, on dit que c^2 eſt le quarré de c. C'eſt encore de la Géométrie que dérive le nom de *Cube*, donné à la troiſieme puiſſance d'une quantité quelconque : les puiſſances qui ſont au-deſſus, ſe déſignent ſimplement par leurs expoſants. Ainſi b^4 eſt la quatrieme puiſſance de b, &c.

138. Réciproquement la racine ſeconde, ou la *racine quarrée* de c^2 eſt c. La racine troiſieme, ou la *racine cubique* de a^3 eſt a. La racine quatrieme de x^4 eſt x, &c, &c.

Puiſque la premiere puiſſance de a eſt a ou a^1 ; que la ſeconde puiſſance eſt a^2 ou $a.a$; que la troiſieme puiſſance eſt a^3 ou $a.a.a$; que la quatrieme eſt a^4 ou $a.a.a.a$, &c ; on peut en conclure que . . .

139. Pour élever une quantité à une puiſſance donnée, il faut multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités. Ainſi pour élever le nombre 9 à la troiſieme puiſſance, il faut le multiplier deux fois par lui-même, en diſant d'abord $9.9=81$ . . . puis $81.9=729$.

De même, le quarré de $\frac{1}{3}$ eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$: ſon cube eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$; ſa quatrieme puiſſance eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$, &c. Le quarré de $\frac{1}{10}$ eſt $\frac{1}{100}$; ſon cube eſt $\frac{1}{1000}$; ſa quatrieme puiſſance eſt $\frac{1}{10000}$, &c.

D'où l'on voit que la valeur d'une fraction diminue, à meſure qu'on l'éleve à de plus hautes puiſſances, & que cette diminution eſt d'autant plus rapide, que le dénominateur eſt plus grand par rapport au numérateur.

140. Quant aux expreſſions algébriques. 1°. S'il s'agit d'un monome, on met à toutes ſes lettres l'expoſant de la

la puiſſance propoſée. Ainſi la cinquieme puiſſance de abc eſt $a^5 b^5 c^5$. La puiſſance m de $\frac{ab}{cd}$ eſt $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$; & ſi le monome a un coeffiçient, on éleve auſſi ce coefficient à la puiſſance indiquée. Le cube de $\frac{2ab}{5fg}$, par exemple, eſt $\frac{8a^3 b^3}{125 f^3 g^3}$.

II°. S'il y a dans le monome d'autres expoſants que l'unité, on les multiplie tous par celui de la puiſſance à laquelle on veut l'élever. Ainſi la quatrieme puiſſance de $a^3 b^2$ eſt $a^{12} b^8$; & en général la puiſſance m de $\frac{a^l b^n}{c d^q}$ eſt $\frac{a^{lm} b^{mn}}{c^m d^{mq}}$.

III°. Pour un polynome, il ſuffit quelquefois d'indiquer la puiſſance à laquelle on veut l'élever. Cela ſe fait, ou en le couvrant d'un trait au bout duquel on écrit l'expoſant, ou en le renfermant entre deux crochets. Ainſi $\overline{a+b}^m$, & $(a+b)^m$ déſignent également la puiſſance m du binome $a+b$.

141. Si $m=2$, alors le binome $a+b$, qui par ſa généralité, peut repréſenter tous les binomes poſſibles, doit être multiplié une fois par lui-même, & on trouve que . . . . . $a+b$

multiplié par $a+b$

a^2+ab

$+ab+b^2$

donne . . . . $a^2+2ab+b^2$

Or a^2 eſt le quarré du premier terme du binome; $2ab$ eſt le double produit de ce premier terme par le ſecond; b^2 eſt le quarré du ſecond. Ainſi on doit conclure généralement que le *quarré d'un binome quelconque contient trois termes, ſavoir; 1°, le quarré du premier terme. 2°, le double du premier terme multiplié par le ſecond. 3°, le quarré du ſecond.*

Cette regle ne ſouffre aucune exception ; & voilà comme l'Algebre s'éleve à des réſultats généraux, pendant que l'Arithmétique n'y parvient que par analogie, en ſe traînant d'exemple en exemple.

Quant aux ſignes, ils ſont tous poſitifs, lorſque les deux termes du binome ont le même ſigne ; & lorſque ceux-ci ont des ſignes différents, le produit du double du premier par le ſecond eſt le ſeul terme négatif.

En élevant au quarré le trinome $a+b+c$, on trouvera, réduction faite, $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$. C'eſt-à-dire que le quarré d'un trinome contient les quarrés de chaque terme en particulier, plus le double du premier par le ſecond, plus le double du premier & du ſecond par le troiſieme.

D'après cela, il eſt aiſé de voir que le quarré de $(ax+yz)=a^2x^2+2axyz+y^2z^2$..... que celui de $(3mn-4m^2)=9m^2n^2-24m^3n+16m^4$..... & que $(x+\frac{1}{2}a)^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. On voit auſſi que $(b+2c-y)^2=b^2+4bc+4c^2-2by-4cy+y^2$.

142. Remarquez que pour compléter le quarré d'un binome, lorſqu'on a déja les deux premiers termes de ce quarré, il ne faut que leur ajouter le quarré de la moitié du *Coefficient total* du ſecond. (J'appellé ainſi tout ce qui affecte ce ſecond terme, ſoit en chiffres ſoit en lettres). Si j'avois, par exemple, x^2+2ax à compléter, je prendrois a, moitié de $2a$, coefficient total du ſecond terme $2ax$, & j'ajouterois ſon quarré a^2 aux deux autres termes x^2+2ax, ce qui me donneroit alors le quarré parfait du binome $x+a$. Donc toutes les fois qu'on voudra compléter un quarré, ayant déja deux termes de cette forme, x^2+ax, il n'y aura qu'à écrire $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. Ceci trouvera plus d'une fois ſon application.

143. Si $m=3$, alors le binome $a+b$, doit être multiplié deux fois de ſuite par lui-même ; ou, ce qui eſt

la même chose, son quarré doit être multiplié par la premiere puissance. Or toute réduction faite, on trouve que

$$\begin{array}{rl} & a^2+2ab+b^2 \\ \text{multiplié par} & \ldots\ldots a+b \\ \hline & a^3+2a^2b+ab^2 \\ & \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \text{donne} \ldots\ldots & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

On doit donc en conclure généralement que *le cube d'un binome quelconque contient quatre termes ; 1°, le cube du premier terme du binome. 2°, le triple du quarré de ce premier terme multiplié par le second. 3°, le triple du quatré du second multipiié par le premier. 4°, le cube du second.* Ou plus briévement ; le cube d'un binome contient les cubes de ses deux termes, & les produits respectifs du triple du quarré de chacun de ces deux termes par l'autre.

Quant aux signes, ils sont tous positifs quand ceux du binome le sont ; on vient de le voir dans le cube de $a+b$. Lorsque les deux signes du binome sont négatifs, tous ceux du cube le sont aussi.

Exemples. $(-m-2n)^3=-m^3-6m^2n-12mn^2-8n^3\ldots-(a+1)^3=-a^3-3a^2-3a-1$. (Le signe $-$ mis avant la parenthese annonce qu'il faut changer les signes de tous les termes qui y sont compris). Lorsque des deux termes du binome, il y en a un négatif, ceux du cube le sont alternativement, de maniere que les seuls termes négatifs du cube, sont ceux qui renferment les puissances impaires de la partie du binome affectée du signe $-$.

Exemples. $(-p+q)^3=-p^3+3p^2q-3pq^2+q^3\ldots(2ax-xx)^3=8a^3x^3-12a^2x^4+6ax^5-x^6$.

144. Si $m=4$, le binome $a+b$ doit être élevé à la quatrieme puissance, & il en résultera cinq termes,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Si $m=5$, on aura par un procédé semblable la cinquieme puiſſance de $a+b$, compoſée de ſix termes.

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Et ainſi des autres puiſſances d'un binome quelconque, qui toutes ont pareillement un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans leurs expoſants.

145. Mais s'il falloit paſſer par toutes les puiſſances intermédiaires, avant d'arriver à une puiſſance plus élevée dont on auroit beſoin, on ſent bien que le calcul en ſeroit ſouvent fort long & toujours indirect. Les Géometres du ſiécle dernier avoient tant de fois éprouvé cet inconvénient, qu'ils tournerent leur attention vers la recherche d'une méthode qui pût les mener directement à leur but. Cette méthode, ils la trouverent; & Newton en eut la principale gloire.

Ce n'eſt pas encore ici le lieu de la démontrer: mais nous pouvons d'avance en préſenter les réſultats, comme une des choſes les plus utiles qu'il y ait dans l'Algèbre.

146. 1°. Une puiſſance quelconque d'un binome algébrique ne pouvant être compoſée que de ſignes, de coefficients, de lettres & d'expoſants qui doivent en former les différents termes, il falloit, avant tout, des regles générales pour ces diverſes parties.

Or 2°, La regle des ſignes ne pouvoit ſouffrir aucune difficulté. (122).

3°. Celle des lettres n'en pouvoit pas ſouffrir non plus (124).

4°. Celle des expoſants fut d'abord déduite par une ſimple analogie que voici. On avoit remarqué que le premier terme de toutes les puiſſances auxquelles on élevoit un binome, étoit formé de la premiere partie de ce binome, élevée à la puiſſance dont il s'agiſſoit.

On avoit remarqué auſſi que dans les termes ſuivants, l'expoſant de cette premiere partie diminuoit ſucceſſivement d'une unité, pendant que l'expoſant de la ſeconde partie augmentoit dans la même proportion.

On avoit remarqué enfin que cette diminution graduelle se continuoit jusqu'au dernier terme, ou la seconde partie du binome restoit seule avec un exposant égal à celui de la puissance demandée.

De-là on conclut que pour élever un binome quelconque $p+q$ à la sixieme puissance, par exemple, on n'avoit qu'à écrire, (abstraction faite des coefficients) $(p+q)^6 = p^6+p^5q+p^4q^2+p^3q^3+p^2q^4+pq^5+q^6$; & ainsi des autres puissances plus élevées.

5°. Restoit donc la regle des coefficients à trouver, & c'étoit la plus difficile. On avoit bien remarqué que le coefficient du premier terme étoit toujours l'unité, & que celui du second terme étoit toujours l'exposant de la puissance proposée. Mais jusqu'à Newton, on n'avoit fait qu'entrevoir la loi qui sert maintenant à déterminer tous les autres coefficients.

Voici à-peu-près comment on l'avoit devinée. En dépouillant successivement de leurs coefficients les cinq premieres puissances d'un binome quelconque, on avoit trouvé que ces coefficients étoient,

pour la premiere puissance 1, 1
pour la 2e. 1, 2, 1
pour la 3e. 1, 3, 3, 1
pour la 4e. 1, 4, 6, 4, 1
pour la 5e. 1, 5, 10, 10, 5, 1

de maniere que chaque premier coefficient de toutes ces puissances étoit 1, ainsi que le dernier, & que chacun des autres étoit la somme des deux coefficients correspondants de la puissance immédiatement précédente. Ainsi les coefficients de la cinquieme puissance, à compter du second jusqu'à l'avant-dernier, se forment en disant $1+4=5 \ldots 4+6=10 \ldots 6+4=10 \ldots 4+1=5 \ldots$ Cette loi s'observant dans toutes les puissances que l'on avoit calculées, la seule analogie portoit à la regarder comme générale. Mais outre que l'analogie n'est point une démonstration, l'inconvénient de ne pouvoir connoître les coefficients d'une puissance, sans la connoissance préala-

ble de ceux de la puiſſance précédente, reſtoit dans ſon entier. On s'aviſa donc d'un autre expédient qui fournit la regle ſuivante, dont nous donnerons la démonſtration (313).

147. Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque de la puiſſance propoſée d'un binome $p+q$, multipliez le coefficient du terme précédent par l'expoſant que p a dans ce terme précédent, & diviſez le produit par le nombre qui marque le rang de ce terme précédent. Le quotient ſera toujours le coefficient cherché.

Exemple. On voudroit avoir le développement de la ſeptieme puiſſance de $p+q$.... Ecrivez,

$$(p+q)^7 = \begin{cases} p^7 + \frac{1.7}{1}p^6q + \frac{7.6}{2}p^5q^2 + \frac{7.6.5}{2.3}p^4q^3 + \frac{7.6.5.4}{2.3.4}p^3q^4 \\ + \frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}p^2q^5 + \frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}pq^6 + \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}q^7. \end{cases}$$

148. Et ſi on veut généraliſer les regles que nous venons d'indiquer, on trouvera que pour élever un binome quelconque $a+b$ à une puiſſance quelconque m, il faut écrire.....

$$(a+b)^m = \begin{cases} a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \\ a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}a^{m-4}b^4 ..... \text{ Et} \\ \text{ainſi de ſuite juſqu'à un dernier terme qui aura} \\ \text{cette forme } \frac{m.m-1.m-2....m-(m-1)}{2.3.....m}b^m. \end{cases}$$

Si l'on veut maintenant appliquer cette *Formule* à quelques exemples, on verra avec quelle promptitude elle les expédie. Soit donc propoſé de trouver la neuvieme puiſſance du binome $a+b$.

On fera $m=9$, & on ſubſtituera les valeurs convenables dans la formule, ce qui donnera.....

$$(a+b)^9 = \begin{cases} a^9 + 9a^8b + \frac{9.8}{2}a^7b^2 + \frac{9.8.7}{2.3}a^6b^3 + \frac{9.8.7.6}{2.3.4}a^5b^4 \\ + \frac{9.8.7.6.5.}{2.3.4.5.}a^4b^5 + \frac{9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}a^3b^6 + \frac{9.8.7.6.5.4.3}{2.3.4.5.6.7}a^2b^7 \\ + \frac{9.8.7.6.5\,4.3.2}{2.3.4.5.6.7.8.}ab^8 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7.8.9.}b^9. \end{cases}$$

Réduction faite, $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$.

Soit proposé maintenant de calculer les premiers termes de la millieme puissance de $a+b$.

On supposera $m = 1000$, & on trouvera $(a+b)^{1000} = a^{1000} + 1000\,a^{999}b + \frac{1000.999}{2}a^{998}b^2 +$ &c.

De la maniere d'exprimer & de calculer toutes sortes de Puissances, par le moyen de leurs exposants.

149. Puisque les degrés des puissances dépendent de leurs exposants, il est clair qu'il y a autant de puissances différentes d'une quantité quelconque b, qu'il peut y avoir d'exposants différents.

Or 1°, il y a une infinité de nombres entiers; voilà donc déja une infinité de puissances différentes; & celles-là se conçoivent sans peine.

Mais 2°, il y a aussi une infinité de nombres fractionaires. Or ceux-là peuvent-ils, à leur tour, servir d'exposants? Et au cas qu'ils en servent, quelles puissances indiquent-ils?

3°. Il y a de plus une infinité de nombres négatifs, soit entiers soit fractionaires. A quelles puissances répondent-ils, quand ils servent d'exposants?

Pour répondre à cette double question, nous allons développer *la Théorie des exposants*, l'une des plus importantes de l'Algèbre élémentaire.

150. On a vu (125) que le produit d'une quantité affec-

tée d'un exposant, par cette même quantité affectée aussi d'un exposant, se trouvoit tout de suite, en écrivant une seule fois cette quantité avec un exposant égal à la somme de ceux des facteurs. Ainsi $a^2 \times a^6 = a^8$. . . . $b^3 \times b^7 = b^{10}$. . . . Et généralement $c^m \times c^n = c^{m+n}$.

Donc par la raison contraire, si le dividende ne diffère du diviseur que par son exposant, leur quotient doit être la quantité qui leur est commune, affectée d'un exposant égal à la différence de ceux qu'ils avoient avant la division. Ainsi $a^8 : a^2 = a^{8-2} = a^6$. . . . $b^{10} : b^7 = b^{10-7} = b^3$. . . . $c^{m+n} : c^n = c^{m+n-n} = c^m$.

151. Cela posé, reprenons (129) la division de $a^3 : a^5$. On écrira, suivant la regle précédente, $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$. (On prononce a élevé à la puissance -2, ou bien pour abréger, a puissance -2). Voilà donc des puissances négatives introduites dans le calcul par une suite de principes & d'exemples qui ne souffrent aucune difficulté. Mais nous avons trouvé (129) que $a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2}$. Donc la quantité a élevée à la puissance négative -2, n'est autre chose que l'unité divisée par cette même quantité a élevée à la puissance positive 2.

152. Et comme au lieu des exposants 3 & 5, on peut en substituer une infinité d'autres, tels que leur différence soit également négative, il est évident que a^{-m} peut représenter en général toutes les puissances négatives d'une quantité quelconque. Or $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Donc (& cette regle est d'un grand usage), *toutes les fois qu'une quantité a un exposant négatif, elle équivaut à l'unité divisée par cette même quantité, affectée du même exposant, mais positif.*

153. Soit maintenant la quantité $c^m : c^n$; on écrira pour quotient c^{m-n}. Or il peut arriver 1°, que m soit plus grand que n . . . . 2°, que $m = n$ . . . . 3°, que m soit plus petit que n . . . . 4°, que $m - n$ donne un résultat fractionnaire, positif ou négatif.

Dans le premier cas, la quantité c doit être élevée à une puiſſance poſitive, marquée par le reſte de m, quand on en a ſouſtrait n.

Dans le ſecond cas, l'expoſant $m-n$ ſe réduit à 0; réſultat qui paroît au moins ſingulier, la premiere fois qu'on le trouve. Ce réſultat en effet indique *la puiſſance zéro de c*, & il ſemble que la puiſſance 0 d'une quantité quelconque, doit être 0. Elle équivaut pourtant à l'unité; car $a^0 = a^{m-m}$. Or $a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

154. Donc *une quantité quelconque élevée à la puiſſance* 0, *eſt toujours égale à l'unité.*

Ainſi $a^0 = b^0 = (cd)^0 = (p+q)^0 = (\frac{1}{2})^0 = (\frac{\varphi}{\lambda})^0 = 1$.

Dans le troiſieme cas, m étant plus petit que n (ce qui s'exprime quelquefois ainſi, $m < n$; & pour exprimer que m eſt plus grand que n, on écrit $m > n$), la différence des deux expoſants eſt négative. Par exemple, ſi $n = 2m$, on aura $a^m : a^n = a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$. Or $\frac{a^m}{a^{2m}} = (129, \text{IV}) \frac{1}{a^m}$.

Donc, encore une fois, *toute quantité affectée d'un expoſant négatif, n'eſt autre choſe que l'unité diviſée par la puiſſance égale, mais poſitive de cette quantité.*

Ainſi $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ . . . . . $(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}$ . . . . . $bc^{-p} = \frac{b}{c^p}$ . . . $4^{-1} = \frac{1}{4}$ . . . $\epsilon^{-m}\omega^{-r} = \frac{1}{\epsilon^m \omega^r}$.

155. Il ſuit de-là que l'on peut faire paſſer au numérateur toutes les quantités qui ſont au dénominateur d'une fraction & réciproquement, ſans altérer la valeur de la fraction. Il ne faut pour cela que changer les ſignes de leurs expoſants.

Exemples. $\frac{1}{a} = a^{-1} \ldots \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}} \ldots \frac{mn}{p^2q^3} = mnp^{-2}q^{-3} = \frac{p^{-2}q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \frac{1}{(mn)^{-1}p^2q^3} \ldots \frac{\lambda}{\varphi^{-5}} = \lambda\varphi^5 = \frac{\varphi^5}{\lambda^{-2}} = \frac{1}{\lambda^{-2}\varphi^{-5}}$.

156. Dans le quatrieme cas, où $m - n$ se réduit à un exposant fractionaire, on a toujours une racine à extraire. Pour s'en assurer, & discerner en même temps le degré de cette racine, il faut se rappeller la maniere dont on a formé les puissances.

Or nous avons dit (140) que pour élever une quantité à ses diverses puissances, il falloit multiplier son exposant par celui de la puissance à laquelle on vouloit l'élever.

157. Donc, *quand on voudra extraire une racine quelconque d'une quantité donnée, il faudra diviser l'exposant de cette quantité par celui de la racine.*

Exemples. On demande la racine quarrée de b^2 ? . . . on écrira $b^{\frac{2}{2}}$ qui se réduit à b. . . . On demande la racine quatrieme de φ^{12}? . . . on écrira $\varphi^{\frac{12}{4}} = \varphi^3$ . . . . La racine m de c^{2m} ? . . . . . est $c^{\frac{2m}{m}} = c^2$.

158. La division ayant réussi dans tous ces exemples, on est sûr d'avoir exactement les racines demandées. Mais il arrive très-souvent que l'on ne peut diviser sans reste l'exposant de la quantité par celui de la racine; & alors il faut bien, de toute nécessité, se contenter d'une simple indication; ce qui introduit dans le calcul, les exposants fractionaires dont l'usage est si fréquent.

Par exemple, si on demandoit la racine quarrée de b, il faudroit, suivant la regle précédente, écrire $b^{\frac{1}{2}}$. Ainsi *la puissance $\frac{1}{2}$ d'une quantité quelconque n'est autre chose que la racine quarrée de cette quantité.*

Pour avoir la racine cubique ou troisieme de b, il fau-

droit écrire $b^{\frac{1}{3}}$. Donc *la puiſſance* $\frac{1}{3}$ *d'une quantité quelconque n'eſt autre choſe que la racine cubique de cette quantité.*

Il en eſt de même pour les puiſſances $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c, &c, qui répondent aux racines quatrieme, cinquieme, ſixieme, &c.

159. En général, *tout expoſant fractionaire annonce une racine à extraire; & le degré de cette racine eſt toujours égal au dénominateur de la fraction.* Ainſi $a^{\frac{1}{n}}$ = la racine n de la quantité a ... $b^{\frac{m}{n}}$ = la racine n de la quantité b^m.

160. On a coutume de ſe ſervir de la lettre initiale r du mot racine, pour déſigner toute extraction de racine à faire; mais afin que ce *ſigne Radical* ſe diſtingue mieux, on a altéré ſa forme ordinaire, & on l'écrit ainſi $\sqrt{}$; de maniere que pour indiquer la racine quarrée de c, on écrit $\sqrt{c}$. On a donc $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$.

Pour déſigner la racine cubique de c, on écrit $\sqrt[3]{c}$. On a donc $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$. Pour déſigner la racine quatrieme de gf, on écrit $\sqrt[4]{gf} = (gf)^{\frac{1}{4}}$; & ainſi des autres, en affectant le ſigne radical, du chiffre qui marque le degré de la racine.

On excepte le radical quarré, parce que l'on eſt convenu de prendre pour tel, celui qui n'a point d'expoſant. Toutes les fois donc que l'on trouve des expreſſions de cette forme, $\sqrt{a}$ ... $\sqrt{(\frac{bc}{a})}$ ... $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, c'eſt toujours de la racine quarrée de ces quantités qu'il s'agit. Et même le ſeul nom de racine s'applique toujours à la racine quarrée, de ſorte que pour en déſigner une autre, on eſt convenu d'ajouter à ce mot le *numéro* qui la diſtingue.

161. Puiſque les expoſants fractionaires annoncent des ſignes radicaux, on peut donc transformer toutes les *quantités radicales* en puiſſances fractionaires; ce qui eſt d'une

grande utilité, comme on le verra par la ſuite. Cette transformation ſe fait en diviſant par l'expoſant du radical, les expoſants de la quantité qui eſt ſous le ſigne.

Exemples. $\sqrt{(c^2g^4)} = c^{\frac{2}{2}} g^{\frac{4}{2}} = c\,g^2 \ldots \sqrt[3]{(b^6q^9)} = b^{\frac{6}{3}} q^{\frac{9}{3}} = b^2q^3 \ldots \sqrt[5]{(ab^2c^3)} = a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{3}{5}} \ldots$

162. Dans les deux premiers exemples, la diviſion a réuſſi; & toutes les fois que cela arrive, on dit que l'extraction de la racine demandée peut s'effectuer. Ces ſortes de racines s'appellent *rationelles* ou *commenſurables*. Mais quand l'expoſant du radical n'eſt point un diviſeur exact des expoſants ſoumis au ſigne, comme cela eſt arrivé dans le troiſieme exemple, on dit alors que l'extraction eſt impraticable; & qu'il n'eſt pas poſſible d'obtenir, autrement que par approximation, la racine demandée. On appelle ces racines, des quantités *irrationelles* ou *incommenſurables*. Quelques Auteurs les appellent encore des *racines ſourdes*; ces trois mots ſont ſynonymes.

163. La transformation réciproque des puiſſances fractionaires, en quantités radicales, n'eſt pas d'un auſſi grand uſage: mais elle eſt tout auſſi facile; elle ſe fait, ainſi que nous l'avons déja inſinué, en donnant pour expoſant au radical, le dénominateur de la fraction qui marque la puiſſance, & en ſoumettant à ce ſigne la même quantité, élevée à la puiſſance déſignée par le numérateur de la fraction.

Exemples. $(3a)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{3a} \ldots (x^2 - y^2)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(x^2 - y^2)} \ldots b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3} \ldots c^{\frac{4}{5}} p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{c^4 p} \ldots\ldots (2\varphi - 3\varepsilon + 4\omega)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(2\varphi - 3\varepsilon + 4\omega)^2}$.

Souvent il arrive que les quantités dont on veut extraire la racine, ſont affectées d'un coefficient numérique; & il faut bien alors ſavoir la maniere de faire ſubir à toute

sorte de nombres l'extraction convenable. On l'apprendra dans les trois Chapitres suivants.

De l'extraction des racines, & en particulier de la racine quarrée.

164. L'EXTRACTION des racines est l'opération inverse de la formation des puissances. On cherche, par exemple, dans celle-ci le produit d'une quantité par elle-même, pour avoir son quarré. Dans l'autre, on a le quarré, & on cherche la racine.

Elle est très-aisée à trouver dans les quantités algébriques, quand elles sont commensurables; & comme nous venons d'indiquer la méthode générale pour toutes les quantités monomes, il ne nous reste qu'à traiter de l'extraction de la racine des polynomes. Commençons par la racine quarrée.

165. Soit la quantité $a^2+2ax+x^2$ dont on cherche la racine quarrée.... D'abord il est évident que si cette quantité qui n'a que trois termes, est un quarré complet, sa racine ne peut être qu'un binome (141).

Il n'est pas moins évident ensuite, que le premier de ces termes est le quarré de la premiere partie du binome cherché; que le second terme est le double du produit des deux parties de ce même binome, & que le troisieme est le quarré de la seconde partie.

Je suis donc sûr de trouver la premiere partie du binome en prenant la racine quarrée de a^2. Or $\sqrt{a^2} = a$; j'écris donc a à la racine. Puis je soustrais son quarré a^2 de la quantité proposée. Il me reste $2ax+xx$.

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ax+x^2 & a+x \ldots \text{Racine} \\ -a^2 & \\ \hline 0+2ax+x^2 & 2a \ldots \text{Divis.} \\ -2ax-x^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mais puisque $2ax$ doit être le produit du double de

la premiere partie a de la racine par la ſeconde, il eſt clair que pour connoître cette ſeconde partie, il n'y a qu'à diviſer $2ax$ par $2a$. Le quotient $+x$ me la fera connoître. Car s'il eſt vrai que $+x$ ſoit le ſecond terme de la racine, ſon produit par $2a$, plus ſon quarré x^2 étant ſouſtraits du reſte que j'avois, il ne doit rien reſter. Or pour avoir tout à la fois ce produit & ce quarré, je multiplie $(2a+x)$ par x; & j'ai $2ax+xx$. Souſtraction faite, il ne reſte rien; d'où je conclus que $a+x$ eſt la racine cherchée.

166. Dans des cas auſſi ſimples, on voit à la ſeule inſpection de la quantité donnée, ſi elle a une racine quarrée exacte, ou ſi elle n'en a point. Mais ſi on ne le voyoit pas du premier abord, on ne tarderoit pas à le reconnoître, en ordonnant la quantité, (131) & en obſervant les regles ſuivantes.

I. Si la quantité propoſée eſt un *quarré parfait*, compoſé de trois termes, on eſt sûr qu'elle a un binome pour racine.

II. Si les termes de cette quantité ſont tous poſitifs, ceux de la racine ſeront tous poſitifs, ou tous négatifs. On voit bien en effet que la racine quarrée de $a^2+2ab+b^2$ eſt également $a+b$, ou $-a-b$. Mais ſi le ſecond terme du quarré eſt négatif, l'un des deux termes de la racine (n'importe lequel doit être négatif. Car $a-b$, & $-a+b$ ſervent également de racine à la quantité $a^2-2ab+b^2$.

167. C'eſt-là l'origine de l'*ambiguité du radical quarré*; lequel eſt ſuſceptible, comme l'on voit, du ſigne $+$ & du ſigne $-$. Auſſi trouve-t-on aſſez ſouvent l'occaſion de l'*affecter* de ce double ſigne $\pm$ que l'on prononce *plus ou moins*, & qui eſt toujours ſous-entendu, quand on ne l'écrit pas.

La racine de c^2, par exemple, équivaut à $\pm\sqrt{c^2}$, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt indifféremment $+c$ ou $-c$, ſans que l'on puiſſe ſe décider pour une valeur plutôt que pour une

autre, à moins que l'état de la queſtion n'exclue une des deux valeurs, comme cela arrive quelquefois.

III. Après avoir au moins entrevu la poſſibilité de l'extraction projettée, cherchez la premiere partie de la racine. Vous la trouverez en diviſant par 2 l'expoſant du premier terme de cette quantité. Donc ſi vous ſouſtrayez de ce premier terme le quarré de la racine trouvée, il ne vous reſtera plus que deux termes dans la quantité.

IV. Et de ces deux termes, l'un ſera le double du produit des deux parties de la racine totale; l'autre ſera le quarré de la ſeconde partie de cette racine. Tous deux peuvent également ſervir à faire connoître cette ſeconde partie. Le dernier, par la ſimple extraction de ſa racine; l'autre, en le diviſant par le double de la partie déja connue. Si on préfere cette diviſion, c'eſt uniquement parce qu'elle eſt toujours applicable aux quantités numériques.

V. Le ſecond terme de la quantité étant donc diviſé par le double de la premiere partie de la racine, vous aurez pour quotient la ſeconde partie, & c'eſt alors, que pour la vérifier, vous la multiplierez par le double de la premiere, plus par elle-même, afin de voir ſi ces deux produits ſouſtraits des deux termes qui reſtoient dans la quantité, donnent zéro pour réſultat. Quand cela arrive, l'opération eſt finie, & on a une racine exacte.

Application. On demande la racine quarrée de $4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4$.

1°. La racine de $4p^6$ eſt $2p^3$.
2°. Le double de $2p^3$ eſt $4p^3$.
3°. Le quotient de $16p^3q^2$ diviſé par $4p^3$, eſt $4q^2$.
4°. $4q^2$ eſt la racine de $16q^4$.

Donc $2p^3 + 4q^2$ eſt la racine demandée.

Voici les détails.

$$\begin{array}{l|l} 4p^6+16p^3q^2+16q^4 & 2p^3+4q^2 \ldots \text{Racine.} \\ -4p^6 & \\ \hline 0+16p^3q^2+16q^4 & 4p^3 \ldots\ldots \text{Divt.} \\ -16p^3q^2-16q^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

168. Pour que la racine ſoit un trinome, il faut que la quantité donnée ſoit non-ſeulement un quarré parfait, mais encore qu'elle ſoit compoſée de ſix termes (141). Il en faudroit dix pour un quadrinome, & ainſi de ſuite. Mais à peine trouve-t-on une fois dans la vie ces ſortes d'extractions à faire, ſur dix termes. Nous nous bornerons donc à un exemple de racine trinome.

Soit $a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6$, dont on cherche la racine quarrée.

$$\begin{array}{l|l} a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6 & a^2-b^2-c^3 \ldots \text{Racine.} \\ -a^4 & \\ \hline 0-2a^2b^2+b^4 & 2a^2 \ldots\ldots \text{I. Divt.} \\ +2a^2b^2-b^4 & 2a^2-2b^2 \ldots \text{II. Divt.} \\ \hline 0-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6 & \\ +2a^2c^3-2b^2c^3-c^6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Celle du premier terme eſt a^2, dont le quarré a^4 étant ſouſtrait de la quantité donnée, on a pour reſte les cinq autres termes $-2a^2b^2+b^4$ &c... Le premier terme de la racine eſt donc a^2.

Pour trouver le ſecond, j'abaiſſe $-2a^2b^2+b^4$, & je diviſe $-2a^2b^2$ par $2a^2$. Le quotient eſt $-b^2$, qui multiplié par $(2a^2-b^2)$ donne $-2a^2b^2+b^4$ pour produit. Je ſouſtrais ce produit des deux termes abaiſſés, & comme la ſouſtraction ſe fait ſans reſte, je vois que a^2-b^2 ſont les deux premieres parties de la racine.

Pour trouver la troiſieme, j'abaiſſe les trois derniers termes

termes de la quantité, & je diviſe les deux premiers par $2a^2 - 2b^2$, quantité double de ce qui eſt déja à la racine. Le quotient eſt $-c^3$, que je multiplie par $2a^2 - 2b^2 - c^3$). Souſtraction faite, il ne reſte rien; donc $a^2 - b^2 - c^3$ eſt la racine cherchée.

169. Maintenant rien ne ſera plus facile que d'appliquer aux nombres, ces formules algébriques, ſur-tout après avoir décompoſé le quarré d'un nombre quelconque, comme nous allons y procéder.

On ſait que le quarré de 9 eſt 81. Donc le quarré de $5+4$ doit être auſſi 81. Or $5+4$ peut être comparé au binome $a+b$, en faiſant $x=5$, & $b=4$. Ainſi on aura $81 = a^2 + 2ab + b^2$; quantité dans laquelle $a^2 = 5^2 = 25 \ldots 2ab = 2.5.4 = 40 \ldots b^2 = 4^2 = 16$.

$$\begin{array}{rl} a^2 & = 25 \\ 2ab & = 40 \\ b^2 & = 16 \\ \hline & 81 \end{array}$$

Mais comme $9 =$ pareillement $6+3$, ou $7+2$, ou $8+1$, le même binome, en ſubſtituant ces diverſes valeurs, donneroit toujours 81 pour quarré.

S'il falloit cependant retrouver deux de ces valeurs plutôt que deux autres pour racine, on ſent bien qu'il n'y auroit pas moyen de les reconnoître, à cauſe du mêlange que les chiffres auroient ſouffert dans la compoſition de 81: au lieu que dans les quantités algébriques, rien ne ſe mêle; tout eſt diſtinct juſqu'à la fin du calcul. Auſſi reconnoît-on mieux la marche qu'il faut ſuivre dans l'extraction de leurs racines.

Le nombre 54 étant auſſi décompoſé en deux parties, $50+4$, on trouvera ſubſtitution faite, que ſon quarré eſt,

$$\begin{array}{rl} a^2 & = 2500 \\ 2ab & = 400 \\ b^2 & = 16 \\ \hline & 2916 \end{array}$$

Enfin si on décompose 523 en $500+20+3$, & que l'on fasse $a=500\ldots. b=20\ldots. c=3$, on trouvera que son quarré contient exactement les mêmes parties, que celui de $a+b+c$. Ces parties sont (141)

a^2	=	250000
$2ab$	=	20000
b^2	=	400
$2ac$	=	3000
$2bc$	=	120
c^2	=	9
Donc $(523)^2$	=	273529.

170. On peut donc élever toutes sortes de nombres au quarré, sans les multiplier par eux-mêmes. Il suffit de leur appliquer la formule du binome, & d'additionner les termes qui en résultent. Encore un exemple. Quel est le quarré de 607?

Je suppose $a=600\ldots b=7$, & je trouve $a^2=360000\ldots 2ab=8400\ldots b=49$; donc $(607)^2=368449$.

171. Après nous être assurés que les quarrés des nombres contiennent les mêmes parties que les quarrés des quantités algébriques, nous ne pouvons pas douter que la méthode d'extraction ne soit la même, à quelques différences près, que le mêlange des chiffres doit exiger. La premiere de ces différences est qu'il faut commencer l'opération par la gauche, au lieu que dans l'Algèbre on réussiroit également des deux côtés.

La seconde différence consiste à partager le nombre dont on veut extraire la racine quarrée, en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite, ce qui ne laissera dans tous les nombres impairs de chiffres, qu'un seul chiffre pour la derniere tranche.

172. Ce partage seroit inutile, si les parties des quar-

res numériques se présentoient toutes séparées, comme celles des quarrés algébriques. Mais ne formant qu'un seul tout, on est obligé de les diviser ainsi, pour savoir de combien de chiffres la racine doit être composée. C'est qu'en élevant au quarré différents nombres; on a reconnu 1°, qu'un nombre simple ne peut avoir plus de deux chiffres à son quarré; 2°, qu'un nombre composé de deux chiffres n'en sauroit avoir plus de quatre à son quarré, & qu'en général, *le quarré d'un nombre quelconque ne peut avoir tout au plus qu'un nombre de chiffres double de celui dont ce nombre est composé.*

173. Il doit donc y avoir autant de chiffres à la racine quarrée d'un nombre, qu'il y a de tranches dans ce nombre. La racine de 1849, par exemple, doit en avoir deux que l'on déterminera de la maniere suivante.

On cherchera d'abord le plus grand quarré contenu dans 18. C'est 16, dont on mettra à l'écart la racine 4. On soustraira ensuite de 18 ce quarré 16 qui représente ici a, & on écrira au-dessous le reste 2.

A côté de ce reste, on abaissera la tranche suivante 49, & on aura 249 pour représenter les deux autres termes $2ab + b^2$ de la Formule.

18,49	43....Racine.
16	8.....Divis.
249	
249	
0	

Nous avons donc trouvé $a = 4$ dixaines; donc pour trouver le nombre b d'unités, il n'y aura plus qu'à diviser par $8 = 2a$, la quantité qui tient lieu de $2ab$. Or cette quantité est toujours renfermée dans le reste de la premiere tranche, joint au premier chiffre de la seconde; C'est donc ici 24 qui doit servir de dividende; ce que

l'on peut marquer par un point mis sous le 4, qui est le premier des chiffres abaissés.

Divisant maintenant 24 par 8, le quotient sera 3, qu'il ne faut pas mettre à la racine, sans s'être assuré qu'il a les qualités requises pour y être. On s'en assurera, en le soumettant aux mêmes épreuves que la quantité b, c'est-à-dire, que l'on multipliera ce quotient $3 = b$ par 8 dixaines $= 2a$, jointes à 3 unités, afin de voir si le produit de 83 par 3 peut se soustraire de 249.

Comme ce produit donne le même nombre 249, la soustraction ne laisse point de reste. On est donc sûr alors que 3 est le second chiffre de la racine cherchée. Et la preuve que 43 est vraiment cette racine, c'est qu'en élevant 43 au quarré, on retrouve 1849.

Autres exemples. Quelle est la racine de 121 ? . . . Rép. . . 11 sans reste.

1,21	11	. . . . Racine.
1	2	. . . . . Divr.
21		
21		
0		

Quelle est la racine de 9999 ? . . . . Rép. . . . 99, avec 198 de reste.

99,99	99	. . . . Racine.
81	18	. . . . Divr.
1899		
1701		
(198)		

Quelle est la racine de 273529 ? . . . . Rép. . . . 523

sans reste. Car d'abord, on voit que cette racine doit avoir trois chiffres. On voit ensuite que le premier doit être un 5, parce que le plus grand quarré contenu dans 27 est 25. On mettra donc 5 à la racine, & on soustraira son quarré de 27. Il restera 2, à côté duquel on abaissera la seconde tranche 35; après quoi mettant un point sous le 3, on divisera 23 par 10. Le quotient sera 2.

Mais avant que de placer ce quotient à la racine, on l'ajoutera à la suite du diviseur 10, & on multipliera 102 par ce quotient. Le produit sera 204, qui peut être soustrait de 235. Le chiffre 2 est donc la seconde partie de la racine demandée, & comme on n'en est sûr qu'après cette épreuve, il ne faudra mettre qu'alors 2 à la racine. Reprenant ensuite le fil de l'opération, on dira :

Le reste de 235, quand on en a ôté 204, est 31, à côté duquel il faut abaisser la troisieme tranche, 29. Le nouveau dividende sera donc 3129, & pour diviseur on aura 104, qui est le double de 52 déja mis à la racine.

Le quotient sera 3, que l'on vérifiera en multipliant 1043 par 3; & comme le produit 3129 est égal au reste de l'opération, on conclura que 523 est la racine demandée. Voici le calcul.

```
27,35,29 { 523 .....  Raci.
25       { 10 ..... I. Div.
 235     { 104 ..... II. Div.
 204
  3129
  3129
     0
```

Enfin s'il falloit chercher la racine du nombre 4243600; je serois déja sûr qu'elle doit être composée de quatre chiffres, & que le dernier doit être un zéro, au cas que le nombre proposé soit un quarré parfait. Je ne tarde pas

à connoître ces quatre chiffres au moyen du calcul suivant.

$$\begin{array}{r|l} 4,24,36,00 & 2060\ldots\ldots\ \text{R.} \\ \hline 4 & 4\ldots\ldots\ldots\ \text{I. D.} \\ \hline 2436 & 40\ldots\ldots\ \text{II. D.} \\ 2436 & 412\ldots.\ \text{III. D.} \\ \hline 0 & \end{array}$$

174. Pour s'affermir de plus en plus dans la pratique de cette regle, on pourra s'exercer sur les exemples suivants.

$$\sqrt{728654} = \text{D}''.$$
$$\sqrt{1111088889} = \text{E}''.$$
$$\sqrt{900000027} = \text{F}''.$$

175. Comme il est très-rare qu'un nombre pris au hasard soit un quarré parfait, on ne doit guere s'attendre à trouver des racines exactes. Il y a presque toujours un reste, après la derniere soustraction. Mais alors si on n'a pas besoin d'une très-grande exactitude, on néglige ce reste, dont il n'est pas possible de tirer une seule unité de plus pour la racine.

Si l'on veut cependant en tenir compte, on calculera des décimales pour la racine, en ajoutant successivement deux zéros à chaque reste, & en continuant l'extraction autant qu'on le jugera à propos.

Après avoir trouvé, par exemple, que 624 est la racine approchée de 389489, & qu'il reste 113, j'ajoute deux zéros à ce reste; & regardant 624 comme la premiere partie d'une racine composée de deux termes, je le double, pour avoir le troisieme diviseur 1248.

Le dividende qui lui correſpond, eſt 1130; le quotient qui en réſulte eſt 0 que je mets au premier rang des décimales.

J'ajoute deux autres zéros à 11300, & je prends 113000 pour dividende. Le diviſeur eſt 12480. Le quotient eſt 9.

38,94,89	624,09 &c. .... R.
36	12 ..... I. D.
294	124 ..... II. D.
244	1248 .... III. D.
50 89	12480 .... IV. D.
49 76	&c.
1130000	
1123281	
6719 &c.	

Avant de l'écrire à la racine, je le place à la ſuite de 12480, & je multiplie 124809 par 9. Le produit 1123281 pouvant être ſouſtrait de 1130000, je mets 9 au ſecond rang des décimales.

S'il falloit encore plus d'exactitude, on continueroit d'ajouter deux zéros chaque fois. Le calcul n'a plus d'autre difficulté que celle de la longueur.

176. On extrait la racine d'une fraction, en extrayant celle de chacun de ſes termes. Ainſi $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, puiſque $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. De même $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Mais quand le numérateur & le dénominateur ne ſont pas des nombres quarrés, on ne fait qu'indiquer l'extraction en mettant le ſigne radical avant la fraction, ou bien on réduit la fraction en décimales (94), & l'on fait l'extraction de la racine, comme on vient de le pratiquer pour les reſtes des quarrés imparfaits.

177. Par tout ce détail, on voit aſſez que l'extraction des racines ſe rapporte à la diviſion, comme la formation des puiſſances ſe rapporte à la multiplication.

On doit voir auſſi que l'Algèbre ſimplifie beaucoup les raiſonnements qu'il faudroit faire pour démontrer par l'Arithmétique ſeule les regles de l'extraction, celle ſurtout qui preſcrit de diviſer chaque fois par le double de ce qui eſt la racine. Mais ce n'eſt encore là qu'une foible preuve de la ſupériorité de l'Algèbre ſur l'Arithmétique.

De l'extraction de la racine cubique.

178. ON a trouvé des regles pour extraire la racine cubique, en raisonnant sur la nature des polynomes élevés au cube, comme nous l'avons fait pour la racine quarrée. Mais ces regles sont si compliquées, & d'ailleurs il est si rare de trouver l'occasion de les appliquer, que ce n'est presque pas la peine de les apprendre. Cependant pour ne pas les omettre tout-à-fait, nous les appliquerons à quelques exemples.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ ..... Il est clair qu'au cas qu'il y en ait une, elle doit être composée de deux termes (143).

Cela posé, je vois que le premier terme de la quantité donnée est a^3, dont la racine cubique est a, que j'écris; je prends le cube a^3 de cette racine, & je l'ôte de la quantité proposée; reste $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$.

Je dis ensuite; dans ce reste, il y a un produit du triple du quarré du premier terme a que je viens de trouver, par le second terme que je cherche: j'élève donc a au quarré a^2; je le triple & j'ai $3a^2$, par lequel je divise le reste, en disant; $\frac{6a^2b}{3a^2} = 2b$. Mais $a + 2b$ est le second terme de la racine, la somme de son produit par $3a^2$, plus le produit de son quarré par $3a$, plus son cube, doit être égale au reste de la quantité. Or cette somme est effectivement $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$, comme le reste de la quantité: donc la racine cubique cherchée est $a + 2b$.

179. Pour les nombres, il faut d'abord connoître les dix premiers cubes parfaits.

Cubes. . . . . 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729. 1000.
Racines cub. . 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Ce qui a donné lieu de remarquer qu'un nombre ne peut avoir à son cube plus que le triple de ses chiffres; car 10, premier des nombres composés de deux chiffres, a pour cube 1000, premier des nombres composés de 4 chiffres. 100 premier des nombres de 3 chiffres, a pour cube 1000000 premier des nombres de 7 chiffres, &c. On peut même, par une semblable induction, conclure en général, qu'*un nombre composé de* n *chiffres, n'en peut avoir à sa puissance* p *plus que* pn *n'en exprime.*

Cela posé, soit le nombre 74088 dont on demande la racine cubique . . . Il faut le partager en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, sauf à n'en laisser qu'un ou deux pour la derniere tranche. Il faut dire ensuite la racine cubique la plus

proche de la premiere tranche 74, eſt 4; j'écris 4 à la racine, j'éleve 4 à ſon cube, & j'ai 64 que je ſouſtrais de 74; reſte 10. J'abaiſſe la ſeconde tranche 088 à côté du reſte 10. J'éleve au quarré la premiere partie trouvée 4, laquelle doit valoir 40 à l'égard du ſecond chiffre que nous cherchons; j'ai 1600 que je triple, & j'écris le produit 4800 pour diviſeur. Puis je dis, $\frac{10088}{4800} = 2$; nombre qu'il faut éprouver avant de l'écrire à la racine. Pour cet effet, je multiplie le diviſeur 4800 par la ſeconde partie trouvée; le produit eſt 9600, que j'écris à l'écart; j'éleve 2 au quarré 4, je le multiplie par 40, qui eſt la premiere partie de la racine, j'en multiplie le produit 160 par 3, & j'écris le nouveau produit 480 au-deſſous de 9600. Enfin j'éleve 2 au cube, & j'ai 8 que j'écris au-deſſous de 480. J'ajoute enſemble les deux produits & ce cube, & parce que leur ſomme 10088 eſt égale au reſte 10088, & qu'il n'y a plus de tranches à abaiſſer, je dis que la racine cubique de 74088 eſt préciſément 42.

74,088	42. . . . Raci.	Soit $a = 40$	Donc	$3a^2b = 9600$
64	4800 . . Divr.	$b = 2$		$3ab^2 = 480$
10 088				$b^3 = 8$
10 088				10088
0				

Autre Exemple. Soit propoſé d'extraire la racine cubique du nombre 5305472 . . . . Je le diviſe par tranches à l'ordinaire, & je dis; la racine cubique la plus proche de la tranche 5, eſt 1; le cube de 1 eſt 1, je l'ôte de 5, reſte 4. J'abaiſſe la ſeconde tranche, & j'ai 4305. Je dis, 1 étant la premiere partie de la racine, vaut 10 à l'égard de la ſeconde; le quarré de 10 eſt 100, ſon triple eſt 300, je diviſe 4305 par 300, en diſant, en 43 combien de fois 3? il doit y être 14 fois; mais parce qu'on ne met jamais plus de 9 au quotient, & même qu'en y mettant 9 dans le cas préſent, on y mettroit trop, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par les regles précédentes, je trouve après avoir eſſayé 9 & 8, qu'ils ne conviennent pas: j'eſſaye 7.

Et pour cela, je multiplie d'abord 300 par 7; j'ai 2100 pour produit: puis $7 \times 7 = 49$, enſuite $49 \times 10 = 490$, enfin $490 \times 3 = 1470$; j'écris 1470 au-deſſous de 2100. Après quoi je dis: $7 \times 7 \times 7 = 343$, je l'écris au-deſſous de 1470, j'ajoute enſemble 2100, 1470, & 343, & parce que la ſomme 3913 peut ſe ſouſtraire du nombre 4305, je conclus que le chiffre 7 eſt le ſecond de la racine que je cherche.

Comme il eſt reſté 392 de la derniere ſouſtraction, j'abaiſſe à côté de ce reſte la troiſieme tranche 472, & je regarde 17 que j'ai

déja trouvé, comme la premiere partie de la racine : elle vaut donc 170 à l'égard de la partie qui m'occupe ; j'en prends le quarré 28900, je le triple, & j'ai 86700, par lequel je diviſe le troiſieme membre 392472, j'ai le quotient 4. Pour le vérifier, je multiplie le diviſeur 86700 par 4, & j'écris au-deſſous le produit 346800. Puis $4 \times 4 = 16$ .... $16 \times 170 \times 3 = 8160$. J'écris 8160 au-deſſous de 346800. J'écris encore au-deſſous le cube de 4, qui eſt 64. J'ajoute ces trois quantités, & j'ôte leur ſomme 355024 du troiſieme membre 392472, reſte 37448. Et parce qu'il n'y a plus de tranches à abaiſſer, je dis que la racine cubique demandée eſt 174, & que le nombre donné n'eſt pas un cube exact, mais qu'il a 37448 unités de trop.

Si l'on veut avoir égard à ce reſte, il faut chercher des décimales pour la racine. On les trouve, en ajoutant aux reſtes autant de fois trois zéros, que l'on veut avoir de décimales, & en continuant l'extraction, regardant chaque fois tout ce qui a déja été trouvé à la racine, comme la premiere partie d'une racine dont on cherche la ſeconde. L'exemple fera mieux comprendre tout cela.

5,305,472	174,41 &c.	Rac.
1	300	I. Div.
4305	86700.	II. Div.
3913	9082800	III. Div.
392472	912460800	IV. Div.
355024	&c.	
37448000		
36414784		
1033216000		
912513121		
120702879 &c.		

La longueur des opérations qu'il faut faire pour ces ſortes d'extractions approchées, rend encore plus précieuſes les deux méthodes ſuivantes.

Deux Méthodes pour extraire par approximation les Racines d'un degré quelconque.

180. LA Formule du binome eſt d'une grande utilité, pour l'extraction des racines approchées, quand il n'y a pas moyen d'en avoir d'exactes ; ce qui arrive très-ſouvent. Si on demandoit, par exemple, la racine quarrée de

$a^2 - x^2$, il eſt clair (165) que par quelque méthode que ce fût, on ne parviendroit jamais à la trouver, d'une maniere rigoureuſe; de ſorte qu'en multipliant enſuite cette racine par elle-même, on reproduisît la quantité $a^2 - x^2$. On a recours alors aux méthodes d'approximation, qui ſont la derniere reſſource des calculs déſeſpérés.

Ces méthodes ſont des applications plus ou moins directes de la Formule ſi connue pour élever un binome à une puiſſance quelconque (148). Car telle eſt la généralité de cette Formule, qu'elle s'étend à tous les cas des puiſſances fractionaires, qui ne ſont autre choſe, comme l'on ſait (159), que des racines à extraire.

Soit donc propoſé de trouver la racine approchée de $a^2 - x^2$..... D'abord on comparera cette quantité avec celle du binome $(a+b)^m$, & on ſuppoſera que a^2 tient ici lieu de a, que $-x^2$ tient lieu de b; & que $m = \frac{1}{2}$. Puis on ſubſtituera ces trois valeurs aux lettres qui les repréſentent dans la Formule .....

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,b + m.\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}\,b^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\,a^{m-3}\,b^3 + \&c.$$

Et on aura, toute réduction faite,

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \left\{ a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} - \&c. \right.$$

181. On eût trouvé, quoique d'une maniere plus laborieuſe, la même ſérie, par la ſimple regle de l'extraction, telle que nous l'avons donnée (165). Car la racine quarrée de a^2 eſt a. Souſtrayant a^2 de la quantité $a^2 - x^2$, reſte $-x^2$ qu'il faut diviſer par $2a$. On a donc $-\frac{x^2}{2a}$ pour le ſecond terme de la racine: ſon quarré eſt $\frac{x^4}{4a^2}$, & ſon produit par $2a$ eſt $-x^2$. Otant donc ces deux termes, du premier reſte $-x^2$, on aura pour ſecond reſte $-\frac{x^4}{4a^2}$ qu'il faudra diviſer par le double de tout ce qui eſt déja à la racine.

Ce nouveau diviſeur eſt $2a - \frac{x^2}{a}$; on aura donc $-\frac{x^4}{8a^3}$ pour troiſieme terme de la racine. Le quarré de ce terme eſt $\frac{x^8}{64a^6}$, & ſon produit par $2a - \frac{x^2}{a}$ eſt $-\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4}$. Souſtrayant donc ce produit du reſte $-\frac{x^4}{4a^2}$, on aura pour troiſieme reſte $-\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$, que l'on diviſera par le double de ce qui eſt déja à la racine ; & de cette diviſion proviendra $-\frac{x^6}{16a^5}$, quatrieme terme de la ſérie. En continuant le même procédé, on trouveroit les termes ſuivants ; & voilà où l'on en étoit réduit, lorſque Newton publia ſa formule.

182. Au lieu d'écrire les coefficients tout réduits, comme nous l'avons fait (180), on eût pu les écrire tout au long, ce qui eût ſervi à faire connoître la loi qu'ils obſervent. Alors on eût trouvé que . . . . .

$$(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} a - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{x^6}{a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot \\ \frac{x^8}{a^7} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{x^{10}}{a^9} - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{x^{12}}{a^{11}} - \text{\&c.\&c.} \end{cases}$$

Où l'on voit que les nombres pairs ſont les ſeuls qui entrent dans la compoſition des dénominateurs, tandis que les ſeuls nombres impairs ſe trouvent dans les numérateurs. Il eſt donc bien facile de pouſſer l'approximation auſſi loin que l'on voudra.

Si au lieu de la quantité $a^2 - x^2$ on avoit $a^2 + x^2$, le réſultat ſeroit le même, aux ſignes près, qui deviendroient alternatifs. Car $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^5} - \text{\&c.}$

183. Les racines approchées des nombres qui n'en ont pas d'exactes, ſe calculent aiſément par ces formules. Exemple..... On ſait que la racine quarrée de 5 eſt entre 2 & 3. Pour la trouver d'une maniere approchée, partageons 5 en deux parties, dont l'une ſoit 4, & l'autre 1. Nous aurons $a^2 = 4 \ldots x^2 = 1 \ldots$ &

$(4+1)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \&c.$

En s'arrêtant aux deux premiers termes, on auroit $2 + \frac{1}{4}$ pour la racine de 5; ce qui n'eſt pas tout-à-fait juſte, puiſque $2 + \frac{1}{4}$, ou $\frac{9}{4}$ élevés au quarré donnent $\frac{81}{16} = 5 + \frac{1}{16}$. Cette premiere approximation nous montre donc que la racine cherchée eſt entre 2 & $2 + \frac{1}{4}$.

Si on calcule les trois premiers termes de la formule, on trouvera $2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64}$, ou $2 + \frac{15}{64}$, ou $\frac{143}{64}$ pour racine. Or $\left(\frac{143}{64}\right)^2 = \frac{20449}{4096} = 5 - \frac{31}{4096}$. La racine approchée eſt donc plus grande que $2 + \frac{15}{64}$. Mais nous venons de voir qu'elle eſt moindre que $2 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{16}{64}$. Elle eſt donc entre $2 + \frac{16}{64}$ & $2 + \frac{15}{64}$.

En calculant d'autres termes, on reſſerreroit de plus en plus les limites entre leſquelles eſt compriſe la racine de 5; ſans pouvoir cependant parvenir à ſa vraie valeur: car la racine de 5 eſt incommenſurable, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a aucun nombre ni entier, ni fractionaire, qui, multiplié par lui-même, puiſſe donner 5 pour produit. Cela eſt évident pour les nombres entiers, & on trouvera ſans beaucoup de peine la raiſon pour les nombres fractionaires.

Autre exemple. Soit propoſé de trouver la racine de 8.... Je fais $8 = 9 - 1$.... $a^2 = 9$... $x^2 = 1$, & je ſubſtitue ces valeurs dans la formule $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3} - \&c.$ Je trouve, en ne calculant que

les deux premiers termes .... $(9-1)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$. Cette valeur n'eſt pas bien exacte, puiſque le quarré de $\frac{17}{6}$ eſt $\frac{289}{36} = 8 + \frac{1}{36}$. Mais en calculant les trois premiers termes, j'aurai $(9-1)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{216} = \frac{611}{216} = 3 - \frac{37}{216}$; valeur plus approchée, puiſque $\left(\frac{611}{216}\right)^2 = \frac{373321}{46656} = 8 + \frac{73}{46656}$.

Et pour mener encore plus rapidement l'approximation, je ferai $8 = \frac{373371}{46656} - \frac{73}{46656}$; .... $a^2 = \frac{373311}{46656}$, ou $\left(\frac{611}{211}\right)^2$ .... $x^2 = \frac{73}{46656}$; après quoi je calculerai les deux ou trois premiers termes de la formule. On trouvera le réſultat ſous la lettre G''.

184. L'extraction des racines cubiques ſe fait en ſuivant les mêmes procédés. Il n'y a de différence que dans les ſubſtitutions de l'expoſant. Pour avoir donc la racine cubique de $a+x$, on écrira .....

$(a+x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)a^{\frac{1}{3}-2}x^2 +$ &c ; d'où l'on tirera $(a+x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}x^3 -$ &c.

Cette expreſſion peut prendre auſſi la forme radicale ſuivante (163).

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{\frac{1}{3}x}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{\frac{2}{9}x^2}{\sqrt[3]{a^5}} + \frac{\frac{5}{81}x^3}{\sqrt[3]{a^8}} - \frac{\frac{10}{243}x^4}{\sqrt[3]{a^{11}}} +$$ &c.

Donc $\sqrt[3]{(1-y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} -$ &c.

Quand il s'agit de la racine cubique d'un nombre, on parvient à l'obtenir au moyen des ſubſtitutions convenables.

Exemple. Quelle eſt la racine cubique de 2?.... Je décompoſe 2 en $1+1$, & faiſant $a=1$.... $b=1$...., j'ai $(1+1)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}-$ &c.

Si je m'arrête aux deux premiers termes, la racine approchée devient $\frac{4}{3}$. Or $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2+\frac{10}{27}$. Donc cette valeur eſt trop grande, de $\frac{10}{27}$.

Prenons au lieu de 2, la quantité qui lui eſt égale, $\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, & ſuppoſons $a=\frac{64}{27}$.... $b=-\frac{10}{27}$; nous aurons $\left(\frac{64}{27}-\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}-\frac{5}{72}$ pour les deux premiers termes. Réduiſant $\frac{4}{3}-\frac{5}{72}$ à la quantité $\frac{91}{72}$, on trouvera que $\left(\frac{91}{72}\right)^3=\frac{753571}{373248}=2+\frac{7075}{373248}$. Ainſi $\frac{91}{72}$ eſt déja une racine fort approchée de celle que l'on demande.

Autre exemple. Quelle eſt la racine cubique de 100?.... Rép. $4+$ une fraction que l'on déterminera d'une maniere approchée, par le calcul ſuivant.

Soit $100=125-25$. (Le but de cette transformation eſt d'avoir pour a un cube parfait). Soit $125=a$.... $25=b$. On aura, en ne calculant que les deux premiers termes de la formule,

$$(125-25)^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}.125^{\frac{-2}{3}}.25-\text{ &c}=5-\frac{1}{3}.$$

Donc la premiere approximation donnera $\sqrt[3]{100}=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$, quantité un peu trop grande, puiſque $\left(\frac{14}{3}\right)^3=\frac{2744}{27}=101\frac{17}{27}$.

On fera donc $100=\frac{2744}{27}-\frac{44}{27}$, & par de nouvelles ſubſtitutions, on trouvera pour racine plus approchée, $\frac{2047}{441}=4+\frac{283}{441}$.

Ce réſultat ſurpaſſe encore la racine cubique de 100; puiſque $\left(\frac{2047}{441}\right)^3=\frac{8577357823}{85766121}=100+\frac{6585723}{85697721}=100,$ 908 &c. L'appro-

ximation eût été plus prompte par la voie des Logarithmes.

Il en ſeroit de même pour les racines quatriemes, cinquiemes, & ſuivantes.

Mais comme les approximations que l'on obtient par cette méthode ſont quelquefois trop lentes, nous ajouterons celle que Halley inſéra dans les *Tranſactions Philoſophiques* de 1694.

185. Seconde Méthode. Soit propoſé généralement d'extraire par approximation la racine m d'une quantité quelconque $a^m \pm b$ . . . . On peut ſuppoſer que cette racine eſt repréſentée par la quantité $a+d$, a exprimant un nombre entier, & d la fraction décimale qu'il faut ajouter à ce nombre pour avoir la racine cherchée.

Cela poſé, on aura $a+d = \sqrt[m]{(a^m \pm b)}$. Donc $(a+d)^m = a^m \pm b$. Donc $a^m + m\,a^{m-1}\,d + \frac{m.m-1}{2}\,a^{m-2}\,d^2 + \ldots$ &c $= a^m \pm b$. Négligeant les termes où la fraction d eſt élevée aux puiſſances ſupérieures au quarré, effaçant de part & d'autre a^m, & diviſant le reſte par m, on aura $a^{m-1}\,d + \frac{m-1}{2}\,a^{m-2}\,d^2 = \pm\frac{b}{m}$.

Multipliant enſuite par 2, diviſant par $m-1$ a^{m-2}, & ordonnant, on trouvera $d^2 + \frac{2a}{m-1}\,d = \pm\frac{2b}{[mm]\,a^{m-2}}$. Complétant le quarré, extrayant la racine, & tranſpoſant, il viendra . . . . . $d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)\,a^{m-2}}\right)}$.

Enfin ſi l'on ajoute a aux deux membres de cette équation, on aura, généralement pour l'extraction d'une racine approchée quelconque, $a+d = \sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right)}$.

De cette Formule générale dont Halley ne parle pas, découlent par de ſimples ſubſtitutions toutes les formules particulieres qu'il a inſérées dans ſon Mémoire. Leur principale utilité conſiſte à donner des approximations que les Tables ordinaires de Logarithmes ne ſauroient donner. Commençons par détailler ces formules.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{1}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \tfrac{1}{8}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

&c. &c. &c.

Maintenant faiſons-en une application, en nous propoſant de trouver la racine cinquieme de 161900 avec 12 décimales.

* Je diviſe par 5 le logarithme de 161900 qui eſt 5,2092468 : j'ai 1,0418494, logarithme de 11,012, racine approchée ; je fais $11{,}012 = a$: j'éleve 11, 012 à la cinquieme puiſſance, & j'ai $a^5 = 161931{,}378732020728832$, qui excede 161900 de 31, 378732020728832. Je fais cet excès $= b$, & j'ai $a^5 - b = 161900$; donc par la formule $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{1}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$, j'ai en ſubſtituant les nombres.... $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = 8{,}259 + \sqrt{\left(7{,}579009 - \frac{31{,}378732020728832}{133533{,}607537728}\right)} =$

$8{,}259 + \sqrt{(7{,}579009 - 0{,}002349831828824315932711)} =$

$8{,}259 + \sqrt{(7{,}577659168171175684067289)} =$

$8{,}259 + 2{,}752573190339 = 11{,}011573190339$, racine cherchée.

APPLICATION DE L'ALGEBRE

A

LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES.

186. LA réſolution des problêmes mathématiques eſt fondée ſur les rapports connus entre des choſes que l'on ſait, & des choſes qu'on ignore. Ces rapports s'appellent les *conditions du Problême*; & quiconque eſt parvenu à exprimer algébriquement ces conditions, ne tarde guere à en déduire la connoiſſance de ce qu'il cherche.

Ce réſultat eſt donc le fruit de la comparaiſon des quantités connues avec celles qui ne le ſont pas. Les premieres s'appellent les *données du problême*, & on a coutume de les repréſenter par les premieres lettres, a, b, c, &c. ou α, β, γ, &c. Les autres portent ſimplement le nom de quantités *inconnues*: on les déſigne par les lettres x, y, z, φ, ω, &c.

Toute formule qui exprime l'égalité de deux ou de pluſieurs quantités, s'appelle généralement *Equation*. Le ſigne d'égalité partage l'équation en deux membres. Celui qui eſt à gauche s'appelle *le premier membre*; l'autre eſt le ſecond.

187. Le *Degré* d'une équation dépend de celui de la plus haute puiſſance des inconnues qu'elle renferme. Ainſi toute équation qui ne contient pas d'inconnue plus élevée que la premiere puiſſance, eſt une équation du premier degré. Les exemples ſuivants, $x = a \ldots z + b = y - c \ldots . 6\varphi - \varepsilon = (c + d)$ ſont donc autant d'équations de ce genre.

On les appelle auſſi quelquefois des *équations linéaires*, parce que

les inconnues qu'elles renferment, n'offrent qu'une ſeule *Dimenſion*, comme les lignes.

Lorſqu'une équation contient une ou pluſieurs inconnues élevées ſéparément au quarré, ou multipliées deux à deux, elle appartient aux *équations du ſecond degré*. Telles ſont les équations ſuivantes :

$x^2 = a \ldots z^2 + y^2 = \varphi \ldots xy = b \ldots x^2 + px = q \ldots$

Pour qu'une équation ſoit du *troiſieme degré*, il ſuffit qu'une de ſes inconnues ſoit élevée au cube. Ainſi les équations ſuivantes ...

$x^3 = c \ldots . x^3 + px^2 + qx = b \ldots \ldots \ldots y^3 - my = nz^2$

ſont toutes du troiſieme degré. L'équation $xyz = f$ eſt de la même claſſe, parce qu'elle contient le produit de trois inconnues ſimples. On doit en dire autant de l'équation $xy^2 = g$.

Les équations du quatrieme degré ſe diſtinguent avec la même facilité, & ainſi des autres. Mais de quelque degré qu'elles ſoient, le but général de leur réſolution eſt de faire connoître la valeur des inconnues qu'elles renferment.

Pour atteindre ce but dans les équations du premier & du ſecond degré, il ne faut qu'un peu d'habitude du calcul algébrique; & on va voir avec quelle facilité cette habitude s'acquiert. La réſolution des équations du troiſieme & du quatrieme degré eſt ſujette à des difficultés. Celle des équations du cinquieme eſt encore à trouver; & on verra par la ſuite à quoi tiennent les obſtacles qui ont rendu juſqu'à préſent inutiles tous les efforts que l'on a faits pour y parvenir. Commençons par les équations du premier degré.

Réſolution des Equations du premier degré.

188. Une équation eſt réſolue quand on eſt parvenu à laiſſer toute ſeule dans un membre l'inconnue dont on cherche la valeur, & à n'avoir dans l'autre membre que

des quantités connues. Alors en effet le problême eſt réſolu, puiſqu'une quantité égale à des quantités connues ceſſe d'être inconnue.

I. PROBLEME. Un pere a ſix fois autant d'âge que ſon fils, & la ſomme des deux âges eſt de 91 ans. Quel eſt l'âge du fils? Quel eſt celui du pere?

Pendant que les Arithméticiens tâtonneront, l'Algébriſte dira.... J'appelle x l'âge du fils; donc par l'énoncé du problême, l'âge du pere ſera $6x$. Or ces deux âges réunis doivent faire 91 ans; donc $7x = 91$; & voilà le problême *mis en équation*.

A préſent qu'il eſt, pour ainſi dire, traduit en langage algébrique, le reſte de la ſolution n'eſt qu'un jeu.... Si $7x = 91$, dira-t-on, donc $x = \frac{91}{7} = 13$; & par conſéquent le fils a 13 ans. Le pere en a donc 78; & la preuve en eſt, que $13 + 78 = 91$; ce qui ſatisfait à la condition du problême.

189. Concluons de cet exemple, que pour *dégager l'inconnue*, quand elle eſt affectée d'un coefficient quelconque, il faut diviſer toute l'équation par ce même coefficient. Ainſi pour connoître la valeur de x dans l'équation ſuivante $ax = b$, on écrira $x = \frac{b}{a}$.

II. PROBLEME. Quel eſt le nombre dont le tiers & le quart ajoutés enſemble font 63?

Ce nombre m'eſt inconnu; mais quel qu'il ſoit, je l'appelle x. Son tiers eſt donc $\frac{x}{3}$ & ſon quart ſera $\frac{x}{4}$. Ces deux parties réunies doivent faire 63. J'ai donc pour équation du problême ... $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 63$.

Réduiſant au même dénominateur, & ajoutant les deux fractions, j'aurai ... $\frac{7x}{12} = 63$. Le coefficient de l'inconnue ſera donc $\frac{7}{12}$, par leſquels je diviſerai les deux membres de l'équation, ſuivant la regle précédente: ce qui me donnera.... $x = \frac{12.63}{7} = \frac{12.9.7}{7} = 12.9$

$=108$. Effectivement le tiers de 108 eſt 36, le quart de 108 eſt 27; & $36+27=63$.

190. Concluons de cet exemple que toutes les équations de cette forme . . . $\frac{ax}{b}=c$, ſe réſolvent en écrivant $x=\frac{bc}{a}$: c'eſt-à-dire que pour dégager une inconnue affectée d'un coefficient fractionaire, il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de ce coefficient, & les diviſer par ſon numérateur.

III. PROB. On demande un nombre tel, qu'en le diviſant par 5, on ait un quotient, qui ajouté au produit de ce même nombre par 4, & au multiplicateur 4, faſſe $12\frac{1}{2}$.

Si on appelle x le nombre demandé, on aura .... $\frac{x}{5}+4x+4=12\frac{1}{2}$. Multipliant tout par le dénominateur 5, pour faire diſparoître la fraction $\frac{x}{5}$ on aura... $20x+x+20=62\frac{1}{2}$; d'où l'on tirera $21x+20=62\frac{1}{2}$.

191. Or toutes les fois que deux quantités ſont égales, on peut ajouter ou ſouſtraire de part & d'autre une même quantité; on peut tout multiplier ou tout diviſer par le même nombre; on peut tout élever à une même puiſſance, ſans détruire l'égalité des deux membres de l'équation.

Je puis donc ſouſtraire 20, par exemple, de chacun de ces membres dans l'équation ... $21x+20=62\frac{1}{2}$, & en déduire .... $21x=42\frac{1}{2}$. Mais par la premiere regle (189) on a ... $x=\frac{42\frac{1}{2}}{21}$; donc $x=2+\frac{1}{42}=\frac{85}{42}$; ce qui eut été un peu long à trouver par les tâtonnements de l'Arithmétique.

192. Il ſuit de la remarque précédente que pour faire paſſer une quantité poſitive d'un membre dans un autre, on n'a qu'à effacer cette quantité dans le membre où elle eſt, & l'écrire dans l'autre membre avec le ſigne —. Ainſi

toute équation de cette forme... $x + a = b$, se réduit à celle-ci... $x = b - a$.

Et réciproquement pour transporter d'un membre à l'autre une quantité négative, on l'effacera dans le membre où elle est, & on l'écrira dans l'autre membre avec le signe +. Exemple... $x - m = p$; donc $x = p + m$. En général, si on a.... $x \pm c = h$, on en conclura que $x = h \mp c$. Cette regle est d'un grand usage.

193. Avec ce petit nombre de principes & d'opérations bien élémentaires, il n'y a point d'équation du premier degré qui ne se résolve très-promptement. Prenons pour exemple un des cas les plus compliqués; & proposons-nous de trouver la valeur de l'inconnue x dans l'équation suivante.

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n.$$

D'abord je vois que les deux membres contiennent une même quantité $\frac{cx}{f}$, affectée du même signe. L'égalité subsistera donc, après que l'on aura retranché de part & d'autre cette quantité; (quand on trouve ainsi précédés du même signe des termes communs aux deux membres, il ne faut pas manquer de les effacer). On n'aura donc plus à résoudre que l'équation,

$$\frac{ax}{b} + m = px + n.$$

Je vois ensuite que pour laisser x toute seule dans un membre, il faut que je transporte du même côté les quantités connues, & que l'autre membre soit formé seulement des termes qui contiennent x. La regle des transpositions observée me donne

$$\frac{ax}{b} - px = n - m.$$

194. REMARQUE. Quelquefois on est embarrassé pour sa-

voir dans quel ſens on fera ces ſortes de tranſpoſitions : ici, par exemple, il n'y a pas plus de raiſon pour tranſpoſer le terme px dans le premier membre, que le terme $\frac{ax}{b}$ dans le ſecond. Cela dépend uniquement de celui qui réſoud le problême. La valeur de l'inconnue eſt la même dans les deux cas. Seulement elle eſt poſitive dans l'un & négative dans l'autre.

A préſent que l'équation eſt tranſpoſée, il ne reſte plus qu'à dégager l'inconnue ; & pour cela, je multiplie tout par le dénominateur b, ce qui me donne ;

$$ax - bpx = bn - bm.$$
$$\text{ou } (a - bp)x = (n - m)b.$$

A cette nouvelle préparation j'en fais ſuccéder une autre, qui eſt celle de la diviſion de toute l'équation par le coefficient de l'inconnue. Ce coefficient eſt $a - bp$: j'ai donc enfin,

$$x = \frac{(n-m)b}{a-bp}.$$

IV. PROB. A la ſuite d'une inondation il eſt tombé dans un même jour la moitié des maiſons d'une Ville ; il en eſt tombé le tiers le lendemain, & le douzieme dans les jours ſuivants ; on n'en compte plus que 63 ſur pied. De combien de maiſons cette Ville étoit-elle compoſée avant l'inondation ?

Soit x le nombre cherché ; $\frac{x}{2}$ ſera l'expreſſion du nombre de bâtiments écroulés le premier jour : $\frac{x}{3}$ & $\frac{x}{12}$ exprimeront combien il en eſt tombé dans les jours ſuivants ; l'équation du problême ſera donc :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 63 = x.$$

Suppoſons, pour abréger, que $63 = a$, & que l'on multiplie toute l'équation par le plus grand dénominateur qui eſt ici 12. On aura

$$6x + 4x + x + 12a = 12x.$$
Réduiſant . . . . . $11x + 12a = 12x.$

Retranchant de part & d'autre la quantité commune $11x$, il reſtera pour ſolution du Problême,

$$12a = x.$$

Cette Ville renfermoit donc dans ſon enceinte 756 maiſons.

V. PROB. Trois amis que je déſignerai, l'un par B, l'autre par C, & le troiſieme par D, ont pris en commun des billets de Loterie. La miſe de B + celle de C font 21$^{\#}$. Ce que B & D ont mis d'argent fait 24$^{\#}$. Les deux miſes de C & de D font 27$^{\#}$. Quelle eſt la miſe de chacun?

Je ſuppoſe $a = 21 \ldots e = 24 \ldots f = 27$; & j'appelle x la miſe de B; donc $a - x$ eſt la miſe de C, & $e - x$ eſt celle de D. Or l'énoncé du problême porte que ces deux dernieres miſes font 27$^{\#}$. Donc... $a - x + e - x = f$; d'où je tire,

$$x = \frac{a + e - f}{2} = 9^{\#}$$

ce qui me donne 12 & 15$^{\#}$ pour les miſes reſpectives de C & de D.

195. Au premier apperçu de ce problême, il paroiſſoit indiſpenſable de regarder les trois miſes comme autant d'inconnues différentes: mais en y regardant de plus près, on a dû voir qu'une ſeule de ces miſes étant déterminée, les deux autres ne pouvoient manquer par-là même d'être déterminées auſſi. D'où nous conclurons que le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des queſtions particulieres que l'énoncé d'un problême renferme; mais du degré de liaiſon, qui exiſte entre les conditions du problême propoſé.

Ce n'eſt pas, au reſte, que l'on ne fût également parvenu à la ſolution du dernier, en introduiſant trois inconnues dans le calcul. On en verra la preuve tout à l'heure: mais en général il faut toujours tendre aux ſolutions les plus ſimples; & c'eſt au tact particulier de chacun qu'il appartient uniquement de mettre ſur la voie qui mene à ces ſortes de ſolutions. Ni Livres, ni Maîtres ne peuvent

donner la ſagacité néceſſaire pour démêler dans un problême, ce qui en eſt le principal, & ce qui n'en eſt que l'acceſſoire. Les exemples cependant donnent une grande facilité : c'eſt pourquoi nous en ajouterons encore quelques-uns.

VI. PROB. Par le teſtament qu'un pere a fait avant ſa mort, le fils aîné doit prélever d'abord 1000 écus ſur la maſſe des biens, puis prendre le ſixieme de ce qui reſtera. La part du ſecond fils doit être formée; 1°, de 2000 écus; 2°, du ſixieme de ce qui reſtera. La part du troiſieme doit être compoſée de 3000 écus & du ſixieme de ce qui reſtera, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier, dont la part ſera le reſte de celles de ſes freres. Les diſpoſitions du teſtament s'exécutent, & le partage de chacun des enfants ſe trouve égal . . . On demande 1°, quel eſt le bien du pere? 2°, combien il y a d'enfants? 3°, quelle eſt la part de chacun?

On ſeroit porté à croire qu'il y a réellement trois inconnues dans ce problême. Cependant avec un peu de réflexion on verra que ſi le bien du pere étoit connu, tout le reſte le ſeroit. Effectivement la part du fils aîné réſultant de la ſomme de 1000 écus + du ſixieme de ce qui reſteroit, on n'auroit qu'à prélever ces mille écus ſur le bien total, ſuppoſé connu, & puis on ajouteroit à ces mille écus, le ſixieme du reſte, pour connoître la part de l'aîné. Mais comme par l'énoncé du problême toutes les parts doivent être égales, il ſuffiroit de diviſer le bien du pere par la portion du fils aîné, pour connoître le nombre des parts, & par conſéquent celui des enfants. Cela poſé, occupons-nous de la recherche du bien du pere.

Je l'appelle x, & pour abréger je fais $a = 1000$ écus. Après quoi je raiſonne ainſi : quand l'aîné aura pris mille écus, le reſte du bien ſera exprimé par $x - a$. Il doit prendre le ſixieme de ce reſte, & ce ſixieme eſt $\frac{x-a}{6}$; ſa part ſera donc $a + \frac{x-a}{6}$, ou en réduiſant au même dé-

nominateur, $\frac{5a+x}{6}$. Cette part doit être égale à celle de chacun de ſes freres; cherchons donc, par exemple, la valeur algébrique de la part du ſecond, afin de l'égaler à la valeur déja trouvée pour celle de l'aîné.

Quand du bien total on a ſouſtrait la part de l'aîné, le reſte eſt exprimé par $x-\frac{5a+x}{6}=\frac{5x-5a}{6}$. Sur ce reſte, le ſecond fils doit prélever 2000 écus $=2a$; il ne reſtera donc que $\frac{5x-5a}{6}-2a=\frac{5x-17a}{6}$, dont il faut prendre le ſixieme, qui eſt $\frac{5x-17a}{36}$. Ajoutant ce ſixieme aux 2000 écus, on aura pour la part du ſecond fils, $2a+\frac{5x-17a}{36}=\frac{55a+5x}{36}$. Cela poſé, on aura pour l'équation du problême,

$$\frac{5a+x}{6}=\frac{55a+5x}{36}.$$

Mais auſſi-tôt qu'un problême du premier degré eſt mis en équation, il n'y a plus de difficulté. On trouve tout de ſuite la valeur de l'inconnue en la laiſſant ſeule dans un membre. Ici, par exemple, en multipliant par 36 les deux membres de l'équation, on aura

$$30a+6x=55a+5x.$$

ôtant de part & d'autre les quantités communes qui ſont $30a$ & $5x$, il viendra enfin pour la valeur du bien que le pere laiſſe.... $x=25a=25000$ écus.

Et par conſéquent la part de chaque fils eſt de 5000 écus. Il y avoit donc cinq freres.

VII. *A* & *B* ſe ſont mis au jeu, ayant autant d'argent l'un que l'autre. Ils en ont perdu une partie; la perte de *A* eſt de 12^{tt}, celle de *B* eſt de 57^{tt}, & par-là *B* n'a plus que le quart de l'argent qui reſte à *A*. Combien avoient-ils avant le jeu?

Ils avoient x^{tt}, & puiſque la perte de *A* eſt de 12^{tt},

il lui reſte $x-12$. La perte de B eſt de 57e. Ce qui lui reſte eſt donc $x-57$. Or la condition du problême eſt que pour égaler ces deux reſtes, il faut quadrupler le dernier; donc l'équation cherchée eſt

$$x-12=4(x-57)$$

donc $x=72^{\text{e}}$.

VIII. Quel eſt le nombre dont le tiers & le cinquieme diffèrent entre-eux de 8?

Soit x ce nombre . . . Soit $a=8$ . . $\frac{1}{3}=\frac{1}{m}$ . . . $\frac{1}{5}=\frac{1}{n}$ . . . On aura $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=a$; donc $x=\frac{amn}{n-m}=60$; & en effet le tiers de 60 eſt 20, le cinquieme de 60 eſt 12, & $20-12=8$.

IX. On a diviſé un nombre par 6, & le quotient s'eſt trouvé tel, qu'en l'ajoutant avec le diviſeur & le dividende, on a eu pour ſomme totale 69. Quel eſt ce nombre?

Soit $a=6$ . . . $b=69$. On aura $x+\frac{x}{a}+a=b$; donc $x=\frac{(b-a)a}{a+1}$, & ſubſtituant les valeurs de a & de b, on trouvera que $x=54$.

X. Etant données la ſomme & la différence de deux quantités, trouver chacune de ces quantités.

Soit a la ſomme, b la différence, x la plus grande des deux inconnues, y la plus petite. On aura les deux équations ſuivantes;

$$x+y=a \ldots x-y=b.$$

Si on prend la valeur de x dans la premiere équation, on aura $x=a-y$.

Si on la prend dans la ſeconde, on trouvera $x=b+y$. Or ces deux valeurs étant néceſſairement égales, on aura $a-y=b+y$; équation qui ne renfermant plus qu'une inconnue, ſe réſout avec la plus grande facilité par une ſimple tranſpoſition, en diſant $a-b=2y$; d'où l'on tire $y=\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.

196. Or la valeur de y étant une fois connue, il n'y a

plus qu'à la ſubſtituer dans l'équation $x = a - y$, ou $x = b + y$, pour trouver $x = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

On peut donc dire généralement (& cette généralité dans les réſultats eſt encore une fois un des plus précieux avantages de l'Algèbre) que *toutes les fois que l'on connoît la ſomme & la différence de deux quantités, la plus grande ſe trouve en ajoutant la moitié de la ſomme à la moitié de la différence; & que la plus petite eſt égale à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence.*

APPLICATIONS. Deux freres ont 57 ans à eux deux; le frere aîné a 7 ans de plus que le cadet. Quel eſt l'âge de chacun?

La moitié de la ſomme eſt 28 $\frac{1}{2}$; la moitié de la différence eſt 3 $\frac{1}{2}$. L'aîné a donc 32 ans; le cadet n'en a que 25.

Une maiſon compoſée de deux étages a 35 pieds de haut. Le premier étage eſt de 4 pieds plus élevé que le ſecond. Quelle eſt la hauteur des deux étages?

$a = 35 \ldots b = 4$. Donc $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 19\frac{1}{2}$, & $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 15\frac{1}{2}$.

Deux poids réunis peſent 2878 livres, le moins lourd peſe 156 livres de moins que l'autre. Combien peſent-ils chacun?

$a = 2878 \ldots b = 156$. Donc $x = 1517 \ldots y = 1361$.

197. Au lieu de réſoudre ce petit problême en comparant les deux valeurs de x, on eût pu ajouter les deux équations $\ldots x + y = a \ldots x - y = b$, ce qui eût fait trouver tout de ſuite la valeur de $x = \frac{a+b}{2}$; & ſi on eût ſouſtrait la ſeconde équation de la premiere, la valeur de y ſe ſeroit trouvée avec la même promptitude. Mais cet abrégé ne ſe préſente pas toujours d'une maniere auſſi facile.

Un pere, avons-nous dit (*page 116*), a ſix fois autant d'âge que ſon fils, & la ſomme des deux âges fait 91 ans. Ne pourroit-on pas ramener ce problême à ceux qui ont deux inconnues?

Soit x l'âge du pere, y l'âge du fils. On aura

$$x = 6y \ldots x + y = 91.$$

Souſtrayant la premiere équation de la ſeconde, on trouvera que

$$y = 91 - 6y. \text{ Donc } y = 13,$$

& par conſéquent $x = 78$, comme nous l'avions trouvé par la premiere méthode, qui eſt toujours préférable quand on peut l'employer.

198. Lorſqu'on a pluſieurs inconnues, il faut les réduire ſucceſſivement à une ſeule, ou, comme l'on dit, il faut les *éliminer* toutes, hors une derniere, qui ſe trouvant enfin en égalité avec des quantités connues, ceſſe d'être inconnue.

Cette *élimination* ſe fait en prenant d'abord la valeur d'une même inconnue dans deux équations différentes, & en égalant ces deux valeurs, pour avoir en y, par exemple, la valeur de x. C'eſt ainſi qu'après avoir trouvé dans le dernier problême $\ldots x + y = a \ldots x - y = b$, nous avons d'abord conclu $\ldots x = a - y \ldots x = b + y$, & puis $a - y = b + y$.

On peut auſſi, après avoir pris la valeur d'une inconnue, ſubſtituer cette valeur par-tout où l'inconnue ſe trouve; cela revient abſolument au même.

199. L'élimination des inconnues ne peut donc être pouſſée juſqu'au bout, ſi on n'a pas autant d'équations que d'inconnues. Car il eſt bien clair que ſi on propoſe de trouver deux quantités x & y dont on ne connoît que la ſomme a, la condition unique du problême, exprimée par l'équation $x + y = a$, ne permet pas d'éliminer aucune des deux inconnues: en prenant en effet la valeur de x, par exemple, c'eſt-à-dire, en laiſſant x toute ſeule dans un membre, on n'apprend autre choſe, ſinon qu'elle eſt égale à une quantité $a - y$, auſſi inconnue qu'elle. Ces ſortes de problêmes, dans leſquels il y a plus d'inconnues que de conditions, s'appellent des *Problêmes indéterminés*. Nous en parlerons dans la ſuite.

XI. Une perſonne ayant des jetons dans ſes deux mains en prend un de la droite pour l'ajouter à ceux de la gauche, & par-là il s'en trouve autant dans une main que dans l'autre. Si cette même perſonne eût fait paſſer deux jetons de la gauche dans la droite, cette derniere main en eût contenu le double de ce qui ſeroit reſté dans l'autre. Là deſſus on demande combien de jetons il y avoit d'abord dans chaque main.

Soit x le nombre qu'il y en avoit dans la droite; ſoit y le nombre de ceux de la gauche. On aura par la premiere condition . . . . . $x-1=y+1$.
& par la ſeconde . . . . $x+2=2(y-2)$.

On pourroit prendre dans la premiere équation la valeur de x, & la ſubſtituer dans la ſeconde, pour n'avoir plus que l'inconnue y à évaluer : mais il eſt plus court de ſouſtraire cette premiere équation de la ſeconde. Le réſultat donnera $y=8$, & par conſéquent $x=10$; nombres qui ſatisfont aux deux conditions du problême.

XII. Un Orfevre a fait payer 318$^{\#}$ pour 3 onces d'or & 5 onces d'argent. Il a fait payer auſſi 522$^{\#}$ pour 5 onces d'or & 7 onces d'argent. A quel prix eſt donc l'once d'or? A quel prix eſt l'once d'argent?

Soient x & y les valeurs cherchées. Soient $a=318^{\#}\ldots$ $b=522$. On aura

$$3x+5y=a \ldots 5x+7y=b.$$

Mais à cauſe des coefficients différents qui affectent les mêmes inconnues, il n'eſt pas poſſible d'en éliminer aucune par la ſeule addition ou ſouſtraction des deux équations, comme nous l'avons pratiqué ci-deſſus. Il faut donc tâcher de donner dans ces deux équations un même coefficient à l'une des deux inconnues, pour pouvoir enſuite l'éliminer par cette voie. Or pour cela, il ſuffit de multiplier la premiere équation par le coefficient que cette inconnue a dans la ſeconde, & de multiplier enſuite la ſeconde équation par le coefficient que cette même inconnue a dans la premiere.

EXEMPLE. Je voudrois éliminer x des deux équations pré-

cédentes . . . . je multiplie la premiere par 5 (coefficient de x dans la ſeconde), & la ſeconde par 3 (coefficient de x dans la premiere). Les produits ſont

$$15x + 25y = 5a \quad . \quad . \quad . \quad 15x + 21y = 3b.$$

Je ſouſtrais le ſecond du premier ; le reſte eſt $4y = 5a - 3b$. Donc $y = 6^{*}$. Je ſubſtitue cette valeur dans l'une des deux équations primitives, & j'en déduis $x = 96^{*}$. Ces deux prix rempliſſent les conditions du problême.

On eût trouvé les mêmes valeurs par la ſubſtitution, mais le calcul eût été un peu plus long. Au reſte, pour traiter ces ſortes de problêmes avec toute la généralité dont ils ſont ſuſceptibles, nous réſoudrons les deux équations ſuivantes,

$$px + qy = a \quad . \quad . \quad . \quad mx + ny = b.$$

En multipliant la premiere équation par m, & la ſeconde par p, nous aurons,

$$mpx + mqy = am \quad . \quad . \quad . \quad mpx + npy = bp,$$

& en ſouſtrayant la ſeconde de la premiere, il viendra

$$mqy - npy = am - bp$$

$$\text{donc } y\,(mq - np) = am - bp$$

$$\text{& par conſéquent . . . . } y = \frac{am - bp}{mq - np}.$$

Reſte à ſubſtituer cette valeur dans une des deux équations générales, pour trouver la valeur de x.

Subſtitution faite, on trouvera que $x = \frac{bq - an}{mq - np}$.

Et ſi on donne aux lettres m, n, p, q les valeurs reſpectives qu'elles ont dans l'énoncé du dernier problême, on verra que x & y ſeront reſpectivement 96^{*} & 6^{*}, comme ci-deſſus. Il y aura même cette facilité de plus, qu'en variant tant que l'on voudra les valeurs des données, on n'aura que de ſimples ſubſtitutions à faire dans les formules des valeurs de x & de y, pour réſoudre tous les problêmes analogues à celui-là. Voilà pourquoi les ſolutions générales ſont préférables, à tous égards, aux ſolutions particulieres.

XIII. On a acheté trois chevaux dont les prix sont tels que le prix du premier plus la moitié du prix du second & du troisieme font 25 louis. Le prix du second plus le tiers du prix des deux autres font 26 louis. Le prix du troisieme plus la moitié du prix des deux autres font 29 louis. Quel est le prix de chaque cheval ?

En appellant x, y & z les trois prix demandés, on auroit pour équations du problème,

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25 \ldots y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26 \ldots z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29;$$

& dans ces trois équations, après avoir fait disparoître les fractions, on éliminеroit successivement deux inconnues x & y, par exemple, afin d'obtenir une derniere équation où il n'y eût plus que l'inconnue z. Mais cette voie, qui a d'ailleurs l'avantage d'être applicable à tous les cas d'élimination, est plus longue que la voie que nous allons suivre.

Et d'abord, pour éviter les fractions, soit $6x$ le prix du premier cheval; soit $6y$ le prix du second, & $6z$ le prix du troisieme. Soit ensuite, pour abréger le calcul, $a=25 \ldots$ $b=26 \ldots c=29$.

Cela posé, on aura les trois équations suivantes,

$$\text{I. } 6x+3y+3z=a.$$
$$\text{II. } 6y+2x+2z=b.$$
$$\text{III. } 6z+3x+3y=c.$$

Or si on ajoute la premiere à la troisieme, on trouvera...

$$\text{IV. } 9x+6y+9z=a+c$$

Et si on multiplie cette derniere équation par 2 (coefficient de x & de z dans l'équation II) il viendra

$$\text{V. } 18x+12y+18z=2a+2c.$$

Comparant ce résultat au produit de l'équation II multipliée par 9 (coefficient des mêmes inconnues x & z dans l'équation IV), on verra que ces deux inconnues y sont affectées du même coefficient. Donc en soustrayant l'équation

tion IV de l'équation V, ces deux inconnues seront éliminées du même coup.

Soustraction faite, il restera

$$\text{VI. } 42y = 9b - 2a - 2c.$$

D'où on tire tout de suite,

$$6y = \frac{9b-2a-2c}{7} = \frac{234-50-58}{7} = 18 \text{ louis.}$$

C'est le prix du second cheval.

Pour avoir le prix du premier, je substitue la valeur de y dans les équations I & II, ce qui les change en celles-ci . . . . . $\begin{cases} 6x+9+3z=a \\ 2x+18+2z=b; \end{cases}$

puis je multiplie la premiere par 2, & la seconde par 3 (coefficients respectifs de z)

& j'ai . . . . . $\begin{cases} 12x+18+6z=2a \\ 6x+54+6z=3b. \end{cases}$

Je soustrais la seconde de la premiere, & il vient . . . . $6x-36=2a-3b$. Donc $6x=8$ louis, & $6z=16$. Les trois prix demandés sont donc 8 louis pour le premier cheval, 18 pour le second, & 16 pour le troisieme. Ces trois nombres satisfont aux trois conditions du problême, comme il est aisé de le vérifier, & il n'y en a pas d'autres qui puissent y satisfaire.

La résolution du problême V (*page* 117), où il s'agit de trois mises, sembloit également exiger trois inconnues; & dans le fait, on en seroit venu à bout très-facilement par cette méthode, si la premiere n'eût pas été encore plus facile. On s'y seroit pris de la maniere suivante.

Soient x, y, z les mises respectives des trois amis. Soit $a=21 \ldots e=24 \ldots f=27$, comme ci-dessus. On aura par les trois conditions du problême,

$$x+y=a \ldots x+z=e \ldots y+z=f.$$

Prenant la valeur de x dans la premiere équation, on aura . . . $x=a-y$; & substituant cette valeur dans la seconde équation, afin d'en éliminer x, on trouvera . . . . $a-y+z=e$.

On pourroit enſuite prendre la valeur de y dans ce dernier réſultat, & la ſubſtituer dans la troiſieme équation du problême : mais il eſt plus ſimple d'ajouter cette équation qui eſt $y+z=f$, à celle que l'on vient de trouver, $a-y+z=e$.

Par cette addition, l'inconnue y eſt éliminée, & il reſte . . . . . $a+2z=f+e$; d'où l'on tire $z=\frac{f+e-a}{2}=\frac{27+24-21}{2}=15$.

Or la valeur de z étant une fois connue, celle de x ſe déduit de l'équation $x+z=e$; laquelle, en tranſpoſant & ſubſtituant donne $x=9$. La ſubſtitution de la valeur de x dans l'équation $x+y=a$, ou celle de la valeur de z dans l'équation $y+z=f$, donne auſſi-tôt $y=12$.

Réſolution des Equations du ſecond degré.

200. Toute équation du ſecond degré peut être repréſentée par cette formule . . . $x^2+px=q$, dans laquelle p & q expriment des quantités connues. Celui-là donc aura réſolu généralement toutes les équations du ſecond degré, qui aura une fois trouvé la réſolution de la formule propoſée.

Or il eſt évident 1°, que pour obtenir dans ce cas la valeur de x, il faut extraire la racine quarrée de l'équation $x^2+px=q$. Il n'eſt pas moins évident 2°, que ſi $p=0$, cette équation ſe réduit à celle-ci. . . . . $x^2=q$; d'où on tire $x=\pm\sqrt{q}$.

Cette premiere ſuppoſition n'entraîne donc d'autre difficulté que celle de l'extraction des racines numériques. Le radical eſt affecté du double ſigne, à cauſe de la double valeur qui en réſulte pour l'inconnue (267).

201. Mais ſi p eſt une quantité réelle, comme il arrive le plus ſouvent, alors il faut *compléter le quarré* du premier membre (142), & ajouter au ſecond membre la même quantité qu'on aura ajoutée au premier. Or pour

compléter ce qui manque à la quantité $x^2 + px$, pour en faire un quarré parfait, il faut ajouter $\frac{1}{4}p^2$; donc..... $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$.

Maintenant, lorſque deux quantités ſont égales, leurs racines de même nom ſont égales auſſi; donc..... $\sqrt{(x^2 + px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ & par conſéquent... $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$; d'où l'on tire,

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

202. Toutes les fois que la quantité repréſentée par q, ſera poſitive, le radical affectera une quantité poſitive, puiſque $\frac{1}{4}p^2$ eſt néceſſairement poſitif (122). Ainſi de deux choſes l'une; ou la ſubſtitution des valeurs de q & de $\frac{1}{4}p^2$ produira un nombre quarré, auquel cas la quantité ſoumiſe au radical ſera commenſurable; ou cette ſubſtitution donnera un nombre qui ne ſera point ſuſceptible d'extraction de racine quarrée exacte; & dans ce cas, la quantité radicale ſera incommenſurable; on ne pourra l'avoir que par approximation, mais au moins ſera-t-elle *réelle* dans les deux cas.

203. Et à cauſe de l'ambiguité du ſigne $\pm$, il eſt évident que cette quantité réelle peut ſe prendre également en $+$ ou en $-$. Il en réſulte donc deux valeurs différentes pour x; & comme en général les valeurs de l'inconnue s'appellent les *racines de l'équation*, on doit conclure que *toute équation du ſecond degré a deux racines.*

L'une eſt . . . $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

L'autre eſt . . . $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

204. Mais ces racines ne ſont pas toujours réelles; ſouvent elles ſont *imaginaires*: or voici ce que l'on entend par des quantités imaginaires.

Suppoſons que ſous le ſigne radical qui affecte $q + \frac{1}{4}p^2$, la quantité q ſoit négative. Cette ſuppoſition ne peut avoir que trois réſultats. Le premier, que la quantité q ſoit moindre que $\frac{1}{4}p^2$; alors le poſitif l'emportera ſur le négatif, & le reſte de la ſouſtraction ſera réel.

Le ſecond réſultat eſt celui où la quantité négative q ſeroit égale à la quantité poſitive $\frac{1}{4}p^2$. Alors le radical diſ-

paroîtroit, & la double valeur de x se réduiroit à $-\frac{1}{2}p$; c'est-à-dire que les deux racines de l'équation ..... $x^2 + px = q$ seroient égales. Nous retrouverons l'occasion de parler de ces sortes de racines.

Enfin le troisieme résultat est celui où q étant négatif, seroit en même-temps plus grand que $\frac{1}{4}p^2$. Alors la quantité négative surpassant la quantité positive, le reste seroit négatif. Le signe radical affecteroit donc une quantité négative.

205. Or *la racine quarrée d'une quantité négative est imaginaire*, c'est-à-dire, qu'il n'est pas possible de trouver une quantité qui multipliée par elle-même donne un produit négatif. En effet, ou cette quantité seroit positive, ou elle seroit négative; il n'y a pas de milieu. Or dans les deux cas son quarré doit être positif (122); donc la racine quarrée d'une quantité négative est impossible. Ainsi $\sqrt{-1}$ ... $\sqrt{-2}$ ... $\sqrt{-9}$ ... $\sqrt{-a}$ ... $\sqrt{-b^2}$ ... $\sqrt{-(p^2 + 2pq + q^2)}$ sont autant de quantités chimériques, ou comme l'on dit ordinairement, toutes ces quantités sont autant d'imaginaires. Au reste, l'usage des imaginaires est fort étendu dans les calculs algébriques.

206. Après avoir parcouru tous les cas de la résolution générale des équations du second degré, il nous reste à en donner quelques applications; c'est ce que nous allons faire dans les problêmes suivants.

I. PROBLEME. Trouver un nombre tel, qu'en ajoutant sept fois ce nombre à son quarré, la somme soit 144.

J'appelle x le nombre demandé ... son quarré sera donc x^2, & la condition du problême sera exprimée par l'équation ... $x^2 + 7x = 144$.

Complétant le quarré, j'aurai ... $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4}$; d'où en extrayant la racine quarrée, & transposant, je tirerai ... $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(144 + \frac{49}{4})}$.

Après quoi, réduisant au même dénominateur la quantité qui est sous le signe radical, je trouverai ... $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(\frac{625}{4})}$.

Or la racine quarrée de $\frac{625}{4}$ est $\frac{25}{2}$. Donc $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}$. Si on prend le signe supérieur $+$, on aura $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$. Si on prend le signe inférieur, on aura $x = -16$. Ainsi le problême dont il s'agit peut être résolu de deux manieres; & en effet, si au quarré de 9 qui est 81, on ajoute sept fois 9 ou 63, la somme sera 144; comme aussi en prenant le quarré de -16 qui est 256, & ajoutant sept fois le nombre -16 (ou plutôt soustrayant sept fois 16) on trouvera 144. Voilà un exemple de la double solution dont les équations du second degré sont susceptibles.

207. Au lieu de faire tout au long le calcul de ce problême, je n'avois qu'à comparer son équation $\ldots x^2 + 7x = 144$ avec l'équation générale (200) $\ldots x^2 + px = q$. J'aurois eu $p = 7 \ldots q = 144$; & substituant ces valeurs dans la formule $\ldots x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, j'aurois trouvé tout de suite $x = 9$ & $x = -16$. Il est bon de s'accoutumer à ces sortes de comparaisons.

II. Prob. Trouver un nombre tel qu'en soustrayant 2 de son quarré, le reste soit 1.

Si on ne s'appercevoit pas d'abord que cela est impossible, le calcul ne tarderoit pas à en faire sentir l'impossibilité. Commençons par mettre le problême en équation.

Soit x le nombre cherché, & nous aurons $\ldots x^2 - 2 = 1$; d'où en transposant nous conclurons $\ldots x^2 = 3$, & en extrayant $\ldots x = \pm \sqrt{3}$.

C'est donc la racine quarrée de 3 qui, prise soit en $+$, soit en $-$, satisferoit à la condition du problême, & donneroit les deux solutions. Or on sait que cette racine est inassignable.

Pour rapporter cet exemple à la formule $x^2 + px = q$, il faudroit faire $p = 0 \ldots q = 3$, & alors l'équation $\ldots x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ donneroit par les substitutions convenables $\ldots x = \pm \sqrt{3}$, comme ci-dessus.

III. Partager le nombre 10 en deux parties telles que leur produit soit 100.

Le simple énoncé de ce problême suffiroit pour en

faire ſentir l'impoſſibilité : mais en tout cas le calcul la démontrera.

Soit $a = 10 \ldots b = 100 \ldots x =$ une des parties cherchées, l'autre ſera donc $a - x$, & leur produit ſera $ax - xx$. On aura donc pour équation du problème... $ax - xx = b$; & tranſpoſant les deux membres, afin de rendre le quarré $- xx$ poſitif, on aura... $x^2 - ax = -b$.

Comparant cette équation à la formule, on trouvera $p = -a \ldots q = -b$. Donc en ſubſtituant, on aura $\ldots\ldots x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-b + \frac{1}{4}a^2)}$, & mettant les valeurs de a & de b, il viendra $\ldots\ldots x = 5 \pm \sqrt{(-100 + 25)} = 5 \pm \sqrt{(-75)}$. Or la racine quarrée de toute quantité négative eſt imaginaire (205). Donc il eſt impoſſible de partager 10 en deux parties aſſez grandes, pour que leur produit donne 100.

Voilà comme l'Algèbre réſout toutes ces queſtions. On eſt sûr d'en trouver la ſolution, quand il y en a une, & quand il n'y en a point, l'Algèbre le fait connoître ; que peut-on déſirer de plus ?

IV. Pluſieurs perſonnes voyageant enſemble prirent une voiture qui devoit les conduire à leur deſtination, moyennant le prix convenu de 342#. Le voyage fait, trois de ces Voyageurs s'échaperent ſans payer ; mais ceux qui reſterent, ſuppléant à ce qui manquoit par la fuite des autres, donnerent chacun 19# de plus qu'ils n'auroient dû donner. On demande combien il y avoit de Voyageurs dans cette voiture.

Avant de réſoudre ce problême, nous remarquerons que tout cet échaffaudage de paroles ne ſert ſouvent qu'à embrouiller la queſtion. Commençons donc par la réduire à ſes véritables termes.

Un nombre x de perſonnes doivent payer par égales portions la ſomme de 342#. Trois de ces perſonnes ne payant point leur quotepart, les autres payent pour elles, & il en coûte à celles-ci 19# de plus. Quel eſt ce nombre x ?

Il faut d'abord mettre le problême en équation, ce qui

ne ſera pas difficile pour quiconque réfléchira un peu ſur l'unique condition que l'énoncé renferme.

La ſomme de $342^{\#}$, dira-t-on, doit réſulter de tout ce que payent les Voyageurs qui reſtent. Or le nombre de ces Voyageurs eſt $x-3$; la part de chacun n'eût été que de $\frac{342^{\#}}{x}$, ſi tous euſſent payé : mais comme trois d'entre eux ne payent point, la part des autres eſt augmentée de $19^{\#}$; ainſi l'équation du problême eſt,

$$\left(\frac{342}{x}+19\right)(x-3)=342^{\#}.$$

Faiſant ſubir à cette équation les préparations néceſſaires, on trouvera . . . . $x^2-3x=54$; & comparant ce réſultat avec la formule $x^2+px=q$, on aura $p=-3$ . . . $q=54$; d'où on tirera . . . $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(54+\frac{9}{4})}=\frac{1}{2}\pm\frac{15}{2}=9$ ou -6. La premiere de ces deux ſolutions eſt évidemment celle que l'on cherche. La ſeconde indique ſeulement que le nombre -6 ſatisfait auſſi à l'équation . . . $x^2+3x=54$. Il y avoit donc neuf Voyageurs, dont ſix, payant $57^{\#}$ chacun, ont formé la ſomme de $342^{\#}$.

V. Un Général voudroit diſpoſer un corps de troupes en bataillon quarré : mais par ſon premier arrangement, il ſe trouve avoir 124 hommes de trop. Faiſant une ſeconde diſpoſition, il eſſaye de mettre un homme de plus ſur chaque ligne, & alors il lui manque 129 hommes, pour compléter ſon bataillon quarré. Quel eſt le nombre des troupes qu'il commande ?

Soit $a=124$ . . . $b=129$, . . $x=$ le nombre des ſoldats placés d'abord ſur le front du bataillon ; on aura $x+1=$ le nombre d'hommes qui par le ſecond arrangement forment ce même front. En élevant au quarré ces deux expreſſions, on aura le nombre d'hommes que ces deux bataillons quarrés contiendroient. Mais puiſque c'eſt avec le même nombre de troupes que cette double diſpoſition a été faite, il eſt clair que l'on aura les deux

manieres ſuivantes d'exprimer ce nombre, & que de ces deux expreſſions réſultera l'équation du problême;

$$x^2 + a = (x+1)^2 - b = x^2 + 2x + 1 - b.$$

A la premiere inſpection, on croiroit que c'eſt un problême du ſecond degré: mais ſi on ôte de part & d'autre la quantité x^2 commune aux deux membres, on ne trouvera plus qu'une équation du premier degré à réſoudre, & ſa réſolution donnera . . . $x = \frac{a+b-1}{2}$; formule qui par de ſimples ſubſtitutions fera connoître l'inconnue dans tous les cas ſemblables. Ici, par exemple, on trouvera que $x = 126$; d'où on conclura que $x^2 = 15876$, & par conſéquent que $x^2 + a$, ou $15876 + 124 = 16000$. Ce Général avoit donc 16000 hommes ſous ſes ordres.

VI. On a diviſé le nombre 230 en deux parties, telles que le produit de quatre fois la plus grande par ſix fois la plus petite donne 144000. Quelles ſont ces parties?

Soit $a = 230$ . . . $b = 144000$ . . . $m = 4$ . . . $n = 6$. Si on appelle x l'une des deux parties, l'autre ſera exprimée par $a - x$, & on aura pour équation générale des problêmes analogues à celui-là . . .

$$m\,(a - x)(nx) = b;$$ d'où $$mnax - mnx^2 = b.$$

Tranſpoſant les deux membres, & diviſant par mn, on trouvera . . . $x^2 - ax = -\frac{b}{mn}$; & comparant cette derniere équation avec $x^2 + px = q$, on fera $p = -a$, $q = -\frac{b}{mn}$; puis on ſubſtituera dans la veleur générale de $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, ce qui donnera . . . . $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{mn} + \frac{1}{4}a^2\right)} = 115 \pm \sqrt{(7225)}$, d'où $x = 200$, ou $= 30$.

VII. On demande s'il y a deux nombres tels que le double de leur ſomme ſoit égal au triple de leur produit, en ſuppoſant que le triple de leur produit eſt lui-même égal à la différence de leurs quarrés.

Soit x, le plus grand de ces deux nombres; y, le plus petit. Par la premiere condition, $2(x+y) = 3xy$; par la ſeconde, $2(x+y) = x^2 - y^2$.

De cette derniere équation on déduit $x = y + 1$, ce qui change la précédente en $4y + 4 = 3y^2 + 6y$; d'où (201) $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$, & $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$. Effectivement le double de ces deux nombres, le triple de leur produit, & la différence de leurs quarrés ſont trois quantités égales, dont chacune eſt $\frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{13}$.

208. Les ſolutions précédentes ſuffiront pour trouver celles des problêmes ſuivants. On pourra s'y exercer, quand on n'aura rien de mieux à faire; car les méthodes une fois compriſes, il ne faut pas trop inſiſter ſur les exemples, ni s'appeſantir ſur les détails.

On demande à un homme combien il a d'écus. Il répond: ſi vous ajoutez enſemble la moitié, le tiers, & le quart de ce que j'en ai, la ſomme ſurpaſſera d'un le nombre que vous demandez.

Un pere a 50 ans; ſon fils en a 12. Quand eſt-ce que l'âge du pere ne ſera que le triple de celui du fils?

Une perſonne charitable voulut un jour faire l'aumône à pluſieurs pauvres, & donner également à tous. D'abord elle avoit projetté de donner 3 ſous à chacun, mais il lui auroit fallu 9 ſous de plus; elle ne leur en donna donc que 2, & il lui en reſta 2. Combien y avoit-il de pauvres? combien cette perſonne avoit-elle de ſous?

Un ouvrier n'avoit plus que 6$^{\#}$ lorſqu'on lui paya cinq ſemaines de travail. Quinze jours après il avoit déja dépenſé les trois quarts de tout ſon argent: mais ayant reçu le prix de ſon travail pour ces quinze jours, il ſe trouva avoir 21$^{\#}$. Que gagnoit-il par ſemaine?

Le Teſtament d'un oncle porte que chacun de ſes neveux aura 12000$^{\#}$, & chacune de ſes niéces 9000 ſur la ſomme de 120000$^{\#}$ qu'il leur laiſſe après ſa mort. Par cette diſpoſition il ne reſte rien de cette ſomme. Si au contraire chaque niéce eût eu 12000$^{\#}$, & chaque neveu 9000$^{\#}$, il ſeroit reſté 9000$^{\#}$. Trouver le nombre des neveux & celui des niéces.

* Un chaſſeur promet à un autre de lui donner une ſomme b, toutes les fois qu'il manquera une piece de gibier. Cet autre à ſon tour s'engage à payer une ſomme c, toutes les fois qu'il la tuera. Après un nombre n de coups

de fusil, il peut arriver, ou que les deux chasseurs ne se doivent rien, ou que le premier soit redevable au second, ou le second au premier d'une quantité *d*. On demande une formule qui fasse connoître dans les trois cas combien il y a eu de coups manqués.

* Trouver un nombre tel qu'en le divisant en *m* parties égales, le produit de toutes ces parties soit égal à celui de $m+1$ parties égales du même nombre; de maniere, par exemple, que le produit des deux moitiés de ce nombre soit égal au produit de ses trois tiers.

* Une personne ayant doublé au jeu l'argent qu'elle avoit avant que de jouer, donne un louis à ses domestiques. Gagnant une seconde fois de quoi doubler l'argent qui lui reste, elle met à la loterie un louis qui ne lui rapporte rien. Entrant au jeu pour la troisieme fois, & doublant son argent, elle ne se trouve plus avoir qu'un louis dans sa poche. Combien avoit-elle d'argent d'abord?

A, *B* & *C* ont chacun un certain nombre d'écus que l'on ne connoît pas. Tout ce que l'on en sait se réduit à ceci. *A* distribuant de ses écus à *B* & à *C*, a doublé les nombres respectifs qu'ils en avoient déjà. *B* distribuant à son tour les siens, a doublé ceux qui restoient entre les mains de *A*, & ceux que *C* avoit alors. Enfin *C* a doublé de même ceux que *A* & *B* avoient au moment de sa distribution; & tout cela fait, chacun s'est trouvé en avoir 16. Combien en avoient-ils en commençant?

* Avec un nombre quelconque *a* de cartes, on fait un nombre quelconque *b* de tas, dont chacun contient un égal nombre quelconque *c* de points. On a compté ces points de maniere que la premiere carte de chaque tas vaut onze points, si c'est un as; dix points, si c'est une figure, & ainsi de suite: les autres cartes du même tas ne sont comptées que pour un point chacune. Quand tous ces tas sont faits, on vous remet le nombre *d* des cartes qui restent, & on vous propose de deviner la somme de points formée par les seules premieres cartes de tous les tas? Comment la devinerez-vous?

Etant donné le produit π de deux poids, & leur différence δ, chercher combien chacun de ces poids-là pese.

On suppose connues la somme de deux nombres & la somme de leurs cubes: trouver ces nombres.

Quel est le nombre dont p fois la puissance m est égale g fois la puissance $m+2$? *

Nous traiterons des Equations des degrés plus élevés, après avoir expliqué ce qui regarde les proportions.

DES RAPPORTS ET DES PROPORTIONS.

209. ÉTANT données deux quantités quelconques, on peut soustraire l'une de l'autre, pour savoir quelle est leur différence: on peut aussi diviser l'une par l'autre, pour connoître leur quotient.

Le résultat de la premiere opération est de marquer la quantité dont une grandeur surpasse l'autre; le résultat de la seconde est de marquer le nombre de fois qu'une grandeur en contient une autre. Le premier résultat s'appelle le *Rapport* ou la *Raison Arithmétique* de ces quantités. Le second s'appelle le *Rapport* ou la *Raison Géométrique* de ces mêmes quantités; (dénominations assez mal imaginées, mais que l'usage a pourtant consacrées).

Comparant, par ex. 39 avec 13, pour savoir de combien 39 surpasse 13, j'écris $39 - 13 = 26$, & je dis que la raison arithmétique de 39 à 13 est 26.

En comparant ces deux mêmes nombres 39 & 13 pour savoir combien de fois 13, par exemple, est contenu dans 39, je divise 39 par 13, & le quotient 3 exprime la raison géométrique de 39 à 13.

Si on eût divisé 13 par 39, le quotient eût été $\frac{1}{3}$ (54). Or rien n'oblige à diviser plutôt la premiere quantité par la seconde, que la seconde par la premiere. Il suffira donc de prévenir une fois pour toutes, que dans les exemples

ſuivants nous eſtimerons les rapports géométriques en diviſant la ſeconde quantité par la premiere.

210. Comme toute comparaiſon ſuppoſe au moins deux termes, on eſt convenu de les appeller l'un l'*Antécédent*, l'autre le *Conſéquent* de la raiſon, ſoit arithmétique, ſoit géométrique qui en réſulte. Ainſi *tout rapport arithmétique conſiſte dans la différence qu'il y a entre l'antécédent & le conſéquent; & tout rapport géométrique s'exprime par le quotient d'un de ces deux termes diviſé par l'autre.*

211. Lorſque deux quantités ont entr'elles une différence égale à celle qui regne entre deux autres quantités, on dit alors que ces quatre termes ſont en *proportion arithmétique*. Les nombres 7 & 4, par exemple, different entr'eux de la même quantité 3, que les nombres 8 & 5; ainſi ces quatre nombres ſont en proportion, & pour l'indiquer on eſt convenu d'écrire.....

$$7.4:8.5, \text{ ou } 7.4=8.5$$

ce qui ſignifie 7 eſt à 4 comme 8 eſt à 5; ou le rapport arithmétique de 7 à 4 eſt égal au rapport arithmétique de 8 à 5.

Il ſuit delà que *deux raiſons arithmétiques égales forment toujours une proportion arithmétique*. Voici quelques exemples de ces ſortes de proportions.

$$24.12:60.48 \ldots 1002.1000:2.0$$

$$18\tfrac{2}{3}.14\tfrac{2}{3}=11.6\tfrac{2}{3}\ldots 19\tfrac{1}{5}.23=24\tfrac{1}{5}:28\tfrac{2}{5}.$$

212. Lorſqu'il regne entre deux quantités un même quotient qu'entre deux autres, ces quatre quantités ſont en *proportion géométrique*. Si on diviſe, par exemple, 12 par 6, le quotient eſt 2; & ſi on diviſe 18 par 9, le quotient eſt encore 2. Ainſi les nombres 6, 12, 9 & 18 forment une proportion géométrique que l'on indique de la maniere ſuivante.

$$6:12::9:18 \ldots \text{ ou } 6:12=9:18, \text{ ou } \tfrac{12}{6}=\tfrac{18}{9}.$$

On prononce 6 eſt à 12 comme 9 eſt à 18, ou ce que 6 eſt à 18.

Concluons donc que *deux raiſons géométriques égales forment toujours une proportion géométrique.*

Exemples . . . 2 : 6 :: 5 : 15 . . . 7 : 63 :: 1 : 9

$\frac{5}{17} : \frac{10}{17} :: 1 : 2 \ldots \frac{1}{8} : \frac{6}{16} :: 1 : 1.$

213. Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les *extrêmes*. Le ſecond & le troiſieme s'appellent les *moyens*.

Quand on compare deux raiſons géométriques enſemble, il arrive quelquefois que l'antécédent de la premiere eſt à ſon conſéquent, comme le conſéquent de la ſeconde eſt à ſon antécédent : on dit alors que ces deux derniers termes ſont en *raiſon inverſe* des deux premiers. Les quatre nombres ſuivants ſont dans ce cas-là . . . 13 ; 26 . . . 14 ; 7. Dans les cas où le premier antécédent eſt à ſon conſéquent comme le ſecond antécédent eſt à ſon conſéquent, on dit que les deux derniers termes ſont en *raiſon directe* des deux premiers.

214. On appelle *proportions continues* toutes celles où le conſéquent de la premiere raiſon ſert d'antécédent à la ſeconde. On en diſtingue de deux ſortes : les proportions continues arithmétiques, & les proportions continues géométriques.

Exemple des premieres . . . . 10 . 18 : 18 . 26.
On écrit pour abréger . . . . $\frac{\cdot}{\cdot}$ 10 . 18 . 26.
Exemple des dernieres . . . . . 6 : 24 :: 24 : 96.
On écrit . . . . . $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 6 : 24 : 96.

Dans les deux cas, le ſecond terme s'appelle le *moyen proportionel*. Seulement on ajoute le mot arithmétique ou géométrique, ſuivant la nature des rapports dont ce terme fait partie.

215. Quand on écrit pluſieurs raiſons égales de ſuite, on a un certain nombre de quantités proportionnelles entre elles : mais quand le conſéquent de la premiere de ces raiſons ſert d'antécédent à la ſeconde, & que le conſéquent de la ſeconde ſert d'antécédent à la troiſieme, & ainſi des autres, la ſuite de ces raiſons égales, forme une *progreſſion*, dont l'eſpece ſe détermine par la nature des raiſons qui la compoſent. Voici, par exemple, une progreſſion arithmétique.

1.3 : 3.5 : 5.7 : 7.9 : &c. On écrit... 1.3.5.7.9. &c

La progreſſion ſuivante eſt géométrique ;

1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: &c. On écrit 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : &c

216. En général, on appelle progreſſion arithmétique toute ſuite de termes qui comparés deux à deux ſucceſſivement ont entre eux une même différence : & on appelle progreſſion géométrique toute ſuite de termes tels que la diviſion ſucceſſive de l'un par l'autre ramene toujours le même quotient.

Des Proportions Arithmétiques.

217. S'il étoit poſſible d'avoir une formule générale des progreſſions arithmétiques, tout ce que l'on auroit démontré relativement à cette formule, s'étendroit généralement à tous les cas particuliers.

Or une proportion arithmétique, avons-nous dit (211), ne peut être formée que par deux raiſons arithmétiques égales : donc ſi nous parvenons à trouver deux de ces raiſons exprimées généralement, il en réſultera l'expreſſion générale des proportions arithmétiques.

Pour trouver ces deux raiſons, ſoit a l'antécédent de la premiere ; ſoit b ſon conſéquent ; ſoit d la différence de ces deux termes. On aura $a - b = \pm d$, ſuivant que a ſera plus grand ou plus petit que b ; & par conſéquent (192) $b = a \mp d$. Mais on peut repréſenter toute raiſon arithmétique par celle de $a . b$; donc en ſubſtituant la valeur de b, on peut auſſi repréſenter toute raiſon arithmétique par celle de $a . a \mp d$.

Cela poſé, toute autre raiſon arithmétique pouvant être repréſentée par celle de $c . f$, il faut que $c - f = \pm d$, pour que cette raiſon ſoit égale à celle de $a . b$ (210). De l'équation $c - f = \pm d$, on tirera donc $f = c \mp d$: ainſi toute raiſon arithmétique égale à celle de $a . a \mp d$ peut être repréſentée par celle de $c . c \mp d$. Nous avons donc l'expreſſion de deux raiſons arithmétiques égales, & par conſé-

quent la formule cherchée pour toutes les proportions arithmétiques. Cette formule eſt,

$$a . a \mp d : c . c \mp d.$$

218. Delà, nous conclurons 1°, que dans une raiſon arithmétique quelconque l'antécédent diminué ou augmenté de la différence eſt égal au conſéquent.

219. Nous conclurons 2°, que *dans toute proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.* Car ſi on ajoute les extrêmes de la formule précédente, on trouvera $a + c \mp d$; & ſi on ajoute les moyens, on retrouvera les mêmes termes. L'égalité des extrêmes & des moyens a donc lieu dans la formule; & par conſéquent elle a lieu dans tous les cas des proportions arithmétiques. C'eſt même la plus utile de leurs propriétés. Ainſi toutes les fois que l'on aura ... $a . b : c . d$, on en inférera ... $a + d = b + c$.

220. Nous conclurons 3°, que ſi dans une proportion arithmétique, il y a un des deux extrêmes inconnu, ſa valeur ſe trouvera tout de ſuite, en ſouſtrayant l'autre extrême, de la ſomme des moyens.

Exemple ... On demande le quatrieme terme de la proportion ... $17 . 29 : 13 . x$ ... On a (219) $17 + x = 29 + 13$; donc $x = 42 - 17 = 25$.

Si le terme inconnu eſt un des deux moyens, on voit bien ce qu'il faut faire pour avoir ſa valeur.

221. 4°, Dans toute proportion arithmétique continue, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen-proportionnel. Car alors la proportion $a . b : c . d$, ſe change en celle-ci ... $a . b : b . d$; d'où on tire $a + d = 2b$.

222. 5°, Pour trouver le moyen proportionnel arithmétique x entre deux termes a & b, on écrira ... $a . x : x . b$. Puis $\frac{a+b}{2} = x$; c'eſt-à-dire, que *le moyen proportionel arithmétique entre deux quantités données eſt égal à la moitié de la ſomme de ces quantités.*

223. 6°, Puiſqu'une progreſſion arithmétique eſt toujours une ſuite de termes entre leſquels il regne une même

différence, on doit voir que la formule suivante convient à toutes ces progressions, parce que chaque terme y differe également de celui qui le précede.

$$\dot{-}\, a . a \mp d . a \mp 2d . a \mp 3d . a \mp 4d . a \mp 5d . \&c.$$

Le signe supérieur est pour les *progressions décroissantes*; le signe inférieur est pour les *progressions croissantes*.

224. 7°, Ce qui est vrai dans cette nouvelle formule, doit donc trouver son application dans toutes les progressions arithmétiques. Or dans cette formule, la somme des termes également éloignés des extrêmes est toujours constante; c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme de ces extrêmes, ou à la somme des moyens, ou au double du moyen, quand il y a un nombre impair de termes. Prenons pour exemple le second terme $a \mp d$, & l'avant-dernier $a \mp 4d$. Leur somme est $2a \mp 5d$. Les extrêmes sont a & $a \mp 5d$, dont la somme est évidemment la même. Les moyens sont $a \mp 2d$ & $a \mp 3d$ dont la somme est également $2a \mp 5d$.

On peut vérifier ces résultats sur les nombres suivants, par exemple,

$$\dot{-}\, 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42 . 47.$$

225. 8°, On a remarqué dans la formule des progressions arithmétiques, qu'un terme quelconque étoit égal à la somme du premier terme a & du produit de la différence commune d par le nombre des termes précédents. Donc on peut avoir un terme quelconque dans une progression arithmétique dont on connoît le premier terme a, la différence d, & le nombre n des termes.

Le terme cherché étant appellé ω, on aura toujours $\omega = a \mp d\,(n - 1)$.

226. 9°, Dans cette même formule, on a remarqué que la différence du premier terme a au dernier $a \mp 5d$ est égale au produit de la différence commune d par 5, nombre des termes moins un : & on en a conclu que dans toutes les progressions arithmétiques croissantes on devoit avoir $\omega - a = d\,(n - 1) = dn - d$, en appellant ω le dernier

dernier terme, a le premier, d la différence, & n le nombre des termes. C'eſt ainſi que dans la progreſſion $\ldots \div 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . 29 . 34 . 39$. on trouve que $39 - 4 = 5 (8 - 1) = 5 . 7 = 35$.

Le même réſultat a lieu dans les progreſſions décroiſſantes, en appellant leur premier terme ω, & le dernier a. Exemple. La différence des deux extrêmes de la progreſſion $\ldots \div 42 . 35 . 28 . 21 . 14$, eſt $28 = 42 - 14 = 7 (5 - 1) = 7 . 4$.

227. 10°. En conſidérant de nouveau la formule générale des progreſſions, on a vu que la ſomme de tous ſes termes étoit égale au produit des deux extrêmes par la moitié du nombre des termes. On a vu, par exemple, que la ſomme des extrêmes, $a + a \mp 5d$, ou $2a \mp 5d$ multipliée par 3, moitié du nombre des termes, donnoit pour produit $6a \mp 15d$. Or la ſomme de tous les termes $\div a . a \mp d . a \mp 2d . a \mp 3d . a \mp 4d . a \mp 5d$ donne auſſi $6a \mp 15d$. Donc *la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque eſt égale au produit de la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes.*

Appelant donc a & ω les deux extrêmes, s la ſomme des termes, n leur nombre, on aura généralement $\ldots\ldots$

$$s = (a + \omega)\frac{n}{2} = \frac{an + \omega n}{2}.$$

On peut donc dire auſſi que la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique eſt toujours égale à la moitié du produit de la ſomme des extrêmes par le nombre des termes, ou au produit du terme moyen, (ſi le nombre des termes eſt impair) par le nombre des termes. Tous ces produits ſont égaux.

Il eſt donc bien aiſé de calculer la ſomme des coups frappés par une horloge, à chaque tour du cadran.

228. Après tous ces détails, on ne trouvera point de difficulté dans la réſolution des deux problêmes ſuivants.

I. Prob. Etant donnés deux termes a & ω, comment inſérer entr'eux un nombre m de moyens proportionels, de maniere qu'il en réſulte une progreſſion arithmétique?

Ce problême ſera réſolu auſſi-tôt que l'on connoîtra la différence de la progreſſion cherchée. Or on ſait (226) que $\omega - a = d(n-1)$, & on voit que dans ce cas, $n - 1 = m + 1$; donc $\frac{\omega - a}{m+1} = d$. Diviſant donc la différence des deux termes donnés par le nombre m des moyens proportionels, augmenté d'une unité, on aura toujours pour quotient la différence cherchée.

EXEMPLES. On voudroit intercaler ſix termes proportionels-arithmétiques entre 4 & 32 . . . Faites $a = 4 \ldots \omega = 32 \ldots m = 6$, & vous aurez $\frac{\omega - a}{m+1} = \frac{28}{7} = 4 = d$. Ainſi la progreſſion demandée ſera . . . . $\div 4.8.12.16.20.24.28.32$.

Entre 13 & 7 on voudroit inſérer quatre termes qui faſſent une progreſſion arithmétique.

Je fais $\omega = 13 \ldots a = 7 \ldots m = 4$, & j'ai $d = \frac{13-7}{5} = \frac{6}{5}$. Mais comme la progreſſion eſt décroiſſante, il faut ſouſtraire de chaque terme la différence commune. Ainſi la progreſſion ſera $\div 13 . 11\frac{4}{5} . 10\frac{1}{5} . 9\frac{2}{5} . 8\frac{1}{5} . 7$.

229. II. PROB. On ſuppoſe que le premier terme ſoit repréſenté par a, que le dernier ſoit repréſenté par ω, la différence par d, le nombre des termes par n, & leur ſomme par s: & on demande des formules qui faſſent connoître immédiatement la valeur de deux quelconques de ces quantités, les trois autres étant ſuppoſées connues.

SOLUTION. De l'équation $\omega - a = dn - d$, on tirera d'abord quatre formules différentes pour les valeurs reſpectives de a, ω, d & n. (Mais avant que d'entrer dans aucun détail, il eſt à propos de prévenir le Lecteur que ce problême eſt rarement utile. On peut donc en négliger la ſolution, & paſſer tout de ſuite aux proportions géométriques). Ces quatre formules ſont,

I. $a = \omega - dn + d$ . . . . III. $d = \frac{\omega - a}{n-1}$.

II. $\omega = a + dn - d$ . . . . . IV. $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$.

De l'équation $2s = an + \omega n$ (227), on tirera ces quatre autres formules,

V. $a = \frac{2s}{n} - \omega$ . . . VII. $n = \frac{2s}{a+\omega}$.

VI. $\omega = \frac{2s}{n} - a$ . . . VIII. $s = \frac{an+\omega n}{2}$.

Et si dans l'équation $2s = an + \omega n$, vous substituez la valeur de ω prise dans l'équation $\omega - a = dn - d$, vous aurez . . . . . $2s = 2an + dnn - dn$, d'où vous tirerez les quatre formules suivantes,

IX. $a = \frac{s}{n} - \frac{dn+d}{2}$ . . . XI. $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)}$

X. $d = \frac{2s-2an}{nn-n}$ . . . . XII. $s = an + \frac{dnn-dn}{2}$.

Substituant ensuite dans la même équation $2s = an + \omega n$, la valeur de a prise dans l'équation . . . $\omega - a = dn - d$, vous trouverez . . . $2s = 2\omega n - dnn + dn$, équation qui vous donnera quatre nouvelles formules.

XIII. $\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn-d}{2}$ . . . XV. $n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}$

XIV. $d = \frac{2\omega n - 2s}{nn-n}$ . . . . XVI. $s = \omega n - \frac{dn^2}{2} + \frac{dn}{2}$.

Substituant enfin dans $2s = an + \omega n$, la valeur de n prise dans la premiere équation, vous aurez . . . . $2s = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d}$, d'où se tirent les quatre dernieres formules.

XVII. $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + ad + \omega^2)}$ . . . XIX. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$.

XVIII. $\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 - ad + a^2)}$ . . . XX. $s = \frac{a+\omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}$.

Et si l'on veut disposer ces vingt formules de maniere à reconnoître dans l'instant celle qui doit donner la valeur demandée, on peut les arranger de la maniere suivante.

Étant donnés	Trouver	FORMULES.
ω, d, n	a	$a = \omega - dn + d.$
ω, n, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega.$
ω, d, s		$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + \omega d + \omega^2)}.$
d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{dn+d}{2}.$
a, d, n	ω	$\omega = a + dn - d.$
a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a.$
a, d, s		$\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 - ad + a^2)}.$
d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn-d}{2}.$
a, ω, n	d	$d = \frac{\omega - a}{n-1}.$
a, n, s		$d = \frac{2s - 2an}{nn - n}.$
a, ω, s		$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}.$
ω, n, s		$d = \frac{2\omega n - 2s}{nn - n}.$
a, ω, d	n	$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}.$
a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}.$
a, d, s		$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)}.$
ω, d, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}.$
a, ω, n	s	$s = \frac{an + \omega n}{2}.$
a, d, n		$s = an + \frac{dnn - dn}{2}.$
a, d, ω		$s = \frac{d + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}.$
ω, d, n		$s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}.$

APPLICATIONS. I. On ſait d'après les obſervations de Galilée que les eſpaces parcourus en vertu de la gravité par un corps qui deſcend du repos, croiſſent ſuivant la progreſſion des nombres impairs 1, 3, 5, 7 &c; c'eſt-à-dire qu'un corps tombant par la ſeule impreſſion de la gravité parcourt à peu-près 15 pieds dans la premiere ſeconde de ſa chûte, 45 pieds dans la ſeconde ſuivante, & ainſi de ſuite. On demande combien il aura parcouru de pieds au bout de ſix ſecondes.

Ce problême ſe réduit à trouver la ſomme d'une progreſſion arithmétique dont le premier terme $a = 15$ pieds, dont la différence $d = 30$, & dont le nombre des termes $n = 6$.

Je prends donc pour le réſoudre la ſeconde formule des valeurs de s, & j'ai . . . . .

$$s = an + \frac{(dn - d)n}{2} = 90 + \frac{(180 - 30)6}{2} = 540.$$

Ainſi le corps dont il s'agit aura parcouru 540 pieds après 6″ de chûte.

II. Un voyageur voudroit bien arriver en 4 jours à ſa deſtination, en accélérant chaque jour ſa marche de 3 lieues. Pour exécuter ſon deſſein il eſt obligé de faire 29 lieues $\frac{1}{2}$ le dernier jour. On demande combien il a dû faire le premier jour.

Ce problême ſe réſout par la formule qui donne la valeur de a quand on connoît ω, d, n. On a donc,

$$a = \omega - dn + d = 20\tfrac{1}{2}.$$

Ce Voyageur doit donc faire 20 lieues $\frac{1}{2}$ le premier jour, & par la formule $s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}$, on trouveroit que la route qu'il a faite dans ces quatre jours eſt de 100 lieues.

III. Si on eût demandé en combien de jours ce Voyageur auroit parcouru les cent lieues, en faiſant 20 lieues $\frac{1}{2}$ le premier jour, 3 de plus le jour ſuivant, & ainſi de ſuite, on ſe ſeroit ſervi de la formule qui donne la valeur de n, quand a, d, s ſont connus. Cette formule eſt,

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)};$$

& l'on auroit trouvé $n = 4$, après avoir fait les opérations convenables.

IV. Une perſonne a été miſe à l'amende pendant pluſieurs mois de ſuite. Elle a payé 6^{fr} pour le premier mois, & 102^{fr} pour le dernier. Chaque mois l'amende étoit plus forte de 12^{fr}; combien de mois l'a-t-elle payée?

Ici on connoît $a = 6^{\text{fr}} \ldots \omega = 102^{\text{fr}} \ldots d = 12$, & on cherche n. On prendra donc la formule ſuivante,

$$n = 1 + \frac{\omega - a}{d} = 1 + \frac{102 - 6}{12} = 9;$$

& on trouvera que l'amende a dû être payée pendant neuf mois.

V. Dans un amas de boulets de canon diſpoſés en progreſſion arithmétique croiſſante, je ſuppoſe 1°, qu'il y ait 18 rangs dont chacun ſoit formé par un nombre de boulets plus grand de 2 que le rang qui le précéde. 2°, qu'il y ait en tout 360 boulets; & je demande combien il y en a dans le dernier rang.

Puiſque l'on connoît d, n, s, on aura,

$$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2} = 20 + 17 = 37.$$

VI. Les mêmes choſes étant poſées, combien y a-t-il de boulets dans la premiere rangée?

$$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = 20 - 17 = 3.$$

DES PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

230. Soit appelé a l'antécédent d'une raiſon géométrique quelconque; ſoit appelé b le conſéquent de cette même raiſon. On aura $\frac{a}{b}$ pour l'expreſſion générale

du rapport qu'il y a entre ces deux termes (209). Soit q ce rapport; on aura $\frac{b}{a} = q$, d'où on tirera $b = aq$. Ainsi par-tout où sera b, on pourra substituer aq; ce qui change la raison de $a : b$ en celle de $a : aq$. On peut donc représenter toute raison géométrique quelconque par celle de $a : aq$; c'est-à-dire, que *dans les raisons géométriques le conséquent est toujours égal à l'antécédent multiplié par le quotient qui exprime le rapport de ces deux termes.*

231. Soit appellé c l'antécédent d'une autre raison quelconque: soit d le conséquent de cette raison. On aura $\frac{d}{c}$ pour l'expression du rapport qui se trouvera entre ces deux termes; & si ce rapport est égal à celui de $\frac{b}{a}$, on aura $\frac{d}{c} = q$; d'où on tirera $d = cq$. On pourra donc substituer la raison de $c : cq$ à celle de $c : d$. Ainsi les deux rapports que l'on suppose égaux entre a & b, & entre c & d, peuvent être remplacés par ceux de $a : aq$, & de $c : cq$.

232. Donc *toute proportion géométrique est généralement représentée par la formule*..... $a : aq :: c : cq$. Par conséquent les propriétés de cette formule s'étendent à toutes les proportions géométriques. Or dans cette formule le produit acq des extrêmes est égal au produit aqc des moyens. Donc généralement, *dans toutes les proportions géométriques le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.* Proposition remarquable par l'usage continuel que l'on en fait dans toutes les parties des Mathématiques.

233. Et de là il suit 1°, qu'étant donnés trois termes d'une proportion dont on ne connoît pas le quatrieme, il est fort aisé de trouver ce quatrieme terme. Car s'il est un des extrêmes, comme dans la proportion... $a : b :: c : x$, on aura tout de suite, $ax = bc$, & par conséquent $x = \frac{bc}{a}$... S'il est un des moyens, comme dans la propor-

tion . . . $a : y :: c : d$, on aura tout de même, $ad = cy$, & $y = \frac{ad}{c}$.

234. Donc *un terme quelconque d'une proportion géométrique eſt égal, ſi c'eſt un moyen, au produit des extrêmes, diviſé par l'autre moyen; & ſi c'eſt un extrême, il eſt égal au produit des moyens, diviſé par l'autre extrême.*

EXEMPLES. On demande le quatrieme terme de la proportion . . . $3 : 18 :: 5 : x$.

Faites $3x = 18 . 5$, & concluez que $x = \frac{18 . 5}{3} = 6 . 5 = 30$.

On demande le troiſieme terme de la proportion . . . $7 : 63 :: x : 18$.

Vous aurez . . . . . $7 . 18 = 63x$; donc $x = \frac{7 . 9 . 2}{7 . 9} = 2$.

235. De l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens il ſuit 2°, que de toute proportion géométrique repréſentée par celle de $a : b :: c : d$, on peut toujours tirer une équation, qui eſt $ad = bc$.

236. Réciproquement, *d'une équation quelconque on peut toujours déduire une proportion;* & comme on a ſouvent beſoin de ces ſortes de transformations, nous en donnerons ici pluſieurs exemples.

Si on a $mn = pq$, on conclura que $m : p :: q : n$; proportion bien juſte, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Si on avoit $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$, on en déduiroit (126) . . . $a + x : b + y :: b - y : a - x$.

Etant donnée l'équation $1 - z^2 = \varphi$, on trouveroit $1 + z : \varphi :: 1 : 1 - z$.

Enfin de l'équation $xy = 1$, on tireroit la proportion ſuivante $x : 1 :: 1 : y$, ou $\frac{1}{x} : 1 : y$, que l'on ſait (214) être une proportion géométrique-continue.

237. Or dans toutes les proportions de cette eſpece *le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen proportionel.* Car ſi dans la proportion générale . . . $a : b :: c : d$,

on ſuppoſe $c=b$, on aura la proportion continue . . . $a:b::b:d$ qui donne $ad=b^2$.

Donc *pour inſérer un moyen-proportionnel-géométrique* x *entre deux quantités connues* a *&* d, *il faut extraire la racine quarrée du produit de ces deux quantités.* C'eſt ainſi que pour trouver le moyen proportionel entre 3 & 12, on fait $\therefore 3 : x : 12$, & que l'on a $x^2 = 36$; ce qui donne $x=6$.

238. De la propriété fondamentale des proportions géométriques il ſuit 3°, que l'on peut faire ſubir à quatre grandeurs proportionelles tous les changements qui n'alterent pas la proportion. On peut donc mettre les extrêmes à la place des moyens (inverſion que l'on trouve annoncée dans pluſieurs Ouvrages par le mot *invertendo*): on peut auſſi mettre un moyen à la place de l'autre, ou un des extrêmes à la place de l'autre extrême changement exprimé par le mot *alternando*) ſans détruire la proportion qui ſubſiſtoit auparavant entre ces quatre termes. En un mot, tous les changements que l'on peut faire dans une proportion géométrique, ſans détruire l'égalité du produit des moyens au produit des extrêmes, laiſſent ſubſiſter la proportion. Si on a, par exemple, $a:b::c:d$, aucune des inverſions ou permutations ſuivantes ne troublera l'égalité des deux rapports;

$$b:a::d:c \quad b:d::a:c \quad d:b::c:a$$
$$a:c::b:d \quad c:a::d:b \quad c:d::a:b.$$

Car on voit que toutes ces proportions donnent également $ad=bc$. Si l'on veut même en former une infinité d'autres par voie d'addition, de ſouſtraction, de multiplication, de diviſion, &c. on le pourra toujours, pourvu que l'on faſſe les mêmes opérations ſur deux raiſons égales. On peut dire, par exemple, que ſi $a:b::c:d$, on a

$$a \pm b : b :: c \pm d : d \text{; ou } a : a \pm b :: c : c \pm d.$$
$$a \pm b : a \mp b :: c \pm d : c \mp d \ldots na : b :: nc : d.$$

On a auſſi $a^m : b^m :: c^m : d^m \ldots\ldots a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$.

Car puiſque $ad = bc$, on a $a^m d^m = b^m c^m$, & $a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$.

239. En général, *toutes les fois que l'on a des quantités proportionelles entr'elles, leurs puiſſances de même nom ſont proportionelles auſſi.* Les racines n'étant que des puiſſances fractionaires, celles de même nom forment toujours une proportion.

240. Il ſuit 4°, que ſi on a deux proportions géométriques repréſentées,

L'une par . . . . . $a : aq :: c : cq$,

L'autre par . . . . . $g : gp :: h : hp$.

Leurs produits, terme par terme, ſont auſſi proportionels; de ſorte que l'on aura,

$$ag : agpq :: ch : chpq.$$

Il ſuffit, pour s'en convaincre, de comparer le produit des extrêmes avec celui des moyens. D'ailleurs pq eſt le quotient des deux conſéquents diviſés par leurs antécédents; donc les deux raiſons ſont égales. Pareillement ſi on diviſe les quatre termes d'une proportion par les quatre termes d'une autre, les quotients ſeront en proportion.

241. 5°, Soit une ſuite de termes proportionels repréſentée par . . . $a : aq :: c : cq :: e : eq :: g : gq$; on a remarqué qu'il régnoit un même quotient q entre la ſomme des antécédents $a + c + e + g$ de cette formule & la ſomme des conſéquents $aq + cq + eq + gq$, qu'entre un antécédent quelconque a & ſon conſéquent aq, ou même qu'entre un nombre quelconque de ces antécédents & le même nombre de conſéquents. Et de cette remarque on a conclu que *dans une ſuite de raiſons géométriques égales, quelles qu'elles ſoient, la ſomme des antécédents eſt à la ſomme des conſéquents, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent; ou comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents.*

On pourroit dire auſſi que cette proportion a lieu généralement dans tous les cas ſemblables, puiſque le produit

les extrêmes est égal au produit des moyens dans la formule suivante qui peut représenter tous les cas pareils :

$$a+c+e+g : (a+c+e+g)q :: a : aq :: a+c+e : (a+c+e)q.$$

242. Ici nous remarquerons 1°, qu'étant donnée une raison géométrique quelconque, on peut en former une suite d'autres qui lui seront parfaitement égales, soit en multipliant, soit en divisant ses deux termes par une même quantité. Car soit $a : aq$ la raison donnée ; soit m le multiplicateur de ses deux termes ; on aura pour produits am & amq, qui ont visiblement entr'eux le même rapport q qui existoit entre a & aq.

Si on eût divisé par n ces deux termes, les quotients $\frac{a}{n}$ & $\frac{aq}{n}$, auroient eu pareillement le même rapport q. *Une raison géométrique ne change donc pas de valeur ; soit que l'on multiplie, soit que l'on divise ses deux termes par une même quantité.*

Or toute fraction peut être regardée comme une raison géométrique. Il est donc démontré [ce que nous n'avions pu qu'insinuer (49)] que la multiplication ou la division des deux termes d'une fraction quelconque par une même quantité n'altere jamais la valeur de cette fraction.

Et de là il suit évidemment que *deux quantités quelconques ont entr'elles le même rapport, que leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, & toutes leurs parties semblables.* Ainsi on a toujours,

$$a : b :: \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b :: \tfrac{1}{10}a : \tfrac{1}{10}b :: \frac{1}{p}a : \frac{1}{p}b.$$

243. Nous remarquerons 2°, que l'on appelle en général *raison composée*, le rapport des produits de deux ou de plusieurs raisons géométriques quelconques, multipliées antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent. Or dit, par exemple, que la raison de $m\ n\ p : q\ r\ s$ est une raison composée de trois *raisons simples* $\ldots m : q \ldots n : r \ldots p : s$ qui peuvent être mises aussi sous cette forme $\ldots$ $\frac{m}{q}, \frac{n}{r}, \frac{p}{s}$.

Mais quand une raiſon eſt compoſée de deux raiſons égales, on dit alors que c'eſt une *raiſon doublée*. Ainſi la raiſon de $ab : abqq$ eſt la raiſon doublée des raiſons ſimples & égales de $a : aq$ & de $b : bq$. Quand il y a trois raiſons égales, le rapport des produits reſpectifs s'appelle une *raiſon triplée*, &c.

244. Or la raiſon doublée de deux autres eſt égale à celle des quarrés d'une quelconque de ces raiſons. Et la raiſon triplée eſt la même que celle des cubes d'une des trois raiſons qui lui ſervent de facteurs. Car ſoient les deux raiſons égales.... $a : aq$ & $b : bq$; il eſt évident que la raiſon doublée $ab : abq^2$ eſt exprimée par le même quotient q^2, que la raiſon des quarrés $a^2 : a^2q^2$ des deux premiers termes, ou celle de $b^2 : b^2q^2$, quarrés des deux derniers.

Ce qui regarde l'égalité de la raiſon triplée à celle des cubes d'une des trois raiſons ſimples, ſe démontre de la même maniere.

245. Cherchons maintenant les propriétés des progreſſions géométriques; & pour les trouver d'une maniere générale, tâchons de les déduire d'une formule qui repréſente toutes les progreſſions de cette eſpece.

On ſait (215) qu'une progreſſion géométrique eſt une ſuite de termes qui tous, à l'exception du premier & du dernier, ſont alternativement antécédents & conſéquents d'une ſuite de raiſons égales. Or l'égalité de ces raiſons ſe manifeſte par l'identité du quotient qui les exprime. Donc la formule ſuivante peut repréſenter toute progreſſion géométrique :

$$\dot{\dot{-}}\; a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots\ldots aq^n.$$

246. 6°, Dans cette formule on voit que les expoſants de q ſont en progreſſion arithmétique, puiſqu'à cauſe de $q^0 = 1$ (154), on peut y faire ce léger changement;

$$\dot{\dot{-}}\; aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots\ldots aq^n.$$

On voit auſſi qu'en faiſant $a = 1$, cette derniere formule devient ..... $\dot{\dot{-}}\; q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots q^n$; & qu'alors elle exprime la ſuite des puiſſances entieres d'une quantité quelconque q. Ainſi les puiſſances ſucceſſives & entieres

d'une même quantité forment toujours une progreſſion géométrique. Il n'en eſt pas de même des puiſſances ſucceſſives & fractionaires, parce que leurs expoſants $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. ne ſont pas en progreſſion arithmétique.

En général, *toutes les fois que les expoſants de diverſes puiſſances d'une même quantité ſont en progreſſion arithmétique, les termes affectés de ces expoſants ſont en progreſſion géométrique.*

Exemples. $\dot{\dot{:}} q^2 : q^5 : q^8 : q^{11} : q^{14}$ &c. . . . . $\dot{\dot{:}} b : b^3$, $b^5 : b^7 : b^9$ &c. La même choſe ſe démontre généralement par la formule . . . . $\dot{\dot{:}} aq^m : aq^{m+id} : aq^{m+2d} : aq^{m+3d}$, &c, dont les expoſants ſont en progreſſion arithmétique quelconque, & dont les termes ſont évidemment en progreſſion géométrique, puiſqu'il régne entr'eux un même quotient q^d.

247. 7°, Reprenant la formule générale . . . $\dot{\dot{:}} a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ &c, nous obſerverons que le produit de deux termes également éloignés des extrêmes y eſt égal au produit des extrêmes, lequel à ſon tour eſt égal au produit des moyens, ſi le nombre des termes eſt pair, ou au quarré du moyen, ſi le nombre des termes eſt impair. Car $aq \times aq^3 = a \times aq^4 = aq^2 \times aq^2$; donc toutes les progreſſions géométriques ont la même propriété.

248. Et puiſque les proportions continues ne ſont que des progreſſions de trois termes, nous conclurons généralement, comme nous l'avons déja fait (237), que *dans toute proportion géométrique-continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen-proportionel.*

249. 8°, Conſidérant la même formule, nous obſerverons auſſi que ſon premier terme eſt au troiſieme, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond; puiſque l'on a . . . . $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$ . . . . Cette propriété a donc lieu dans toutes les progreſſions géométriques.

On a pareillement . . . . . $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$. Donc le premier terme d'une progreſſion géométrique quelconque eſt au quatrieme, comme le cube de ce premier terme eſt au cube du ſecond.

En général, deux termes quelconques de cette formule sont entr'eux comme le premier & le second élevés à la puissance marquée par l'intervalle qui sépare les deux termes dont il s'agit.

250. 9°, Dans la formule des progressions, on voit qu'un terme quelconque est égal au produit du premier par le quotient élevé à une puissance marquée par le nombre des termes précédents. Le sixieme terme, par exemple, aq^5, n'est autre chose que le produit du premier terme a par le quotient q élevé à la cinquieme puissance. Appellant donc ω le terme que l'on cherche, & désignant par n le nombre de tous les termes de la progression, on aura généralement . . . . $\omega = aq^{n-1}$; formule qui va bientôt nous être utile.

251. De ce qui précéde, on déduit facilement la valeur de la somme s des termes d'une progression géométrique quelconque, dont on connoît le premier terme a, le dernier ω, & le quotient q. Car tous les termes d'une progression, hors le dernier, étant antécédents, on peut représenter la somme des antécédents par $s - \omega$; & tous les termes de cette même progression, hors le premier, étant conséquents, la somme des conséquents peut être représentée par $s - a$. Mais nous savons (241) que dans une suite de raisons géométriques égales, & par conséquent dans toute progression géométrique la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent. On a donc... $s - \omega : s - a :: a : aq$; d'où l'on tire d'abord . . . . . $saq - a\omega q = sa - aa$; puis . . . . . $sq - \omega q = s - a$; ensuite $sq - s = \omega q - a$; enfin . . . . $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.

Cette formule, jointe avec la précédente, va nous servir à résoudre un problême analogue à celui que nous avons déja résolu (229) pour les progressions arithmétiques: mais pour en saisir tous les résultats, il faut avoir lu auparavant ce qui a rapport aux Logarithmes, & aux Equations des degrés supérieurs. On peut donc passer tout

de ſuite au Chapitre ſuivant, quand on ne connoît pas ces deux théories.

252. I. PROBLEME. Etant données dans une progreſſion géométrique trois des quantités ſuivantes, a le premier terme, ω le dernier, n le nombre des termes, s leur ſomme, q le quotient, trouver immédiatement l'une des deux autres.

La premiere formule, $\omega = aq^{n-1}$, en donne trois autres, de ſorte que l'on a;

$$\text{I. } \omega = aq^{n-1} \ldots \text{III. } n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}.$$

$$\text{II. } a = \frac{\omega}{q^{n-1}} \ldots \text{IV. } q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}.$$

La ſeconde formule, $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ en donne trois nouvelles, & l'on a;

$$\text{V. } s = \frac{\omega q - a}{q - 1} \ldots \text{VII. } \omega = s - \frac{s + a}{q}.$$

$$\text{VI. } a = \omega q - sq + s \ldots \text{VIII. } q = \frac{s - a}{s - \omega}.$$

Subſtituant dans la ſeconde la valeur de ω priſe dans la premiere équation, on trouvera,

$$\text{IX. } s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \ldots \text{XI. } n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}.$$

$$\text{X. } a = s\left(\frac{q - 1}{q^n - 1}\right) \ldots \text{XII. } q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0.$$

Si on ſubſtitue dans la même formule $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, la valeur de $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$, on aura ....

$$\text{XIII. } s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \ldots \text{XV. } n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}.$$

$$\text{XIV. } \omega = sq^{n-1}\left(\frac{q - 1}{q^n - 1}\right) \ldots \text{XVI. } q^n - \frac{s}{s - \omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{s - \omega} = 0.$$

Enfin ſubſtitution faite de la valeur de $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$ dans

la même équation $s = \frac{\omega q - a}{q-1}$, les quatre dernieres formules seront,

XVII. $s = \dfrac{\overline{a^{n-1}}^{n} - \overline{a^{n-1}}^{n}}{\overline{\omega^{n-1}}^{1} - \overline{a^{n-1}}^{1}}$ ... XIX. $(s-\omega)\overline{\omega^{n-1}}^{1} = (s-a)\overline{a^{n-1}}^{1}$.

XVIII. $n = 1 + \dfrac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$ ... XX. $(s-a)\overline{a^{n-1}}^{1} = (s-\omega)\overline{\omega^{n-1}}^{1}$.

On peut maintenant disposer ces vingt formules en table, comme nous l'avons déja fait pour les progressions arithmétiques. Cet arrangement sera plus favorable à la résolution des problèmes particuliers.

Étant donnés	Trouver	FORMULES.
ω, q, n	a	$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$.
ω, s, n		$(s-a)\overline{a^{n-1}}^{1} = (s-\omega)\overline{\omega^{n-1}}^{1}$.
ω, q, s		$a = \omega q - sq + s$.
q, n, s		$a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.
a, q, n	ω	$\omega = aq^{n-1}$.
a, s, n		$(s-\omega)\overline{\omega^{n-1}}^{1} = (s-a)\overline{a^{n-1}}^{1}$.
a, q, s		$\omega = s - \frac{s+a}{q}$.
q, n, s		$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.
a, ω, n	q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$.
a, n, s		$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$.
a, ω, s		$q = \frac{s-a}{s-\omega}$.
n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$.

FORMULES

Étant donnés	Trouver	FORMULES.
a, ω, q	n	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}$.
a, ω, s	n	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$.
a, q, s	n	$n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}$.
ω, q, s	n	$n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}$.
a, ω, n	s	$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.
a, q, n	s	$s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$.
a, ω, q	s	$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.
ω, n, q	s	$s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$.

253. APPLICATIONS. I. On a tiré, à cinq repriſes différentes, du vin d'un tonneau, en ſuivant une progreſſion géométrique croiſſante, dont le dernier terme eſt 243 pintes, & dont le quotient eſt 3. Combien de pintes a-t-on dû tirer la premiere fois?

Soit $\omega = 243 \ldots q = 3 \ldots n = 5$: & on aura par la premiere des vingt formules ..... $a = \frac{\omega}{q^{n-1}} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3$. C'eſt-à-dire que l'on a tiré 3 pintes de vin la premiere fois.

II. Une perſonne ayant joué à quitte-ou-double contre une autre, a perdu dix fois de ſuite. Elle avoit joué 3^{α} la premiere fois : que perd-elle après la dixieme?

Les données ſont . . . $a = 3^{\alpha} \ldots q = 2 \ldots n = 10$, & on cherche ω. Je trouve la valeur de-

mandée, par la cinquieme formule . . . $\omega = aq^{n-1} = 3\,2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$.

III. On suppose que la population d'un pays où les mœurs & la liberté régnent avec l'abondance, s'est accrûe uniformément tous les ans d'une maniere si rapide que de dix mille ames qu'il y avoit d'abord, il s'en est trouvé 14641 au bout de quatre ans; suivant quelle progression a dû se faire cet accroissement?

$a = 10000 \ldots \omega = 14641 \ldots n = 5$; & on demande q. Jettant donc les yeux sur la troisieme case, où toutes les valeurs de q sont réunies, je prends la formule $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, & j'ai $q = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$. L'accroissement annuel a donc dû être de $\frac{1}{10}$.

IV. Pour s'être obstiné à plaider, il en a coûté 121000^{tt} à un plaideur forcené. Le premier procès ne lui coûte que cent pistoles, mais aussi le dernier lui a-t-il coûté 81000^{tt}. On sait d'ailleurs que les frais des autres ont été moyens-proportionels entre ces deux extrêmes: on voudroit savoir combien ce plaideur a perdu de procès.

Soit $a = 1000^{\text{tt}} \ldots \omega = 81000^{\text{tt}} \ldots s = 121000$; on trouvera la valeur de n par la formule . . . $n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$, qui donne . . . . $n = 1 + \frac{L81000 - L10000}{L121000 - L40000} = 1 + \frac{L\left(\frac{81000}{10000}\right)}{L\left(\frac{121000}{40000}\right)} = 1 + \frac{L81}{L3} = 1 + \frac{4L3}{L3} = 5$.

V. Un Dissipateur a mangé tout son bien en cinq mois de temps; chaque mois il quadruploit sa dépense, & le premier mois il avoit dépensé cent louis. On demande quel étoit son bien.

$a = 2400^{\text{tt}} \ldots q = 4 \ldots n = 5$; ainsi la valeur de s se déduira de la formule . . . . $s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2400\left(\frac{4^5 - 1}{3}\right) = 800 \cdot 1023 = 818400^{\text{tt}}$.

Ces applications sont plus que suffisantes pour diriger dans tous les cas le choix que l'on doit faire des formules convenables.

254. II. PROB. Inſérer un nombre m de moyens-proportionels-géométriques entre deux termes donnés a & ω.

SOLUTION. Si $m = 1$, on a auſſi-tôt $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : x : x : \omega$; donc $x = \sqrt{a\omega}$.

Si $m = 2$, on aura $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : x : y : \omega$; & pour déterminer x, on ſe rappellera (249) que $a : \omega :: a^3 : x^3$, & on en conclura que $ax^3 = a^3\omega$ . . . . . que $x^3 = a^2\omega$ . . . que $x = \sqrt[3]{a^2\omega}$.

La valeur de x étant une fois connue, on déterminera celle de y par la proportion ſuivante . . . $a : \sqrt[3]{a^2\omega} :: y : \omega$, dont tous les termes élevés au cube donnent $a^3 : a^2\omega :: y^3 : \omega^3$; & par conſéquent $a^3\omega^3 = a^2\omega y^3$; donc $y = \sqrt[3]{a\omega^2}$.

Plus généralement: ſoit m un nombre quelconque; la queſtion ſe réduira à déterminer le quotient q d'une progreſſion dont on connoît déja le premier terme a, le dernier ω, & le nombre des termes n, qui dans le cas préſent peut être repréſenté par $m + 2$. Or la neuvieme formule donne, $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{\omega}{a}}$; donc $q = \sqrt[m+1]{\dfrac{\omega}{a}}$. Ainſi la progreſſion cherchée aura la forme ſuivante,

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : \sqrt[m+1]{a^m\omega} : \sqrt[m+1]{a^{m-1}\omega^2} : \sqrt[m+1]{a^{m-2}\omega^3} \ldots : \omega.$$

Et ſi l'on veut en faire une application, en inſérant quatre moyens-proportionels, par exemple, entre a & ω, on n'aura qu'à ſubſtituer 4 au lieu de m, on trouvera . . . .

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : \sqrt[5]{a^4\omega} : \sqrt[5]{a^3\omega^2} : \sqrt[5]{a^2\omega^3} : \sqrt[5]{a\omega^4} : \omega.$$

255. III. PROB. Entre les termes conſécutifs d'une progreſſion géométrique, inſérer un nombre p de moyens-proportionels.

Soit repréſentée par $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4$: &c. la progreſſion dont il s'agit. Il eſt évident que ſi vous inſérez entre les expoſants conſécutifs de ſes termes un nombre p de moyens-proportionels-arithmétiques, les termes affectés de ces expoſants ſeront les moyens-proportionels-géométriques que l'on demande (246). Ainſi pour inſé-

rer cinq de ces termes dans la formule, on écrira;

$\therefore aq^{0} : aq^{\frac{1}{6}} : aq^{\frac{2}{6}} : aq^{\frac{3}{6}} : aq^{\frac{4}{6}} : aq^{\frac{5}{6}} : aq : aq^{\frac{7}{6}} : aq^{\frac{8}{6}}$: &c.

Dans le calcul des Logarithmes, on peut ſe ſervir de cette eſpece d'interpolation.

On trouve dans les Ouvrages du P. Merſenne un exemple connu des Amateurs de la Muſique. Il s'agiſſoit de partager l'octave en douze ſemi-tons égaux, pour former ce que les Muſiciens appellent *l'accord égal* & pour cela il falloit inſérer onze moyens proportionels-géométriques entre 1 & 2. Le P. Merſenne les a calculés en nombres par la formule ſuivante que l'on trouve auſſi dans la *Génération Harmonique* de M. Rameau, & dans pluſieurs autres Ouvrages.

$\therefore 1 : 2^{\frac{1}{12}} : 2^{\frac{2}{12}} : 2^{\frac{3}{12}} : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{5}{12}} : 2^{\frac{6}{12}} \ldots 2.$

DE LA REGLE DE TROIS,

Et de quelques autres Regles qui en dépendent.

256. ÉTANT donnés trois termes, on a ſouvent beſoin d'en connoître un quatrieme qui leur ſoit proportionel; & ce quatrieme terme ſe trouve, comme l'on ſait (234), d'une maniere bien facile. La regle que l'on met alors en uſage, s'appelle la *Regle de Trois*: ce n'eſt qu'une ſimple application de la propriété fondamentale des proportions géométriques (232).

L'uſage eſt de diſtinguer deux ſortes de regles de Trois; l'une que l'on appelle *directe*, l'autre que l'on appelle *inverſe*.

Soit propoſé, par exemple, de déterminer le prix de 25 marcs d'argent, en ſuppoſant que le marc coûte $52^{\#}$... Il eſt évident que le prix inconnu doit être au prix donné, dans le même rapport que les 25 marcs ſont à un ſeul marc. Appellant donc x le prix que l'on cherche, on aura... $1^{M} : 25^{M} :: 52^{\#} : x$, d'où on tirera $x = \frac{52.25}{1} = 1300^{\#}$,

Si on eût proposé de trouver le prix de 70 marcs dans l'hypothese qu'il en eût coûté $714^{\#}$ pour 14 marcs, on eût dit... $14^{M} : 70^{M} :: 714^{\#} : x^{\#}$, & on auroit conclu que $x = \frac{70 \cdot 714}{14} = 3570$. Ces deux exemples sont du nombre des regles de trois directes.

Mais si on proposoit cette question... 57 Ouvriers ont fait un certain ouvrage en 3 jours; combien faudroit-il de jours à 19 Ouvriers pour faire le même ouvrage?... La regle de trois seroit inverse, parce que le temps nécessaire pour achever un même travail est en raison inverse du nombre des travailleurs. Aussi disposeroit-on les trois termes connus autrement que dans les regles de trois directes; on écriroit par exemple,.... $57^{\text{Ouv.}} : 19^{\text{Ouv.}} :: x : 5^{j}$. Et on trouveroit $x = 15$; c'est-à-dire qu'il faudroit 15 jours pour que 19 Ouvriers fissent le même ouvrage que 57 Ouvriers auroient fait en 5 jours.

257. Remarquez 1°, que si l'un des deux premiers termes d'une regle de trois est multiple de l'autre, on peut simplifier le calcul, en réduisant à la plus simple expression l'espece de fraction qui en résulte. Au lieu d'écrire,... $57 : 19 :: x : 5$, ou $\frac{57}{19} = \frac{x}{5}$, on peut écrire $3 : 1 :: x : 5$; & en général, toutes les fois qu'il y a moyen d'introduire l'unité dans une proportion, il ne faut jamais y manquer, parce qu'alors le terme que l'on cherche, est le produit ou le quotient des deux autres. Par exemple, une des proportions précédentes, $14 : 70 :: 714 : x$: eût pu se réduire à une beaucoup plus simple, $1 : 5 :: 714 : x$. Et quand bien même on ne ramèneroit pas à l'unité un des termes connus, il suffit que l'on puisse le ramener du moins à un plus petit nombre, pour ne pas laisser échapper cette réduction.

258. Remarquez 2°, que pour discerner les regles de trois inverses on n'a qu'à comparer ensemble les termes qu'elles renferment, afin de voir si le rapport des deux premiers est l'inverse du rapport des deux autres. La moin-

dre réflexion ſuffit pour connoître l'ordre dans lequel ces termes doivent être placés. On en pourra juger par les deux exemples ſuivants.

Six Eſcadrons ont conſommé un Magaſin de fourage en 54 jours; en combien de jours l'euſſent conſommé neuf Eſcadrons?

Plus il y a de chevaux, & moins il faut de temps pour la même conſommation. La regle eſt donc inverſe. Ainſi $6^{E} : 9^{E} :: x^{j} : 54^{j}$. Donc $x = \frac{54 \cdot 6}{9} = 36^{j}$.

Autrement. $2 \times 3 : 3 \times 3 :: x : 54$. D'où $2 : 3 :: x : 54$; & $x = \frac{2}{3} \cdot 54 = 36$.

Si pour un meuble particulier il faut 6 aunes d'une étoffe large de $\frac{2}{3}$, combien en faut-il d'une étoffe large de $\frac{3}{4}$?

Il eſt clair que plus l'étoffe eſt large, moins il en faut. On a donc $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: x : 6$, & réduiſant au même dénominateur, $\frac{8}{12} : \frac{9}{12} :: x : 6$. D'où, $8 : 9 :: x : 6$, ou bien $8 : x :: 9 : 6$, ou encore $8 : x :: 3 : 2$, ce qui donne $x = \frac{16}{3} = 5^{Au} + \frac{1}{3}$.

259. Remarquez 3°, que dans une regle de trois inverſe, on peut placer le terme inconnu au quatrieme rang; il ne faut que changer de place les deux premiers termes. Ainſi, au lieu d'écrire... $57 : 19 :: x : 5$, on peut écrire.... $19 : 57 :: 5 : x$. Cela revient au même. Au reſte, les regles de trois directes ſont preſque les ſeules dont on faſſe uſage dans les différentes parties des Mathématiques.

260. Soit propoſé maintenant de réſoudre cette queſtion. 20 hommes ont fait 160 toiſes en 15 jours; combien 30 hommes en feront-ils en 12 jours?

On appelle *regles de trois compoſées* ces ſortes de problêmes où il entre plus de trois termes connus. Pour trouver alors le terme que l'on cherche, on réduit la queſtion à des regles de trois ſimples. On peut dire, par exemple; ſi 20 hommes ont fait 160 toiſes, combien

30 hommes en feront-il dans le même temps?.....

$$20 : 30 :: 160 : x \text{; ou, } 2 : 3 :: 160 : x = 240.$$

Donc en 15 jours 30 hommes feront 240 toiſes. Mais on ſuppoſe qu'ils ne doivent travailler que pendant 12 jours. On aura donc $15 : 12 :: 240 : x$; ou, $5 : 4 :: 240 : x$, ou même, $1 : 4 :: 48 : x = 192^{T}$. C'eſt le nombre cherché.

Il eût été facile de le trouver en diſpoſant ainſi les termes... $\left\{\begin{matrix} 20^{h}. & 30^{h}. \\ 15^{j}. & 12^{j}. \end{matrix}\right. :: 160^{T}. x.$ & en multipliant 20 par 15 & 30 par 12. Car 20 hommes qui travaillent 15 jours, font 300 journées de travail, pendant que 30 hommes qui travailleront 12 jours en feront 360. Mais ſi 300 journées de travail ont produit 160 toiſes, il eſt clair que 360 journées en produiront 192; par ce que $300 : 360$, ou $30 : 36$, ou $5 : 6 :: 160 : 192$.

On peut même réſoudre cette queſtion ſans employer la regle de trois, en diſant; 160 toiſes en 15 jours font $\frac{160}{15}$ par jour, dont la vingtieme partie, ou $\frac{160}{15 \times 20}$ eſt l'ouvrage que fait chaque homme par jour. 30 hommes feront donc $30 \times \frac{160}{15 \times 20}$, ou $\frac{30 \times 160}{15 \times 20}$ chaque jour; & par conſéquent en 12 jours ils feront $\frac{12 . 30 . 160}{15 . 20} = \frac{12 . 2 . 8}{1 . 1}$ $= 192$.

Nous n'inſiſterons pas ſur des choſes auſſi aiſées. Quand on a un peu d'habitude du calcul, ces regles ſe préſentent naturellement à l'eſprit, ou on en imagine d'autres qui valent quelquefois mieux.

La regle de trois eſt du plus grand uſage dans toutes les parties des Mathématiques. Elle ſert beaucoup auſſi dans quelques autres que nous allons parcourir.

261. *Regle de Compagnie.* Deux Négociants ont mis 12000^{tt} en ſociété dans le commerce, & ils ont gagné 1350^{tt}. Ils veulent partager ce gain à raiſon de leurs

miſes, qui ſont 8000$^{\#}$ pour le premier Négociant, & 4000$^{\#}$ pour le ſecond. Que doit il revenir à chacun?

La réponſe eſt aiſée; car la miſe totale 12000$^{\#}$, eſt au gain total 1350$^{\#}$, comme la miſe de chaque Négociant eſt au gain qu'il doit faire. On a donc,

12000 : 1350 :: 8000 : x; ou 1200 : 135 :: 8000 : x; ou encore; 400 : 45 :: 8000 : x; ou bien 80 : 9 :: 8000 : x; ou enfin, 1 : 9 :: 100 : $x = 900^{\#}$;

c'eſt le gain du premier. Ce qui reſte de 1350$^{\#}$ eſt le gain du ſecond. Rien n'eſt plus facile.

Trois Amis ont fait une bourſe commune pour le jeu. Le premier a donné 117$^{\#}$; le ſecond 72; le troiſieme 54. Ils ont perdu 93$^{\#}$. Quelle eſt la perte de chacun?

$$243 : 93 :: \begin{cases} 117 : x = \frac{117 \times 93}{243} = 44 + \frac{189}{243}. \\ 72 : x = \frac{72 \times 93}{243} = 27 + \frac{135}{243}. \\ 54 : x = \frac{54 \times 93}{243} = 20 + \frac{162}{243}. \end{cases}$$

$$93$$

On eût pu diviſer d'abord les deux premiers termes par 3, & diviſer enſuite par 9 le quotient du premier, & chacun des troiſiemes termes, en diſant:

$$81 : 31 :: \begin{cases} 117 : x. \\ 72 : x. \\ 54 : x. \end{cases}$$

$$\text{Puis....} 9 : 31 :: \begin{cases} 13 : x = 44 + \frac{7}{9} \\ 8 : x = 27 + \frac{5}{9} \\ 6 : x = 20 + \frac{2}{3} \end{cases}$$

On vérifie ces ſortes de regles en ajoutant les pertes ou les gains de tous les aſſociés. La ſomme doit toujours être la perte totale ou le gain total.

262. Lorſqu'outre les miſes particulieres, il y a encore

des temps différents, la regle de compagnie s'appelle *composée*.

EXEMPLE. A, B & C ont gagné 1660$^{\#}$ 12^{s} avec un fonds qu'ils avoient mis en société. Il s'agit de partager ce gain en raison des mises. Celle de A est de 4500$^{\#}$ pendant 6 mois; celle de B est de 3000$^{\#}$ pendant 8 mois. C a mis 2250 pendant dix mois.

Multipliez d'abord chaque mise par le temps qu'elle a été employée, & dites ensuite: la somme de tous ces produits est au gain total, comme chaque produit en particulier est à la partie proportionelle de gain que je cherche.

	4500		3000		2250
A....	6	B....	8	C....	10
	27000		24000		22500

La somme de ces produits est 73500; d'ailleurs 12^{s} = $\frac{6}{10}$ de livre. J'ai donc

$$73500 : 1660,6 :: \begin{cases} 27000 : x. \\ 24000 : x. \\ 22500 : x. \end{cases}$$

Ou bien, divisant par 300 le premier terme & chacun des troisiemes.

$$245 : 1660,6 :: \begin{cases} 90 : x = 610^{\#} + \frac{4}{245}. \\ 80 : x = 542 + \frac{58}{245}. \\ 75 : x = 508 + \frac{854}{245}. \end{cases}$$

$$1660^{\#} + \frac{147}{245}.$$

La fraction $\frac{147}{245}$ se réduit à $\frac{3}{5}$ = 12^{s}.

263. *La Regle d'Alliage* consiste, ou à trouver le prix moyen d'un mélange formé de plusieurs choses différentes, dont les quantités & les prix sont donnés; ou à trouver dans quelle proportion il faut prendre de chacune de ces choses, lorsque leurs prix & le prix moyen sont connus.

PREMIER CAS. A quel prix faudroit-il vendre le marc d'un alliage formé avec 6 marcs d'argent à 48$^{\#}$, & 12 marcs d'argent à 36$^{\#}$, pour n'y rien perdre, ni gagner?

Multipliez chaque partie de l'alliage par ſon prix reſpectif, & diviſez la ſomme des produits par celle des quantités mêlées; le quotient ſera le prix moyen.

$$\begin{array}{rr} 6 \times 48^{\#} = 288 & \\ 12 \times 36 = 432 & \\ \hline 18 \qquad\quad 720 & \end{array} \qquad \frac{720}{18} = 40^{\#}, \text{ prix cherché.}$$

Cette méthode eſt fondée ſur la régle de trois que voici. La ſomme des marcs eſt à celle de leurs prix, comme un ſeul marc de l'alliage eſt au prix moyen. Cette proportion qui eſt évidemment juſte, donne $18 : 720 :: 1 : x = \frac{720}{18} = 40$.

On vérifie le premier cas de la regle d'alliage, en évaluant tout le mélange au prix moyen.

Il eût été facile de trouver une formule algébrique qui eût indiqué la méthode dont nous venons de nous ſervir.

SECOND CAS. Le prix moyen & celui de chaque partie de l'alliage étant connus, il peut arriver 1°, qu'aucune des quantités dont le mélange doit être formé, ne ſoit fixée; 2°, qu'il y en ait une qui le ſoit; 3°, que l'on ſoit reſtreint à une certaine quantité d'alliage. Les exemples vont éclaircir tout cela.

1°, Un Marchand de vin voudroit mêler du vin à 15^{f} la pinte avec du vin à 8^{f}, pour en avoir qu'il pût vendre 12^{f} la pinte. Combien doit-il prendre de chaque eſpece pour faire ce mêlange?

Après avoir ainſi diſpoſé les trois prix... 12 $\begin{cases} 15 \ldots 4 \\ 8 \ldots 3 \end{cases}$ je prends la différence 3 de 12 à 15, & je la mets vis-à-vis 8. Je place réciproquement vis-à-vis 15 la différence 4 de 12 à 8, & je conclus que trois pintes de vin à 8^{f} mêlées avec quatre pintes de vin à 15 feront du vin à 12^{f}. Cela eſt évident par la compenſation qui ſe fait des deux prix, l'un ſupérieur, l'autre inférieur au prix moyen.

264. Il ne faut pas cependant conclure de cette compenſation, que les nombres 4 & 3 ſoient les ſeuls qui ſa-

ſatisfassent aux conditions du problême. Car c'eſt ici une queſtion indéterminée qui a une infinité de ſolutions, même en nombres entiers. Il ſuffit, pour les trouver, de prendre deux nombres qui ſoient dans le même rapport que 4 & 3 ; & pour cela, il n'y a qu'à les doubler, tripler, &c.

Si le mêlange devoit être fait avec du vin à 15^{f}, à 10 & à 8, pour avoir encore du vin à 12, on s'y prendroit à peu-près de la même maniere. C'eſt-à-dire, qu'après avoir comparé 15 & 8 avec le prix moyen 12, & diſpoſé réciproquement les différences 3 & 4, on compareroit 15 & 10 avec le même prix moyen 12, & on diſpoſeroit réciproquement auſſi leurs différences 3 & 2. Voyez l'exemple.

Six pintes de vin à 15 ſous, 3 pintes de vin à 10^{f}, & 3 pintes à 8, mêlées enſemble feroient donc 12 pintes de vin à 12^{f}. S'il devoit entrer dans le mélange quatre, cinq, ou ſix ſortes de vin à différents prix, on les compareroit ſucceſſivement deux à deux avec le prix moyen, en obſervant de ne comparer à la fois que deux prix, l'un plus fort, l'autre plus foible que le prix moyen.

12	15 . . 4 . 2 = 6.
	10 . . 3
	8 . . 3
	12

2°, Dans un temps de diſette un Boulanger veut faire du pain avec de l'orge, du ſeigle & du froment, & le vendre 4 ſous la livre. Il a 8 boiſſeaux & demi de froment qui feroient du pain à 5^{f} la livre. Le pain fait avec le ſeigle ſeul reviendroit à 3^{f}, 8^{d}. Celui qu'il feroit avec l'orge coûteroit 1^{f} 6^{d}. On demande combien il doit mêler de ſeigle & d'orge avec ces 8 boiſſeaux & demi de froment, pour faire du pain à 4^{f} la livre?

Le prix moyen eſt ici 48^{d}. J'en prends les différences avec les autres prix, comme dans l'exemple précédent, & je dis :

48	60 . . 30 . . 4
	44 . . 12
	18 . . 12

Pour faire du pain à 4^{f} la livre avec les prix marqués,

on pourroit donc prendre 34 boiſſeaux de froment avec 12 boiſſeaux de ſeigle & 12 boiſſeaux d'orge. Mais puiſque la quantité de froment eſt fixée, il eſt clair que s'il faut 12 boiſſeaux de ſeigle & 12 d'orge ſur 34 de froment, il en faudra ſur $8\frac{1}{2}$ une quantité proportionelle que je déterminerai par cette regle de trois,

$$34 : 8\tfrac{1}{2} :: 12 : x = 3 \text{ boiſſeaux} \begin{cases} \text{de ſeigle} \\ \text{d'orge,} \end{cases}$$

Il en eſt de même pour un plus grand nombre de choſes à mêler, quand on connoît leurs prix & la quantité de l'une d'entre elles.

3°, On a trois ſortes de café. La livre du premier vaut 50ˢ, celle du ſecond en vaut 38, celle du troiſieme 24. Trouver dans quelle proportion il faut les mêler pour en faire 64 livres que l'on puiſſe vendre 30ˢ?

Prenez les différences comme ci-deſſus, & après les avoir ajoutées, dites: la ſomme des différences eſt à la quantité de mélange que l'on veut faire, comme chaque différence en particulier eſt à la quantité qu'il faut prendre de tel ou tel café.

$$30 \left| \begin{array}{l} 50 \ldots 6 \\ 38 \ldots 6 \\ 24 \ldots 20.8 \\ \hline 40 \end{array} \right. \qquad 40 : 64 :: \begin{cases} 6 : x = 9\frac{3}{5}. \\ 6 : x = 9\frac{3}{5}. \\ 28 : x = 44\frac{4}{5}. \\ \hline 64 \end{cases}$$

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456.

Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme

leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

Trois Négociants ont perdu 2400^{liv} en ſociété. Cette perte devant être répartie à proportion des miſes, & la miſe du premier Négociant étant égale à la ſomme des deux autres, pendant que celle du ſecond eſt double de celle du troiſieme, on demande quelle doit être la perte de chacun ?

Si je ſuppoſe que la miſe du troiſieme eſt de 3^{liv}, celle du ſecond doit être de 6, & celle du premier, de 9. D'où je conclus que

$$18 : 2400, \text{ ou } 3 : 400 :: \begin{cases} 3 : x = 400. \\ 6 : x = 800. \\ 9 : x = 1200. \end{cases}$$

Une infinité d'autres nombres formés ſuivant les mêmes conditions que 18, auroient donné le même réſultat.

Combien faudroit-il de temps pour remplir un baſſin, en ouvrant tout à la fois quatre robinets, dont le premier ſeul le rempliroit en 2 heures, le ſecond en 3, le troiſieme en 5, & le quatrieme en 6 ?

Suppoſons qu'il fallût une heure, & voyons ſi le baſſin ſe trouveroit rempli. Il eſt clair que dans cet intervalle le premier robinet en rempliroit la moitié, que le ſecond en rempliroit le tiers, &c ; & qu'ainſi les quatre à la fois fourniroient dans une heure de quoi remplir $\frac{15}{10}$ ou $\frac{6}{5}$ du baſſin. Il ne faut donc pas une heure. Pour déterminer au juſte ce qu'il faut, on dira.....

$$\frac{6}{5} : \frac{1}{5}, \text{ ou } 6 : 5 :: 1^{\text{h}} : x = \frac{5^{\text{h}}}{6} = 50'.$$

266. Il arrive ſouvent qu'une premiere ſuppoſition ne ſuffit pas pour réſoudre ces petits problêmes : on en fait alors une ſeconde. C'eſt ce que l'on appelle *la regle de double fauſſe poſition.*

EXEMPLE. On demande deux nombres dont la différence ſoit 8, & dont la ſomme ſoit 16.

Suppoſons que le plus petit de ces deux nombres ſoit 1 ; nous aurons 9 pour le plus grand, & 10 pour leur ſomme. Mais nous devons avoir 16 pour leur ſomme ; nous ſommes donc en erreur de 6.

Suppoſons maintenant que le plus petit des deux nombres cherchés ſoit 3, ce qui donnera 11 pour le plus grand. On aura 14 pour leur ſomme, & 2 pour erreur.

Mais nous ſavons d'ailleurs (196) que le plus petit nombre cherché doit être 4, & nous voyons que *la premiere erreur eſt à la ſeconde, comme la différence entre le premier nombre ſuppoſé & le nombre cherché, eſt à la différence entre le ſecond nombre ſuppoſé, & le même nombre cherché*, puiſqu'on a . . . 6 : 2 : : 3 : 1. Reſte donc à trouver une méthode qui faſſe connoître le nombre cherché, dans tous les cas où il y a proportion entre les erreurs & les différences, dont nous venons de parler.

267. Soit donc x le nombre cherché ; ſoit a le premier nombre ſuppoſé, b le ſecond, c la premiere erreur, d la ſeconde. Il eſt clair que toutes les fois qu'il y aura proportion entre les erreurs & les différences indiquées, on aura . . . $c : d :: x - a : x - b$, & que par conſéquent . . . $x = \frac{bc - ad}{c - d}$.

Donc *pour trouver, par la regle de double fauſſe poſition, le nombre cherché, il faut multiplier chaque nombre ſuppoſé par l'erreur qui répond à l'autre nombre ſuppoſé, & diviſer la différence de ces deux produits, par la différence des deux erreurs.*

Nous avons ſuppoſé dans l'exemple qui précede, que les deux erreurs étoient de même ſigne. Si elles euſſent été de ſignes contraires, il eut fallu alors diviſer la *ſomme*

des mêmes produits, par la *ſomme* des erreurs; puiſque d, par exemple, étant une quantité négative, la formule devient $x = \frac{bc+ad}{c+d}$. Donc la formule générale ſera . . . . . $x = \frac{bc+ad}{c+d}$.

268. Toutes les fois que les deux nombres ſuppoſés ne ſatisferont point à l'énoncé du problême, on voit bien qu'il ſuffiroit de ramener l'un des deux au nombre cherché, par une correction convenable. Soit donc y cette correction; ſoit d la plus petite erreur; ſoit b le nombre qui l'a produite, & le reſte, comme ci-deſſus.

Il eſt clair que ſi b eſt plus petit que x, on aura . . . $b+y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$; ce qui donnera . . . $y=\frac{(b-a)d}{c-d}$.

Mais ſi b eſt plus grand que x, alors $b-y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, d'où on tire . . . $y=\frac{(a-b)d}{c-d}$. C'eſt-à-dire que dans les deux cas, il faut multiplier la différence des deux nombres ſuppoſés par la plus petite erreur, & diviſer ce produit par la différence des erreurs, lorſqu'elles ont le même ſigne, ou par leur ſomme, quand elles ont des ſignes différents. Le quotient eſt toujours la correction cherchée.

269. Rapprochons maintenant les diverſes opérations de la regle de double fauſſe poſition. Elles conſiſtent à ſuppoſer un nombre que l'on aſſujétit aux conditions du problême. S'il y ſatisfait, comme cela arrive quelquefois, le problême eſt réſolu. S'il n'y ſatisfait pas, on marque l'erreur ſoit poſitive, ſoit négative, & on ſuppoſe un autre nombre, que l'on applique de même aux conditions du problême. S'il en réſulte une nouvelle erreur, on la marque, comme la précédente. Enſuite, on multiplie la premiere erreur par le ſecond nombre, & la ſeconde erreur par le premier. Cela fait, on diviſe la ſomme des deux produits par celle des deux erreurs, lorſque les ſignes de ces erreurs ſont différents. S'ils ſont les mêmes, c'eſt la différence des pro-

duits qu'il faut diviſer par la différence des erreurs. Le quotient eſt le nombre cherché.

EXEMPLE. Pour engager un ouvrier pareſſeux à travailler, on lui promet un écu par jour, à condition que les jours où il ne travaillera pas, il ne recevra rien, & qu'il perdra au contraire 24^{f} chaque fois. Au bout de 15 jours l'ouvrier ne reçoit que $24^{\#}$. Combien de jours a-t-il travaillé?

Je ſuppoſe qu'il a travaillé pendant 6; mais je vois que dans cette ſuppoſition il n'auroit dû recevoir que $7^{\#}\,4^{f}$. Il en a cependant reçu 24. Je ſuis donc en erreur de $16^{\#}\,16^{f}$, ou de 16, $8^{\#}$ en moins; d'où je conclus que cet ouvrier a travaillé plus de 6 jours.

Suppoſons donc qu'il ait travaillé pendant 12 jours, & voyons quel en ſera le réſultat. L'ouvrier auroit dû recevoir $32^{\#}\,8^{f}$: il n'en a pourtant reçu que 24. L'erreur eſt donc de $8^{\#}\,8^{f}$, c'eſt-à-dire 8, $4^{\#}$ en plus.

Je diſpoſe ainſi les deux nombres ſuppoſés & les erreurs correſpondantes;

$$\begin{array}{cc} 6^{j} & +\ 12^{j} \\ -\ 16{,}8 & +\ 8{,}4 \end{array}$$

Puis je multiplie le premier nombre par la ſeconde erreur, & le ſecond nombre par la premiere. Les produits ſont 50,4 & 201,6. Je les ajoute, & diviſant leur ſomme 252 par celle des erreurs (qui eſt 25,2) je trouve 10 pour quotient. C'eſt le nombre cherché.

Si les deux nombres ſuppoſés avoient donné deux erreurs de même ſigne, j'aurois diviſé ſeulement la différence des produits par celle des erreurs.

Ex. Après avoir trouvé, par la premiere ſuppoſition, que cet ouvrier a travaillé pendant plus de 6 jours, je ſuppoſe qu'il a travaillé pendant 9. L'erreur ſera encore en moins, de $4^{\#}\,4^{f} = 4{,}2^{\#}$. J'ai donc....

$$\begin{array}{cc} 6^{j} & -\ 9^{j} \\ -\ 16{,}8 & -\ 4{,}2 \end{array}$$

Puis,

Puis, $6 \times 4,2 = 25,2 \ldots 9 \times 16,8 = 151,2 \ldots 151,2 - 25,2 = 126 \ldots 16,8 - 4,2 = 12,6 \ldots$ & $\frac{126}{12,6} = 10$, comme ci-deſſus.

La formule de la correction s'applique aiſément à ces petits problêmes. Ici, par exemple, on auroit $y = \frac{(9-6)4,2}{16,8-4,2} = \frac{12,6}{12,6} = 1$; ce qui indique que le ſecond nombre ſuppoſé, 9, doit être augmenté d'une unité, pour être égal au nombre que l'on cherche.

La plûpart des problêmes du premier degré, qui ont déja été réſolus ou propoſés (197 & 208) peuvent ſe réſoudre facilement par la regle de double fauſſe poſition, qui ne paroît d'abord fondée que ſur un ſimple tâtonnement, mais qui n'en eſt pas moins ingénieuſe, ni moins utile, aux yeux des Géomètres, & ſurtout des Aſtronomes.

270. IV. *La regle d'intérêt* a pour but de fixer la ſomme dûe pour de l'argent prêté ſous certaines conditions.

On peut les varier à l'infini, & c'eſt ce qui rend aſſez compliqué le calcul néceſſaire en pluſieurs cas. Nous nous bornerons à ceux qui ſont le plus en uſage; & laiſſant à chacun le ſoin de réſoudre par la regle de trois, ceux qui en ſont ſuſceptibles, nous conſidérerons la choſe un peu plus généralement.

1°, Si un Uſurier a prêté 15600^{tt} à 8 pour cent par an, quelle ſomme faudra-t-il lui donner dans cinq ans pour le rembourſer, & lui payer en même temps l'intérêt de ſon argent?

Soit $p = 15600^{\text{tt}}$, que l'on appelle le *Principal*, ou le *Fonds*, ou le *Capital*. Soit $t = 5$ ans, ou le temps pendant lequel l'intérêt court. Soit $r =$ ce que rapporte 1^{tt} dans un an, ou en général dans le temps que 100^{tt} en rapportent 8. (On trouve la valeur de r en diſant... ſi 100^{tt} en rapportent 8, que rapportera 1^{tt} dans le même temps? ..... $100 : 8 :: 1 : r = 0,08$). Soit enfin $s =$ la ſomme dûe, tant pour le fonds que pour les intérêts.

Cela posé, nous aurons $1^{\text{fr}} : r :: p^{\text{fr}} : x = pr =$ l'intérêt du principal pour un an. Mais si au bout d'un an l'intérêt est pr, il sera prt au bout d'un temps t : car $1 : pr :: t : x = prt$. Réunissant donc le principal (p) & l'intérêt (prt), on aura généralement la somme demandée (s) $= p + prt$; d'où l'on tire; $p = \frac{s}{rt+1} \ldots r = \frac{s-p}{pt} \ldots t = \frac{s-p}{pr}$.

Substituons les valeurs, & nous trouverons $s = 15600 + 15600 \times 0{,}08 \times 5 = 21840^{\text{fr}}$.

Si la question eût été énoncée de cette maniere. Au bout de cinq ans il a été payé tant pour le fonds que pour les intérêts à 8 pour cent, la somme de 21840^{fr}. Quel étoit le fonds? On eût substitué ces valeurs dans la formule $p = \frac{s}{rt+1}$, qui eût donné 15600^{fr}. On trouveroit de même le temps ou l'intérêt.

271. 2°. Un Commerçant doit payer cent pistoles chaque année à un de ses confreres; mais comme il a besoin de son argent, il le prie de ne pas en exiger pendant 8 ans, promettant de payer à cette époque tous les arrérages avec les intérêts à 5 pour 100.

J'appelle a ce qui est dû chaque année, soit *Rente*, ou *Annuité*, soit *Pension*, &c. J'appelle r l'intérêt de 1^{fr} pendant un an; t le temps après lequel seront payés les intérêts & arrérages, dont je désigne la somme par s; & je dis... La rente ne doit être payée qu'à la fin de l'année. Le Commerçant ne devra donc aucun intérêt pour la premiere année. Mais à la fin de la seconde il devra ar d'intérêt; à la fin de la troisieme, $2ar$; & ainsi de suite jusqu'à la fin de la derniere, où les intérêts dûs seront exprimés par $ar(t-1)$.

Or ces intérêts forment une progression arithmétique, dont le premier terme est zéro, le dernier $= ar(t-1)$, & le nombre des termes $= t$. Leur somme est donc (227) $\frac{t(t-1)ar}{2}$; & cette somme réunie à ce qui est dû pour la

tente, doit former la somme des arrérages & des intérêts. Donc $s = a\,r\,t\,\frac{(t-1)}{2} + at = (r(t-1)+2)\,\frac{at}{2}$; ce qui donne . . . . . $a = \frac{2s}{(r(t-1)+2)\,t}$ . . . . . $r = \frac{2s-2at}{at(t-1)}$ . . . . . $t = \sqrt{\left[\frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right]} + \frac{r-2}{2r}$.

Substituant les valeurs, on trouvera $s = \overline{0,05 \times 7 + 2} \times \frac{1000}{1} = 9400^{\text{tt}}$. Et si on connoissoit s, r, t, on trouveroit a par la formule . . . $a = \frac{2s}{(r(t-1)+2)\,t}$; &c, &c.

272. Ces sortes de questions appartiennent à ce que l'on appelle regle d'intérêt *simple*. Les deux suivantes se résolvent par la regle d'intérêt *composé*. On appelle ainsi l'intérêt qui provient du fonds & des intérêts de ce fonds.

3°, Une partie des biens d'un Pupille consiste dans une somme de 20000^{tt} que son Tuteur a placée à 5 pour 100. Au bout d'un an la personne qui avoit emprunté cette somme, la rembourse & en paye l'intérêt convenu. Le Tuteur trouvant aussi-tôt une occasion de placer cet argent au même intérêt, forme un nouveau capital de la somme des 20000^{tt} & de l'intérêt qu'elle a produit pendant un an, & place ce capital. Il place de même à la fin de la troisieme année le fonds, & l'intérêt de la seconde, & ainsi de suite pendant six ans. Que doit-il à son Pupille pour cette partie de son administration ?

Soit $p = 20000^{\text{tt}}$ qui sont ici le principal ; soit $t = 6$ ans ; $s =$ la somme dûe par le Tuteur ; $r =$ l'intérêt simple d'une livre ; $q = 1^{\text{tt}} + r =$ une livre plus son intérêt. On trouve q par cette proportion. Si 100^{tt} en produisent 105 au bout d'un an, que produira 1^{tt} ? ou . . . $100 : 105 :: 1 : q = 1,05$.

Il est clair maintenant que si 1^{tt} produit q dans un an, q produira la seconde année q^2 ; car $1 : q :: q : q^2$. La somme dûe pour 1^{tt} & pour son intérêt pendant deux ans sera donc q^2. Elle sera q^3 pour trois ans, & q^t pour un nombre t d'années. Mais puisque 1^{tt} produit q^t dans un temps t,

p^{tt} produiront pq^t dans le même temps. On aura donc $s = pq^t = 20000 \times 1,05^6 = 20000 \times 1,3401 = 26802^{\text{tt}}$ dont le Tuteur eſt redevable à quatre ou cinq ſous de moins.

La formule $s = pq^t$ donne .... $p = \frac{s}{q^t}$ .... $q = \sqrt[t]{\frac{s}{p}}$, ou $Lq = \frac{Ls - Lp}{t}$ .... $t = \frac{Ls - Lp}{Lq}$. Les Logarithmes abrègent beaucoup le calcul, dans les problêmes de ce genre.

273. 4°, Un Banquier perçoit en 1783 une rente de 2400^{tt}, & il place ce revenu à quatre pour 100, en 1784. Il recevra donc à la fin de 1784, la ſomme de 2400^{tt} pour ſa rente & 96^{tt} pour l'intérêt de celle qu'il avoit perçue en 1783. Son projet eſt de placer ainſi tous les ans juſqu'en 1791 la rente de l'année précédente avec les intérêts des autres années. On demande combien il recevroit d'argent, ſi à la fin de 1790 les perſonnes qui lui ont emprunté, le rembourſoient toutes à la fois?

Soit $a = 2400^{\text{tt}}$ ... $t = 8$ ans ... $r = 0,04 =$ l'intérêt annuel d'une livre ... $q = 1^{\text{tt}} + r = 1,04$ .. $s =$ la ſomme demandée; & nous aurons $a =$ ce qui eſt dû au Banquier en 1783; $2a + ar = a + aq =$ ce qui lui eſt dû en 1784; $a + aq + aq^2 =$ ce qui lui eſt dû en 1785; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qui lui ſera dû à la fin d'un nombre t d'années; l'expreſſion de cette dette eſt $a + aq + aq^2 \ldots + aq^{t-1}$.

Or la ſomme de cette progreſſion eſt (252) $\frac{q \times q^{t-1} - 1}{q - 1} \times a = \frac{q^t - 1}{r} \times a$. La ſomme dûe après un nombre t d'années eſt donc généralement exprimée par $s = \frac{q^t - 1}{r} \times a$; formule qui donne ici $s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04} \times 2400 = 22140^{\text{tt}}$, à très peu de choſe près

Elle donne auſſi $a = \frac{rs}{q^t - 1}$ ... $t = L\left(\frac{rs}{a} + 1\right) \ldots \frac{s}{a} q - q =$ $\frac{s - a}{a}$, en ſubſtituant $q - 1$ au lieu de r. Or cette derniere équation

donnera au moins une valeur approchée pour q, si elle n'a pas de diviseur commensurable. On pourra donc en déduire la valeur de r, qui étant multipliée par 100, fera connoître le taux de l'intérêt, toutes les fois que t, s, & a seront connus.

Quelques notions sur les Séries.

274. On appelle *Série* ou *Suite* un assemblage de termes qui pris consécutivement croissent ou décroissent suivant une même loi : telles sont les progressions arithmétiques, géométriques, &c.

On appelle *suite finie* celle dont le nombre des termes est limité & *suite infinie* celle que l'on suppose continuée jusqu'à l'infini.

Les suites dont les termes vont en augmentant de grandeur, s'appellent *divergentes*, & celles dont les termes décroissent de grandeur, s'appellent *convergentes*. Une suite diverge, ou converge d'autant plus rapidement, que chaque terme croît ou décroît plus sensiblement, à l'égard de celui qui le précéde.

Voyons d'abord de quel usage est pour le calcul des séries, la Méthode des coëfficients indéterminés.

On appelle ainsi une méthode fort connue des Géomètres, par la grande utilité dont elle est, & par l'esprit d'invention qui y régne. Cette méthode a pour but de faire connoître la suite des termes que l'on peut déduire de certaines quantités algébriques. Mais pour la rendre bien intelligible, il faut l'appliquer à quelques exemples.

275. Supposons donc que l'on veuille réduire en série la quantité $\frac{\varphi}{p+x}$. On le pourroit sans doute, soit par le seul procédé de la division, soit par la formule du binome, mais on le peut aussi par la méthode suivante.

Soient A, B, C, D, E, &c. des quantités telles que l'on ait l'équation.

$$\frac{\varphi}{p+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Cette supposition est très-permise, puisque les quantités A, B, C, &c. sont susceptibles de toutes les va-

leurs que pourra exiger la ſuite du calcul, & que la quantité x ſe trouve ſucceſſivement élevée à toutes ſes puiſſances. L'eſſentiel eſt de déterminer les valeurs de ces coëfficients : or pour cela, on a imaginé d'abord de multiplier le ſecond membre de l'équation par le dénominateur $p+x$ de la premiere, & on en a tiré, en ordonnant....

$$\varphi = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \&c. \\ \quad + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. \end{cases}$$

Puis en tranſpoſant φ, on a eu.....

$$o = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \&c \\ -\varphi + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. \end{cases}$$

Après quoi on a dit... Puiſque le ſecond membre ſe réduit à zéro, il n'y a qu'à ſuppoſer que les quantités indéterminées A, B, C &c, opérent cette réduction, de maniere que tout ſe détruiſe, colonne par colonne : car alors on aura autant d'équations que d'inconnues, ce qui fera connoître les valeurs de ces quantités.

On a donc.... $Ap - \varphi = o$.... $Bpx + Ax = o$.... $Cpx^2 + Bx^2 = o$... $Dpx^3 + Cx^3 = o$... $Epx^4 + Dx^4 = o$... &c, &c.

La premiere équation donne $Ap = \varphi$; d'où l'on tire $A = \frac{\varphi}{p}$... On ſubſtitue cette valeur dans la ſeconde équation, & on trouve $B = -\frac{\varphi}{p^2}$.... On ſubſtitue de même la valeur de B dans la troiſieme équation, & on trouve que $C = \frac{\varphi}{p^3}$. Enfin tout calcul fait, on a $\frac{\varphi}{p+x} = \frac{\varphi}{p} - \frac{\varphi x}{p^2} + \frac{\varphi x^2}{p^3} - \frac{\varphi x^3}{p^4} + \frac{\varphi x^4}{p^5} - \&c$; & la loi de la ſérie eſt ſi manifeſte, que l'on peut aiſément pouſſer le calcul auſſi loin que l'on voudra.

Soit propoſé maintenant de réduire en ſérie $\frac{a^2}{a^2+2ax-xx}$,

Je suppose que $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. J'ai donc $a^2=(a^2+2ax-x^2)(A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c) ou $a^2 = \left\{\begin{array}{r} a^2A+a^2Bx+a^2Cx^2+a^2Dx^3+\text{&c} \\ +2aAx+2aBx^2+2aCx^3+\text{&c} \\ -Ax^2-Bx^3-\text{&c}; \end{array}\right\}$ d'où je conclus $a^2=a^2A$, & par conséquent $A=1$; ensuite $a^2B+2aA=0$, qui donne $B=-\frac{2}{a}$. Le même procédé me fait trouver $C=\frac{5}{a^2}$ ... $D=-\frac{12}{a^3}$, &c; d'où $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2} = 1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}$, &c.

276. Quand il y a deux termes dans le numérateur, on les égale respectivement aux deux termes homogènes de la série déja multipliée par le dénominateur. Ainsi pour avoir la suite que donne $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$, on supposeroit d'abord $1+2x=(1-x-x^2)(A+Bx+Cx^2+$ &c); on effectueroit ensuite la multiplication, & après avoir trouvé $A=1$, & $B=3$, on détermineroit à l'ordinaire C, D, &c; d'où résulteroit $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5$; série bien aisée à continuer, puisque chaque coefficient est la somme des deux coefficients qui précédent, & que x est élevée successivement à toutes ses puissances. Cette série est du nombre de celles que l'on appelle *Récurrentes*, parce que pour former chaque terme, il faut avoir recours à ceux qui le précédent.

277. Soit proposé d'extraire la racine quarrée de a^2-x^2, que nous connoissons déja (180) ... Supposez $\sqrt{(a^2-x^2)} = A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+$ &c, qui donne d'abord; $a^2-x^2 = \left\{\begin{array}{r} A^2+2ABx^2+B^2x^4+2ADx^6+\text{&c} \\ +2ACx^4+2BCx^6+\text{&c}; \end{array}\right.$ ensuite $A^2=a^2$ ... $2ABx^2=-x^2$; d'où $A=a$ ... $B=-\frac{1}{2a}$; ce qui donne $C=-\frac{1}{8a^3}$ .... $D=-$

$\frac{1}{16a^5}$; enſorte que la ſérie .... $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c$, devient $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c. On calculera de même E, F, &c. ſi l'on veut un plus grand nombre de termes.

278. Il y a trois principales ſuites de nombres. Celles des nombres *figurés* ou de différents ordres, celles des nombres *polygones*, & celles des puiſſances.

I. Les ſuites des nombres figurés commencent ainſi .....

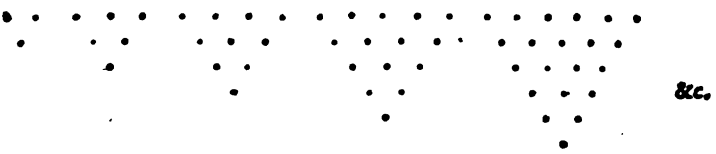
NOMBRES
- Conſtants ou du premier ordre ..... 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.
- Naturels ou du ſecond ordre ..... 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.
- Triangulaires ou du 3e ordre ..... 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.
- Pyramidaux ou du 4e ordre ..... 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.

La loi des ſuites des nombres figurés eſt, que chacun de leurs termes doit être la ſomme des termes correſpondants de la ſuite précédente. Ainſi la ſeconde ſuite eſt formée par l'addition continuelle des unités ; les termes de la troiſieme ſuite ſont formés par l'addition continuelle de la ſeconde. Par exemple $1 + 2 = 3$ ... $1 + 2 + 3 = 6$ ... $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ... $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, &c.

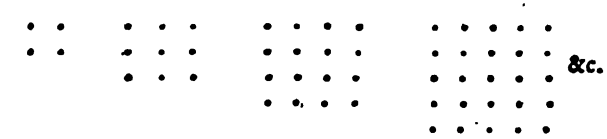
II. Les nombres polygones ſont des nombres formés par la ſomme des termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique qui commence par 1. Et ces nombres s'appellent triangulaires, quarrés, pentagones, hexagones, &c, ſelon que la différence qui regne dans la progreſſion eſt 1, 2, 3, 4, &c.

Progreſſions Arithmétiques.	Nombres Polygones.
1, 2, 3, 4, 5, &c. Diff. . 1.....	1, 3, 6, 10, 15 &c. Triangulaires.
1, 3, 5, 7, 9, &c. Diff. . 2.....	1, 4, 9, 16, 25 &c. Quarrés.
1, 4, 7, 10, 13, &c. Diff. . 3.....	1, 5, 12, 22, 35 &c. Pentagones.
1, 5, 9, 13, 17, &c. Diff. . 4.....	1, 6, 15, 28, 45 &c. Hexagones.

On les appelle Polygones, parce qu'ils expriment les divers nombres dont on peut diſpoſer les unités en triangle, ou en quarré, ou en quelque autre Polygone régulier. Par exemple, la ſuite des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15 &c, tire ſa dénomination de ce que 3 unités, ou 6, ou 10, ou 15 ou 21 &c, peuvent être arrangées en triangle, de la maniere ſuivante.



La ſuite des nombres quarrés 1,4,9.16 &c. eſt ainſi appellée, parce que l'on peut donner une forme quarrée aux unités qu'il contiennent; on peut les diſpoſer, par exemple, de la maniere ſuivante



Il en eſt de même pour les nombres pentagonaux & ceux qui ſont au-deſſus. Pluſieurs Auteurs des deux derniers ſiecles ont beaucoup travaillé ſur ces nombres; mais ce genre de travail eſt ſi ingrat, que l'on a jugé à propos de l'abandonner preſque tout-à-fait.

279. III. La troiſieme eſpece de ſuites comprend celles des diverſes puiſſances des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5 &c. Or l'opération principale qu'il y ait à faire ſur les ſuites, conſiſte à trouver leur ſomme, & nous allons voir comment on peut la déterminer, dans quelques cas.

De la ſommation des Séries.

280. On peut faire ſur les ſuites toutes les opérations de l'Arithmétique; mais la plus utile de toutes, & en même temps la plus difficile, conſiſte à les *ſommer*, c'eſt-à-dire, à réduire en une ſeule expreſſion finie tous les termes d'une ſuite donnée. C'eſt ordinairement en cette expreſſion que conſiſte la ſolution des Problêmes dans leſquels les ſuites entrent, & ces problêmes ſont nombreux.

Nous ne pouvons pas entrer dans un grand détail ſur ce ſujet, qui fait une des plus conſidérables parties de l'Analyſe; nous expliquerons ſeulement la maniere de ſommer quelques ſuites principales.

L'art de ſommer les ſuites, ſe borne, pour ainſi dire, à trouver la méthode d'en ſommer quelques-unes qui ſervent de formules, auxquelles on ramene, s'il eſt poſſible, les ſuites que l'on veut ſommer. Par exemple, ayant trouvé une formule pour former une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, on pourra toujours ſommer les ſuites que l'on décompoſera en pluſieurs autres dont les termes ſeront en progreſſion géométrique décroiſſante. (On déſigne *infini* par ce ſigne, ∞ ; d'où $\frac{1}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$, &c. ſont des *infiniment petits.*)

Soit $\frac{d}{\infty} : \frac{d}{b} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^4} \ldots : \frac{d}{bq^\infty}$, une progreſſion infinie décroiſſante (en ſuppoſant q plus grand que l'unité). Si on l'écrit dans un ordre renverſé $\frac{d}{bq^\infty} \ldots : \frac{d}{bq^4} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{b}$, on la rendra croiſſante, & en y appliquant la formule $\ldots s = \frac{\omega q - a}{q-1}$ (251), dans laquelle $\omega = \frac{d}{b} \ldots a = \frac{d}{bq^\infty}$, on aura $s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q-1}$; négligeant enſuite le terme infiniment petit $\frac{d}{bq^\infty}$, & réduiſant, on trouvera $s = \frac{dq}{bq-b}$; formule propre à donner la ſomme de toute progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini.

281. Exemple. On a vu (94) que la fraction $\frac{1}{3}$ pouvoit être transformée par approximation en celle-ci ... 0,3 3 3 &c ; mais que pour rendre cette transformation rigoureuſe, il faudroit pouſſer l'approximation juſqu'à l'infini. La preuve en eſt que la ſomme de la progreſſion $\frac{3}{\infty} : \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots \frac{3}{10^\infty}$, qui en réſulte, eſt véritablement $\frac{1}{3}$. Car ſi on écrit d'abord cette progreſſion, de maniere à la rendre croiſſante, on aura $\frac{3}{10^\infty} \ldots \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$; & ſi on fait enſuite les ſub-

stitutions convenables dans la formule $s = \frac{dq}{bq-b}$, on trouvera que $s = \frac{30}{100-10} = \frac{1}{3}$. Donc la somme de 0,99999 &c est 1 ; comme la formule le donne.

Soit proposé maintenant de trouver en fraction ordinaire la valeur de 0,181818 à l'infini .... je fais $d = 18 \ldots b = 100 \ldots, q = 100$; & je trouve ... $s = \frac{1800}{10000-100} = \frac{1800}{9900} = \frac{2}{11}$.

Soit 0, 142857 142857 142857 &c, fraction périodique infinie dont on demande la valeur en fraction ordinaire ... je fais $d = 142857 \ldots b = 1000000 = q$; & je trouve que la formule $s = \frac{dq}{bq-b}$ se réduit à $\frac{1}{7}$, comme nous le savions déja (96).

282. Cherchons à présent le moyen de sommer une suite de fractions dont les numérateurs soient en progression arithmétique, & les dénominateurs en progression géométrique. Cette suite est $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$, &c. Mettez-la d'abord sous cette forme .... $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$, &c.

De-là, vous pourrez déduire les séries suivantes, qui ne sont que des progressions géométriques.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bq^2} : \frac{a}{bq^3}$: &c. la somme est $\frac{aq}{bq-b}$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3}$: &c. la somme est $\frac{d}{bq-b}$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3}$: &c. la somme est $\frac{d}{bq^2-bq}$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{d}{bq^3}$: &c. la somme est $\frac{d}{bq^3-bq^2}$.

Or ces sommes (excepté la premiere) forment la progression $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{d}{bq-b} : \frac{d}{bq^2-bq} : \frac{d}{bq^3-bq^2}$: &c, dont la somme

est $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$; si donc on y ajoute la premiere somme $\frac{aq}{bq-b}$, on aura $\frac{aqq-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$ pour la somme des sommes, c'est-à-dire, pour la somme de toute la série proposée. *Et c'est une formule générale pour sommer toutes les suites de fractions, dont les numérateurs sont en progression arithmétique, & les dénominateurs en progression geométrique.*

REMARQUE. Lorsqu'on ne peut sommer en termes finis une suite infinie, il faut tâcher de la mettre sous une forme rapidement convergente; car, *lorsqu'une suite converge très-vîte, il suffit de sommer quelques-uns de ses premiers termes; on peut ensuite négliger les autres sans erreur sensible.*

Par exemple, dans $\sqrt{(aa+xx)}$ plus la valeur de x sera petite à l'égard de a, plus la suite $a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-$ &c, convergera vîte, parce que les numérateurs deviennent très petits, à l'égard des dénominateurs. Soit $a=10$, & $x=1$, alors $\sqrt{101}=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}$; où l'on voit que le quatrieme terme est déja comme infiniment petit, & que par conséquent les trois premiers termes suffisent, pour avoir, à tres-peu près, la racine de 101.

283. Soit proposé de trouver d'une maniere générale la somme d'un nombre quelconque de termes, dans une progression quelconque des puissances des nombres naturels . . . . . .

Je prends pour exemple d'une suite quelconque de ces nombres, la progression arithmétique $\div a.b.c.d.\omega$, dont je suppose que le premier terme a représente le premier terme de la suite donnée, pendant que ω représente le dernier, & que b, c, d, tiennent lieu des termes intermédiaires. Cela posé, j'aurai donc $\omega=d+1\ldots\ldots d=c+1\ldots c=b+1\ldots b=a+1$; & si j'éleve toutes ces équations à une puissance quelconque m, j'aurai (148).

1°. $\omega^m=d^m+md^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}d^{m-2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}d^{m-3}+$ &c.

2°. $d^m=c^m+mc^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}c^{m-2}+\frac{m.m-1\ m-2}{2.3}c^{m-3}+$ &c.

$3°.\ c^m = b^m + mb^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} b^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} b^{m-3} + \&c.$

$4°.\ b^m = a^m + ma^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3} + \&c.$

Mais si j'ajoute toutes ces puiſſances enſemble, je trouverai en réduiſant, que

$$s^m = \begin{cases} a^m + m(d^{m-1} + c^{m-1} + b^{m-1} + a^{m-1}) + \frac{m.m-1}{2}(d^{m-2} + c^{m-2} + \\ b^{m-2} + a^{m-2}) + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}(d^{m-3} + c^{m-3} + b^{m-3} + a^{m-3}) + \&c. \end{cases}$$

Et remarquant que $d^{m-1} + c^{m-1} + b^{m-1} + a^{m-1}$ eſt la ſomme des puiſſances $m-1$ de tous les termes excepté le dernier, je conclus que ſi j'appelle s^{m-1} la ſomme de toutes ces puiſſances, j'aurai

$1°. \ldots d^{m-1} + c^{m-1} + b^{m-1} + a^{m-1} = s^{m-1} - \omega^{m-1}.$

Par la même raiſon, il viendra

$2°. \ldots d^{m-2} + c^{m-2} + b^{m-2} + a^{m-2} = s^{m-2} - \omega^{m-2}.$

$3°. \ldots d^{m-3} + c^{m-3} + b^{m-3} + a^{m-3} = s^{m-3} - \omega^{m-3}.$

Ainſi la ſérie précédente ſe changera en celle-ci,

$$s^m = a^m + m(s^{m-1} - \omega^{m-1}) + \frac{m.m-1}{2}(s^{m-2} - \omega^{m-2}) + \frac{m.m-1.m-2}{2}(s^{m-3} - \omega^{m-3}) + \&c$$

Et c'eſt-là l'expreſſion générale de la ſomme cherchée, puiſque de ſimples ſubſtitutions de la valeur de m donneront immédiatement la ſomme s de tant de nombres naturels que l'on voudra, la ſomme s^2 de leurs quarrés, la ſomme s^3 de leurs cubes, & ainſi de ſuite.

Car ſi on fait d'abord $m = 1$, la formule ſe réduira à $\ldots \omega = a + s^0 - \omega^0$; d'où l'on tire $s^0 = \omega - a + 1$; c'eſt à-dire, que la ſomme des puiſſances *zéro* d'une ſuite de nombres naturels eſt égale à la différence du premier au dernier terme, augmentée d'une unité.

Exemple. Soit $\div 3°. 4°. 5°. 6°$; la ſomme eſt viſiblement 4, & c'eſt ce que donne l'équation $s^0 = \omega - a + 1 = 6 - 3 + 1$.

Si on fait $m = 2$, la formule deviendra $\omega^2 = a^2 + 2(s - \omega) + \frac{2.1}{2}(s^0 - \omega^0) = a^2 + 2s - 2\omega + s^0 - \omega^0$. Or $s^0 - \omega^0 = \omega - a$ dans tous les cas ſemblables; donc $\omega^2 = a^2 + 2s - \omega - a$; & par conſéquent $s = \frac{\omega_2 - a^2 + \omega + a}{2} = \frac{1}{2}\omega(\omega + 1) + \frac{1}{2}a(1 - a) \ldots$

Exemple. Soit $\div 8.9.10.11.12.13$, dont il faille trouver la ſomme .... on aura $s = 13.7 + 4(-7) = 63$.

Si on fait $m = 3$, on aura $\omega^3 = a^3 + 3(s^2 - \omega^2) + 3(s - \omega) + s^0 - \omega^0 = a^3 + 3s^2 - 3\omega^2 + 3s - 2\omega - a$; & ſi on ſubſtitue dans cette équation la valeur déja trouvée pour s, on aura en tranſpoſant ... $s^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$; expreſſion que l'on peut réduire à celle-ci ... $s^2 = \frac{1}{6}\omega(2\omega^2 + 3\omega + 1) -$

$\frac{1}{6}a(2a^2-3a+1)$ . . . Exemple. Soit la suite des quarrés $2^2 . 3^2 . 4^2 . 5^2 . 6^2$, dont on cherche la somme . . . On aura $s^2 = 90$.

En faisant $m = 4$, & en substituant les valeurs trouvées pour s & pour s^2, on aura $s^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\omega^2(\omega^2+2\omega+1) - \frac{1}{4}a^2(a^2-2a+1)$.

On trouvera de même que $s^4 = \frac{1}{5}\omega^5 + \frac{1}{2}\omega^4 + \frac{1}{3}\omega^3 - \frac{1}{30}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{5}a^3 + \frac{1}{30}a$, & ainsi des autres.

Si on vouloit chercher la somme des puissances m d'une infinité de termes de la suite des nombres naturels, alors le dernier terme ω seroit infini ; on auroit donc $\omega = \infty$, & par conséquent les puissances ∞^{m-1}, ∞^{m-2}, ∞^{m-3} &c seroient infiniment petites par rapport à ∞^m ; elles s'évanouiroient donc ; ce qui changeroit la formule générale en celle-ci.

$$\infty^m = ms^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}s^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}s^{m-3} + \&c.$$

Or s^{m-2}, s^{m-3}, s^{m-4}, &c. sont autant de quantités infiniment petites par rapport à s^{m-1} ; car il est évident, par exemple, que la somme des quarrés qui est dans ce cas-là $\frac{1}{3}\infty^3$, est infiniment petite par rapport à la somme des cubes, qui est $\frac{1}{4}\infty^4$. Donc en négligeant tous ces termes, l'équation précédente deviendra . . . $\infty^m = ms^{m-1}$; d'où l'on tire $s^{m-1} = \frac{\infty^m}{m}$; ainsi supposant $m-1=n$, on aura $s^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$; c'est-à-dire que la somme des puissances n d'une infinité de termes pris dans la suite des nombres naturels est égale au produit de la puissance ∞^n du dernier terme multipliée par le nombre de tous les termes, & divisée par $n+1$.

Au reste, on voit bien que cette formule s'étend à tous les cas des puissances fractionaires, comme à ceux des puissances entieres, puisque n peut également exprimer toutes sortes d'exposants. Le problême est donc résolu d'une maniere générale, & si on vouloit en imiter la solution pour trouver la somme des puissances d'un nombre quelconque de termes, soit fini, soit infini, pris dans une progression arithmétique quelconque, on n'auroit qu'à prendre δ pour la différence de ces termes, ce qui donneroit $\omega = d + \delta$ . . . $d = c + \delta$ &c ; après quoi on acheveroit le calcul, comme ci-dessus.

De la Méthode inverse des Séries.

284. ÉTANT donnée une équation de cette forme . . . . . $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n} +$ &c, on demande la valeur de y . . . . La méthode qui apprend à la trouver, s'appelle *méthode inverse des séries*, ou *retour des suites ;* parce que l'on ne parvient à cette valeur que par une série inverse des puissances de x. Voici en quoi cette méthode consiste.

I. Soit pris d'abord le cas le plus ſimple, qui eſt celui où $m=n=1$. L'équation propoſée ſe changera en celle-ci..... $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. Il s'agit de trouver la valeur de y en x. Pour cela, je ſuppoſe $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c.

$$\text{Donc } 1^\circ, \begin{cases} y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2AC & \text{\&c.} \\ y^3 = A^3 + 3A^2B & \text{\&c.} \\ y^4 = A^4 & \text{\&c.} \end{cases}$$

$$\text{Donc } 2^\circ, x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 & \text{\&c} \\ by^2 = A^2b + 2ABb + B^2b + 2ACb & \text{\&c} \\ cy^3 = A^3c + 3A^2Bc & \text{\&c} \\ dy^4 = A^4d & \text{\&c.} \\ \text{\&c} & \text{\&c.} \end{cases}$$

Or cette derniere équation donne (276) $x = Aax$, d'où $1 = Aa$, & $A = \frac{1}{a}$. Elle donne auſſi $aB + A^2b = 0$; donc $B = -\frac{b}{a^3}$. Enſuite, $aC + 2ABb + A^3c = 0$; d'où $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, & ainſi des autres. Cela poſé nous aurons la formule ſuivante pour changer une ſérie des puiſſances ſucceſſives de y, en une autre ſérie compoſée des mêmes puiſſances de x. Il n'y aura qu'à ſubſtituer les valeurs des coefficients a, b, c, d &c. que l'on ſuppoſe connus.

Je dis donc que ſi $x = ay + by^2 + cy^3$ &c, on a dans tous les cas ſemblables... $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 +$ &c.

Applications. $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 +$ &c. Quelle eſt la valeur de y exprimée en x?..... On a ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$, &c. Donc $y = x + x^2 + x^3 + x^4$ &c.

Si on avoit $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c, alors a ſeroit $= 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, & $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$, &c $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5}$ &c.

Et ſi $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} -$ &c, on trouvera $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4}$ &c.

285. II. Si nous ſuppoſons $m = 1$, & $n = 2$, la ſérie propoſée n'aura

que des puiſſances impaires, & l'équation deviendra $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$ &c. Pour avoir une formule dans ce cas-là,

$$\text{Soit } y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 \text{ &c.}$$

$$\text{On aura 1°, } \begin{cases} y^3 = A^3 + 3A^2B + 3A^2C \text{ &c.} \\ \qquad\qquad + 3AB^2 \\ y^5 = A^5 + 5A^4B \text{ &c.} \\ y^7 = A^7 \text{ &c.} \end{cases}$$

$$2°,\ x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 \text{ &c.} \\ by^3 = A^3b + 3A^2Bb + 3A^2bC \\ \qquad\qquad + 3AB^2b \\ cy^5 = A^5c + 5A^4Bc \\ dy^7 = A^7d \\ \text{&c.} \qquad\qquad \text{&c.} \end{cases}$$

De cette derniere équation je tire $x = Aax$, ou $A = \frac{1}{a}$ ..... $aB + A^3b = 0$, ou $B = \frac{-b}{a^4}$; puis $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$ ..... $D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$, &c ; enſorte que la formule eſt $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + \frac{3b^2-ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7 +$ &c.

APPLIC. Exprimer en r la valeur de t dans l'équation $r = t - \frac{t^3}{2\cdot 3\cdot p^2} + \frac{t^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5p^4} - \frac{t^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7p^6} +$ &c ?... On a ici $a = 1$, $b = -\frac{1}{2\cdot 3p^2}$, $c = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5p^4}$, $d = -$ &c, $t = y$, $r = x$; & ſubſtituant, on trouvera $t = r + \frac{1}{2\cdot 3p^2}r^3 + \left[\frac{1}{3\cdot 4p^4} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5p^4}\right]r^5 +$ &c. $= r + \frac{1}{2\cdot 3p^2}r^3 + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5p^4}r^5 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7p^6}r^7$ &c.

286. III. Suppoſons maintenant que m & n ſoient des nombres quelconques, entiers ou fractionaires ; & cherchons une formule pour ce cas qui contient les deux autres. Je fais $u = \frac{x}{a}$ .... $y = u^{\frac{1}{m}} + Bu^{\frac{1+n}{m}} + Cu^{\frac{1+2n}{m}} + Du^{\frac{1+3n}{m}} +$ &c, & diviſant par a la ſérie

propoſée,

proposée $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n}$ &c, j'ai $\frac{x}{a} = u = y^m + \frac{b}{a}y^{m+n} + \frac{c}{a}y^{m+2n}$ &c.

$$\text{Or} \begin{cases} y^m = u + mBu^{\frac{m+n}{m}} + mCu^{\frac{m+2n}{m}} \text{ &c} \\ \qquad + \frac{m.m-1}{2} B^2 u^{\frac{m+2n}{m}} \\ \frac{b}{a}y^{m+n} = \frac{b}{a} \times u^{\frac{m+n}{m}} + (m+n)Bu^{\frac{m+2n}{m}} \text{ &c} \\ \frac{c}{a}y^{m+2n} = \frac{c}{a} \times u^{\frac{m+2n}{m}} \text{ &c.} \end{cases}$$

Donc $mB + \frac{b}{a} = 0$, ce qui donne $B = -\frac{b}{ma}$; donc auſſi $mC + \frac{m.m-1}{2}B^2 + (m+n)\frac{bB}{a} + \frac{c}{a} = 0$, ce qui donne $C = \frac{(m+1+2n)b^2 - 2mac}{2m^2a^2}$, & ainſi des autres; enſorte que la formule générale eſt $y = u^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{ma}u^{\frac{1+n}{m}} + \frac{(m+1+2n)b^2 - 2mac}{2m^2a^2}u^{\frac{1+2n}{m}} - \left[\frac{(2m^2+9mn+9n^2+3m+6n+1)b^3}{6m^3a^3} - \frac{(m+3n+1)bc}{m^2a^2} + \frac{d}{ma}\right] \times u^{\frac{1+3n}{m}}$; & ainſi de ſuite.

APPLIC. Soit $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 +$ &c. On demande la valeur de y en x. J'ai d'abord $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $m = 2$, $n = 1$, $u = 2x$. Puis, $y = u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{36}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{270}u^2$ &c.

Soit encore $x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}y^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}y^{\frac{7}{2}}$ &c. On aura 1°, $a = 1$, $b = -\frac{1}{12}$, $c = -\frac{1}{8}$, &c $u = x$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$. 2°, $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8}$ &c. Voyez le ſavant Traité d'Algèbre de M. EMERSON.

DES LOGARITHMES.

287. Les Géomètres se plaignoient depuis long-temps de la lenteur du calcul, dans la multiplication & dans la division des nombres considérables, & sur-tout dans l'extraction des racines un peu éleyées, lorsqu'enfin un Baron Ecossois, (il s'appelloit Nepper) imagina un moyen de remédier à cet inconvénient.

Il vint à bout de réduire les multiplications à de simples additions, les divisions à de simples soustractions, les formations des puissances à des multiplications toujours fort courtes, & les extractions des racines aux divisions les plus faciles. Nous regrettons de ne pouvoir faire connoître à nos Lecteurs toute la beauté de cette découverte : pour la bien sentir, il faut être plus avancé dans l'étude des Mathématiques. Nous n'avons pour objet dans ce chapitre, que le développement des premiers principes d'une théorie aussi utile.

288. Soit donc une progression géométrique quelconque $\ldots a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 :$ &c; on sait (125) que pour multiplier l'un par l'autre deux termes de cette formule, il suffit d'écrire une seule fois la quantité a, en lui donnant pour exposant la somme des deux exposants des termes que l'on multiplie. On fait par exemple, que $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$, & que $a^7 \times a^9 = a^{7+9} = a^{16}$. Ainsi *le produit de deux termes quelconques d'une progression géométrique est toujours égal au terme qui dans la même progression a pour exposant la somme des exposants de ces deux termes.*

289. On sait aussi (129) que le quotient de deux termes quelconques d'une progression géométrique est le terme qui a pour exposant la différence des exposants de ces deux termes : a^6, par exemple, divisé par a^2 est égal à $a^{6-2} = a^4$. Donc *pour avoir le quotient de deux de ces termes, il faut prendre la différence de leurs exposants, & en faire l'exposant du quotient que l'on cherche.*

Or ces exposants sont ce que l'on appelle des *Logarithmes*. Ensorte que si $a = 10$, la formule devenant alors $\dot{\div} 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 :$ &c. ou, $\dot{\div} 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 :$ &c, l'exposant 0 est le logarithme de l'unité; l'exposant 1 est le logarithme de 10; 2 est le logarithme de 100, &c.

Mais parce que ces exposants ne donnent que les logarithmes des nombres qui sont dans la progression décuple $\dot{\div} 1 : 10 : 100 : 1000 :$ &c, & que l'on a très-souvent besoin des logarithmes des nombres intermédiaires, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, &c, ainsi que des logarithmes des fractions, voici comment on s'y est pris pour trouver tous ces logarithmes.

On a ajouté plusieurs zéros en forme de décimales à chacun des exposants de la formule, ce qui l'a changée en celle-ci, en n'y mettant que sept zéros.

$\dot{\div} 10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000} :$ &c.

Puis on a remarqué qu'en insérant dans cette formule des exposants qui fussent en progression arithmétique, les valeurs du nombre 10 élevées aux puissances qu'ils désignent, seroient des nombres en progression géométrique, & que ces mêmes exposants seroient les logarithmes de ces nombres. Donc en faisant croître ces décimales consécutivement de $\frac{1}{10000000}$, ou, ce qui revient au même, en insérant 9999999 moyens proportionnels-arithmétiques entre deux quelconques des exposants de la progression (228), on a dû avoir une nouvelle progression géométrique dont les premiers termes sont,

$\dot{\div} 10^{0,0000000} : 10^{0,0000001} : 10^{0,0000002} : 10^{0,0000003} :$ &c.

Et les valeurs correspondantes de chacun de ces termes sont des nombres qui vont en croissant fort lentement; puisque le premier terme vaut 1, & que le dix-millionunieme ne vaut que 10.

Parmi ces termes insérés, il y en a donc un qui vaut 2, un autre qui vaut 3, un autre qui vaut 4, ou du moins qui en different très-peu, &c. On a trouvé, par

exemple, que 2 étoit à peu-près la valeur du terme $10^{0,3010300}$, que 3 étoit à peu-près $= 10^{0,4771213}$, que 4 $= 10^{0,6020600}$, &c; & on a regardé ces expoſants comme les logarithmes de 2, de 3, de 4, &c.

290. Par des calculs fondés ſur cette idée, mais dont les détails ſont immenſes, on a conſtruit des Tables de Logarithmes pour tous les nombres depuis 1 juſqu'à 100000, & qui ſervent à trouver ceux des nombres plus grands. Il y a de ces Tables où pour une plus grande préciſion, les Logarithmes ont dix, quinze, vingt décimales : mais les cinq premieres ſuffiſent ordinairement. Quant à la maniere de s'en ſervir, on peut la voir aſſez détaillée dans la derniere édition des Tables de logarithmes avec ſix décimales (chez Deſaint 1781); car pour en bien comprendre l'uſage, il faut avoir des Tables entre les mains.

291. On peut concevoir cependant, ſans y avoir recours, 1°, que les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 & 10 doivent commencer par 0; que ceux de tous les nombres qui ſont entre 10 & 100 commencent par 1; que le premier chiffre des logarithmes des nombres compris entre 100 & 1000 eſt 2, &c. Ce premier chiffre s'appelle *la Caractériſtique* du logarithme, parce qu'il ſert à faire connoître de combien de caracteres eſt compoſé le nombre qui répond à un logarithme donné; car il eſt évident que ce nombre doit avoir un chiffre de plus que la caractériſtique ne contient d'unités. Ainſi je vois tout d'un coup que ce logarithme 4,814560 appartient à un nombre de cinq chiffres, parce que ſa caractériſtique eſt 4.

292. 2°, Que le produit de deux nombres répond à la ſomme de leurs logarithmes, & que leur quotient répond à la différence de leurs logarithmes. Ainſi, pour multiplier 48 par 166, j'ajoute leurs logarithmes, qui ſont 1,681241 & 2,220108; la ſomme eſt 3,901349 : c'eſt un logarithme qui répond dans les Tables au nombre 7968, lequel eſt le produit de 48 × 166. Pour diviſer 7336 par

56, il faut retrancher le logarithme de 56, qui eſt 1,748188, du logarithme de 7336, qui eſt 3,865459, & la différence 2,117271 eſt un logarithme, qui répond dans les Tables à 131. Donc 131 eſt le quotient de 7336 diviſé par 56.

293. 3°, Que *pour faire une regle de trois par les logarithmes, il faut ajouter enſemble les logarithmes des termes qu'il eût fallu multiplier, & de la ſomme retrancher le logarithme du nombre par lequel il eût fallu diviſer le produit; le reſte eſt le logarithme du terme cherché.* Par exemple, ſoit la proportion 2843 : 8529 :: 3147 : x. Il faudroit pour avoir la valeur de x, multiplier 3147 par 8529, & diviſer leur produit 26840763 par 2843; mais par les logarithmes, il ſuffit d'ajouter enſemble ceux de 8529 & de 3147, qui ſont 3,93090 & 3,49790, & d'ôter 3,45378 logarithme de 2843, de la ſomme 7,42880; le reſte 3,97502 eſt le logarithme de x, lequel répond dans les tables à 9441.

294. 4°, Que *pour élever une quantité à une puiſſance quelconque*, il faut en ajouter le logarithme à lui-même autant de fois qu'on auroit multiplié cette quantité; c'eſt-à-dire, qu'*il faut multiplier ſon logarithme par l'expoſant de la puiſſance.* Ainſi pour élever 8 à la quatrieme puiſſance, il faut multiplier ſon logarithme 0,90309 par 4, & le produit 3,61236 eſt le logarithme de 4096, quatrieme puiſſance de 8.

295. Qu'enfin, *ſi on diviſe le logarithme d'une quantité donnée par l'expoſant de la racine qu'on en veut extraire, le quotient ſera le logarithme de cette racine;* ainſi pour extraire la racine cubique de 6859, diviſez ſon logarithme 3,83626 par 3, & le quotient 1,27875 ſera le logarithme de 19, qui eſt la racine cherchée. Mais on peut démontrer généralement toutes ces propriétés du calcul logarithmique: & c'eſt ce que nous allons faire dans le Chapitre ſuivant.

Des propriétés des Logarithmes en général.

296. SOIT a un nombre plus grand que l'unité; soit m l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever a pour avoir un nombre donné b, ensorte que l'on ait $a^m = b$. On est convenu d'appeller m le logarithme de b, & de l'écrire ainsi, $m = Lb$.

Supposant, par exemple $a = 10$, & $b = 100$, il faut que $m = 2$ pour que l'on ait $a^m = b$, & pour que 2 soit dans cette supposition, le logarithme de 100. Tel est, comme on l'a vu (289), le système des Tables ordinaires.

297. Il suit de-là que *les logarithmes ordinaires sont les exposants des puissances auxquelles il faudroit élever* 10, *pour avoir les nombres qui répondent à ces logarithmes.*

Et puisque d'un côté, tous les nombres peuvent être regardés comme étant différentes puissances de 10, & que de l'autre le produit ou le quotient des puissances se trouve en ajoutant ou en soustrayant leurs exposants, il est clair que la somme ou la différence des logarithmes de deux nombres doit répondre dans les Tables au nombre qui est le produit ou le quotient des deux autres. Nous avons déja déduit de ce principe les propriétés du calcul logarithmique, dans le discours qui est à la suite des Tables déja citées. Voici une autre maniere de les démontrer.

298. Si $a^m = b$, il est évident que $La^m = Lb$; & si $a^n = c$, on aura de même $La^n = Lc$; donc $bc = a^m \times a^n = a^{m+n}$, & $Lbc = La^{m+n} = m + n = Lb + Lc$. C'est-à-dire, que le logarithme d'un produit quelconque résulte de la somme des logarithmes de ses facteurs. Voilà donc toutes les multiplications réduites à de simples additions.

Soit p le produit; F, f les facteurs, & nous aurons généralement $Lp = LF + Lf$; d'où $LF = Lp - Lf$; c'est-à-dire, qu'étant donnés le produit & un de ses facteurs, on trouvera le logarithme de l'autre facteur, en ôtant le

logarithme du facteur connu de celui du produit ; ce qui ramene toutes les divisions à de simples soustractions.

De ce que $Lp = LF + Lf$, il suit que dans le cas où $F = f$, on a $Lp = LF^2 = 2LF$, & par conséquent $LF^3 = 3LF$, $LF^4 = 4LF$, ou en général, $LF^m = mLF$. Donc pour élever un nombre à une puissance quelconque, il suffit de multiplier le logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance proposée. Le logarithme qui en résulte est celui de la puissance que l'on cherche.

Et comme les racines ne sont que des puissances fractionnaires (159), il est clair qu'en multipliant le logarithme d'un nombre par la fraction indiquée, ou ce qui revient au même, en divisant ce logarithme par l'exposant de la racine, on aura toujours le logarithme de cette racine. Voici quelques exemples des cas les plus ordinaires.

$$L\,ab = La + Lb \quad \ldots\ldots \quad L\frac{a}{b} = La - Lb.$$

$$La^m = m\,La. \quad \ldots\ldots \quad La^{-m} = -m\,La.$$

$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La \quad \ldots\ldots \quad La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}La.$$

$$Labcd\ \&c = La + Lb + Lc + Ld + \&c.$$

$$L\frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le.$$

$$La^m b^p c^q = m\,La + p\,Lb + q\,Lc.$$

$$L\frac{ax^n}{r^z} = La + nLx - zLr.$$

$$L\frac{ab+bc}{m+n} = Lb + L(a+c) - L(m+n).$$

$$L\sqrt{(x^2+y^2)} = \tfrac{1}{2}L(x^2+y^2).$$

$$L\frac{a+x}{a-x} = L(a+x) - L(a-x).$$

$$L(a^2 - x^2) = L(a+x) + L(a-x).$$

$$L\sqrt{(a^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2}L(a+x) + \tfrac{1}{2}L(a-x).$$

$L\,3a^2 + La^4 + 5L3 = L3 + La^2 + La^4 + 5L3 = 6L3 + 2La + 4La =$
$= 6L3 + 6La = 6(L3 + La) = 6(L3 \times a) = 6L3a = L(3a)^6.$

$$Lz^3 + \tfrac{1}{4}Lz = \tfrac{13}{4}Lz = L(z^3\sqrt[4]{z^3}).$$

$$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}L(a - x) + \frac{m}{n}L(a^2 + ax + x^2).$$

$$L\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(a + x)^2} = \tfrac{1}{2}L(a - x) - \tfrac{1}{2}L(a + x).$$

$$L\,3a^2 + La^4 + 5L3 = 6L3a = L(3a)^6.$$

Du Calcul des Logarithmes par les Séries.

299. Les premiers Calculateurs des Tables avoient déja fini leurs calculs, lorſqu'on inventa des méthodes pour les ſimplifier. Mais ſi ces méthodes vinrent un peu tard, elles ne mériterent pas moins d'être accueillies pour la rapidité de leur marche. On en jugera mieux par les détails qui ſuivent.

Etant donné un nombre quelconque, trouver ſon logarithme.

Solution. Soit $1 + x$ le nombre donné .... ſoit $(1 + x)^m = 1 + z$ ..... Soit enfin $L(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c; on aura donc auſſi $L(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. Mais comme on a d'un côté l'équation $(1 + x)^m = 1 + z$, qui donne $z = mx + \frac{m.m-1}{2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3 +$ &c, & que l'on a d'un autre côté, $mL(1 + x) = L(1 + z)$, on trouvera que .....

$$mAx + mBx^2 + mCx^3 + \&c = Az + Bz^2 + Cz^3 + \&c.$$

Subſtituant donc la valeur de z dans le ſecond membre, l'équation deviendra .....

$$mAx + mBx^2 + mCx^3 + \&c = \begin{cases} mAx + \frac{m.m-1}{2}Ax^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}Ax^3 + \&c. \\ \quad + m^2Bx^2 \quad + m^2.m-1.Bx^3 + \&c. \\ \qquad\qquad + m^3Cx^3 \quad + \&c. \end{cases}$$

Réduiſant & comparant les termes homogenes (276) vous aurez 1°... $B = -\frac{1}{2}A$ ... 2° ... $C = \frac{1}{3}A$ ... 3° ... $D = -\frac{1}{4}A$; & ainſi des autres, enſorte que toute réduction faite, vous trouverez que

$$L(1 + x) = A(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \&c).$$

300. Remarquez maintenant que la quantité A eſt indéterminée, & que par conſéquent *le même nombre* $1 + x$ *peut avoir une infinité de logarithmes différents.* Mais comme le plus ſimple & le plus naturel de tous les ſyſtêmes logarithmiques, eſt celui où l'on ſuppoſe $A = 1$, on a donné le nom de *logarithmes naturels* à ceux qui ont

été calculés d'après cette ſuppoſition. Ce fut ſur cette eſpece de logarithmes que tomba d'abord le Géomètre Écoſſois, quoiqu'en ſuivant une route bien différente. On peut voir dans ſon Ouvrage (*Mirifici Logarithmorum Canonis Deſcriptio*) comment il y parvint. Ces Logarithmes s'appellent auſſi *Logarithmes Hyperboliques*, à cauſe du rapport qu'ils ont avec l'*Hyperbole Equilatére*, comme nous le dirons en ſon lieu.

301. Cela poſé, il eſt évident que tous les ſyſtêmes poſſibles de logarithmes peuvent être ramenés à celui des logarithmes naturels, puiſque dans tout ſyſtême, le logarithme de $1+x$ eſt égal au produit de ſon logarithme naturel par la quantité conſtante A que l'on appelle *le Module*, & que nous déterminerons bientôt. Ainſi toute la difficulté du calcul des logarithmes ſe réduit à calculer les logarithmes naturels ou hyperboliques. Or voici comment on peut faciliter le calcul de ces derniers.

302. Reprenons l'équation $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c)$ qui en ſuppoſant $A = 1$, devient $L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \&c$; & ajoutons de part & d'autre La, nous aurons $L(a+ax) = La + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \&c$. Soit $ax = y$, ou $x = \frac{y}{a}$; on aura $L(a+y) = La + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \&c$.

Faiſant donc y négative, nous aurons $L(a-y) = La - \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} - \frac{y^3}{3a^3} - \&c$. Donc $L(a+y) - L(a-y)$ ou $L\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = \frac{2y}{a}\left(1 + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{y^4}{5a^4} + \frac{y^6}{7a^6} + \&c\right)$, ſérie toujours convergente, parce qu'il faut que y ſoit plus petite que a pour que $\frac{a+y}{a-y}$ ſoit une quantité poſitive.

303. Appliquons maintenant cette ſérie au calcul des logarithmes, & pour cela ſuppoſons que $\frac{a+y}{a-y} = \frac{m}{m-1}$. Nous aurons $\frac{y}{a} = \frac{1}{2m-1}$, & $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$ ou $Lm - L(m-1) = \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6} + \&c\right)$. Donc $Lm = L(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \&c\right)$. Mais lorſqu'on cherche le logarithme du nombre m, on eſt cenſé avoir celui de $m-1$; on aura donc celui de m par une ſérie très-convergente, dans les cas ſur-tout où m ſera un nombre un peu grand. On peut en juger par le cas le moins favorable, en calculant le logarithme hy-

perbolique de 2 ? On aura $m = 2$, & par conſéquent $L\,2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} + \frac{1}{7.3^6} + \&c\right) = 0{,}69314718$ &c. Pour avoir enſuite le logarithme de 5, il n'y aura qu'à ſubſtituer 5 au lieu de m dans l'équation $L\,m = L(m-1) + \&c$, & on aura $L\,5 = 2L\,2 + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{2.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \&c\right) = 1{,}60943791$.

Il eſt donc aiſé de trouver par cette méthode les logarithmes des nombres premiers. Or ceux-ci une fois calculés, il eſt très-facile de trouver ceux de tous les autres nombres. Par exemple, étant donnés les logarithmes de 2 & de 3, leur ſomme donnera le logarithme de 6, (298). Celui de 4 ſera le double de celui de 2, comme celui de 9 ſera le double du logarithme de 3; & ainſi des autres.

304. Déterminons à préſent le module A pour un autre ſyſtême logarithmique, pour celui des Tables, par exemple, dans lequel $a = 10$, & dans lequel par conſéquent $L\,10 = 1$, car le logarithme de la baſe logarithmique eſt toujours l'unité.

Il faudra d'abord prendre le logarithme hyperbolique de 10 en ajoutant ceux de 5 & de 2; on aura 2,30258509. Enſuite (301), logarithme ordinaire de 10, ou $1 = A\,(2{,}30258509\ \&c)$; d'où l'on tire auſſi-tôt $A = \frac{1}{2{,}30258509\ \&c.} = 0{,}43429448$ &c. *C'eſt la valeur du module des Tables.*

Il ſuit de-là, que *pour ramener les logarithmes hyperboliques aux logarithmes tabulaires, il faut multiplier les premiers par la fraction* 0,43429448 &c.

Et réciproquement, *pour changer les logarithmes des Tables en logarithmes hyperboliques, il faut multiplier les premiers par* 2,30258509. Si on les multiplioit par 3,3219277, on auroit des logarithmes correſpondants à la ſuppoſition $a = 2$.

305. On détermineroit de la même maniere le module A dans tout autre ſyſtême. Celui des Tables (autrement appellé celui de Briggs, parce que Briggs en calcula le premier les logarithmes) ſert pour les calculs de *la Trigonométrie*. Celui des logarithmes hyperboliques eſt d'un grand uſage dans le *calcul intégral*.

Le nombre déterminé a eſt *la baſe logarithmique* de chaque ſyſtême. Ainſi 10 eſt la baſe du ſyſtême ordinaire. Celle du ſyſtême de Nepper eſt 2,71828183, comme nous le verrons bientôt.

En général, *la baſe d'un ſyſtême quelconque de logarithmes eſt toujours le nombre dont le logarithme eſt* 1.

306. *Étant donné un logarithme, trouver à quel nombre il répond.*

SOLUTION. Si le logarithme donné eſt du nombre des logarithmes ordinaires, on commence par le réduire aux hyperboliques, après quoi la difficulté ne conſiſte plus qu'à trouver le nombre qui répond à un logarithme hyperbolique donné.

Soit donc z ce logarithme, soit $1+x$ le nombre cherché, & on aura par ce qui précede, $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ Il s'agit de trouver (284) la valeur de x en z.

Pour cela je suppose..... $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c$;

Ce qui donne..... $z = \begin{cases} Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 & \&c \\ -\frac{1}{2}A^2 - AB - \frac{1}{2}B^2 & \&c \\ -AC & \\ +\frac{1}{3}A^3 + A^2B & \&c \\ -\frac{1}{4}A^4 & \&c \end{cases}$

Donc $A = 1$ .... $B = \frac{1}{2}$ .... $C = \frac{1}{6}$ .... $D = \frac{1}{24}$, &c; donc $x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \&c$;

Donc enfin $1+x$, ou le nombre cherché $= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4}$ &c. En général, un nombre quelconque $n = 1 + Ln + \frac{L^2n}{2} + \frac{L^3n}{2.3} + \frac{L^4n}{2.3.4}$ &c, série convergente dans tous les cas, & par conséquent propre à résoudre généralement la question proposée.

307. Appliquons-la à la recherche de la base des logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire, cherchons quel est le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1. Ici $n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \&c$; donc $n = 2,71828183$. Ce nombre sert très-souvent dans le calcul intégral. Le voilà calculé d'avance.

De l'usage des Logarithmes dans la résolution de plusieurs Equations.

308. SOUVENT il arrive qu'une équation échappe à toutes les regles de l'Algèbre ordinaire, & qu'elle se résout avec la plus grande facilité par le moyen des logarithmes. En voici plusieurs exemples avec quelques applications.

I. Soit proposé de trouver la valeur de x dans l'équation $a^x = b$. On a (298) La^x ou $x\,La = Lb$, donc $x = \frac{Lb}{La}$.

Soit $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$. On aura $mx\,La + (1-nx)\,Lb = Lc$, donc $mx\,La - nx\,Lb = Lc - Lb$; & $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb}$.

Soit encore $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$. Ici, $x\,La = mx\,Lb - nLb -$

$qx\,Lc$; d'où $x = \frac{n\,Lb}{m\,Lb - q\,Lc - La} = \frac{Lb^n}{Lb^m - Lc^q - La} = \frac{Lb^n}{L(b^m : ac^q)}$.

Enfin soit l'équation $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$. Nous aurons d'abord, $n\,Lb - \frac{a}{x}Lb - m\,x\,Lc = x\,L\,f - p\,L\,f$; puis ..... $(m\,Lc + L\,f)\,x^2 - (n\,Lb + p\,L\,f)\,x = -a\,L\,b$, ou $x^2\,Lc^m f - x\,L\,b^n f^p = -L\,b^a$, qui se résout par la méthode du second degré (201).

309. II. Supposons qu'il y ait cent mille habitans dans une province, & que la population y augmente tous les ans de la trentieme partie; on demande quel sera le nombre des habitans de cette province au bout d'un siecle? Ce problême & les suivans sont tirés d'un des meilleurs Ouvrages que nous connoissions. Il a pour titre *Introductio in Analysin infinitorum*, & pour Auteur, M. Euler, ce Géomètre si savant & si modeste!

Soit $n = 100000$. C'est le nombre donné des habitans, lequel par la condition du problême sera $n + \frac{1}{30}n$, ou $n\,(1 + \frac{1}{30})$ à la fin de la premiere année. Il deviendra $n\,(\frac{31}{30})^2$ à la fin de la seconde; $n\,(\frac{31}{30})^3$ à la fin de la troisieme, & ainsi de suite jusqu'au bout du siecle où son expression sera $n\,(\frac{31}{30})^{100}$, ou $100000\,(\frac{31}{30})^{100}$. On aura donc $100000\,(\frac{31}{30})^{100} = x$, nombre que l'on cherche.

Mais s'il falloit élever $\frac{31}{30}$ à la centieme puissance par des multiplications successives, on sent bien que le calcul seroit d'une extrême longueur: au lieu qu'en se servant des logarithmes, on aura tout de suite .... $L\,100000 + 100\,L\frac{31}{30} = Lx$; puis .... $L\frac{31}{30} = L\,31 - L\,30 =$ (par des tables qui ayent dix décimales, celles d'Ulacq, par exemple) $0{,}0142404\,39$; donc $100\,L\frac{31}{30} = 1{,}4240439$. D'ailleurs $L\,100000 = 5$; donc $Lx = 6{,}4240439$, & $x = 2654874$. Il y auroit donc, après 100 ans, deux millions six cents cinquante-quatre mille huit-cents soixante-quatorze habitants dans cette province.

La Terre n'ayant été repeuplée après le Déluge que par les trois enfants de Noé & par leurs trois femmes, on demande dans quel rapport la population auroit dû croître chaque année, pour qu'il y eût un million d'hommes au bout de 200 ans.

Soit $\frac{1}{x}$ l'accroissement annuel; & nous aurons l'équation ..... $6\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} = 1000000$, qui donne $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{100}}$, & par conséquent $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\,L\frac{1000000}{6} = \frac{1}{100}\cdot 5{,}2218487 =$

0,0161092 ; d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{1061961}{1000000}$, puis . . . $1000000 = 61963\,x$. Enfin $x = 16$ environ. Il eût donc fallu que le genre humain se fût accru tous les ans de $\frac{1}{16}$, ce que la santé robuste, & les longs jours de nos premiers Peres rendent assez vraisemblable.

Cherchons maintenant la quantité dont il faudroit qu'un peuple s'accrût tous les ans, pour être deux fois plus nombreux à la fin de chaque siecle.

Soit n le nombre de ceux qui composent ce peuple; soit $\frac{1}{x}$ la quantité que nous cherchons; on aura pour chaque époque séculaire, l'équation $n\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} = 2\,n$, qui donne . . . . . $L\,\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\,L\,2 = 0{,}0030103$; d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{100697551}{100000000}$, & $x =$ à peu-près 144. *Ainsi*, ajoute ce respectable Auteur, *on doit regarder comme bien ridicules les objections de ces incrédules, qui nient que la Terre ait pû être peuplée en aussi peu de temps par un seul homme.*

Supposons enfin qu'un certain nombre d'hommes augmente tous les ans de la centieme partie, combien faudra-t-il d'années pour que ce nombre soit dix fois plus grand ?

Appellant n ce nombre d'hommes, x le nombre cherché d'années, on aura au bout de x années, $n\,(\frac{101}{100})^x = 10\,n$, ou $(\frac{101}{100})^x = 10$, qui donne $x = \frac{L\,10}{L\,101 - L\,100} = \frac{100000000}{434214} = 231$. Donc il y aura dix fois plus d'habitans à chaque époque de 231 années.

INTRODUCTION A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.

310. Les plus célebres Analistes se sont occupés successivement de la résolution des Équations, comme d'une théorie fort utile. Mais lorsqu'ils ont voulu la traiter dans toute son étendue, elle leur a paru si compliquée, qu'ils y ont presque tous renoncé pour se livrer à des détails. Au défaut des méthodes directes, ils ont eu recours aux méthodes d'approximation ; & lorsque les regles générales se sont refusées à leurs efforts, ils en ont accumulé tant de particulieres, que l'on peut désormais avoir, sinon des ra-

cines exactes, au moins des racines très-approchées de toutes les équations. Nous allons faire connoître quelques-unes de ces regles, après avoir fait sur la nature des équations en général les remarques suivantes.

311. Il est clair qu'en transposant tous les termes d'une équation dans un seul membre, ces termes se détruiront mutuellement. Ainsi toute équation peut être réduite à n'avoir que zéro dans un de ses deux membres. Si on a, par exemple, $x^2 + a^2 = 2ax$, on peut en déduire $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Or dans cet état, le premier membre peut être regardé comme le produit de $x - a$ par $x - a$; & puisque ce premier membre se réduit à zéro, il faut bien que $x = a$, ou, ce qui revient au même, que $x - a = 0$.

Mais parce que c'est ici un quarré parfait, un de ses facteurs ne peut être égal à zéro que l'autre ne le soit aussi: au lieu que si l'on eût eu $x^2 - ax - bx + ab = 0$, un seul des facteurs, $x - a$, $x - b$, égalé à zéro, eût suffi pour réduire à zéro le premier membre. Supposer tout à la fois les deux facteurs égaux à zéro, ce seroit regarder a & b comme nécessairement égaux entre eux, ce qui n'est pas.

312. *Toute équation transposée peut donc être considérée comme le produit de plusieurs facteurs égaux ou inégaux. Lorsqu'ils sont tous égaux, ils se réduisent tous à zéro, & quand ils sont inégaux, un seul doit être égal à zéro.*

Cherchons d'après cela le produit des quatre facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, en supposant que l'un d'eux, n'importe lequel, soit égal à zéro. Nous trouverons,

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0. \\ - b & + ac & - abd & \\ - c & + ad & - acd & \\ - d & + bc & - bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$$

Or de cette équation & de toutes celles que l'on peut former de la même maniere, on doit conclure qu'une équation dont le degré eſt généralement exprimé par m, a pour premier terme x^m, c'eſt-à-dire, l'inconnue élevée à la puiſſance que déſigne le nombre des facteurs de cette équation.

Le ſecond terme eſt x^{m-1} avec un coefficient égal à la ſomme de toutes les racines a, b, c, d, &c.

Le troiſieme eſt x^{m-2} avec un coefficient égal à la ſomme des produits ab, ac, ad, bc, &c, de ces racines priſes deux à deux.

Le quatrieme eſt x^{m-3} avec un coefficient égal à la ſomme des produits abc, abd, &c, des mêmes racines priſes trois à trois; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme qui eſt toujours le produit de toutes les racines.

313. Il n'en faut pas davantage pour démontrer la formule qui ſert à élever un binome quelconque $x + a$ à une puiſſance quelconque m (148). Car pour élever le binome $x + a$ à la puiſſance m, il faut le multiplier $m - 1$ fois par lui-même. Ainſi le développement de cette puiſſance doit être regardé comme le produit d'un nombre m de facteurs tous égaux; & ſi $x + a = 0$, tout ce que nous venons de dire d'une équation du degré m, aura lieu pour la puiſſance m de $x + a$.

Enſorte donc que le premier terme ſera x^m; que le ſecond ſera x^{m-1} précédé d'un coefficient égal à la ſomme de toutes les racines. Or dans ce cas chaque racine eſt a, leur nombre eſt m. Donc leur ſomme eſt ma. Le ſecond terme ſera donc max^{m-1}.

Le troiſieme doit être x^{m-2} précédé d'un coefficient égal à la ſomme des produits de toutes les racines priſes deux à deux. Ce coefficient ſera donc a^2 multiplié par le nombre des produits que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, d, &c priſes deux à deux. Pour le trouver, ce nombre, remarquez 1°, qu'il doit être la moitié de celui des lettres qui ſervent à former tous ces produits. 2°, Qu'il faut répéter chacune de ces lettres le même nombre de fois,

& que ce nombre de fois eſt exprimé par $m-1$, puiſqu'il faut les multiplier chacune ſéparément par toutes les autres. Le nombre des lettres qui forment ces produits eſt donc $m(m-1)$, & par conſéquent celui de leurs produits deux à deux eſt $\frac{m(m-1)}{2}$. Ainſi le troiſieme terme ſera $\frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2}$.

Le quatrieme doit avoir pour coefficient la ſomme des produits que l'on peut faire avec les racines priſes trois à trois ; & comme ici toutes les racines ſont égales, ce coefficient doit être a^3 multiplié par le nombre des produits qui peuvent réſulter d'un nombre m de lettres a, b, c, d, &c, priſes trois à trois. Or 1°, le nombre de ces produits ne doit être que le tiers du nombre des lettres dont ils ſont compoſés. 2°, Il faut répéter chaque lettre le même nombre de fois, & ce nombre eſt déſigné par celui des produits des autres lettres priſes deux à deux. Donc puiſque le nombre de ces produits eſt $\frac{m(m-1)}{2}$; lorſque celui des lettres eſt m, il eſt clair qu'il ſera $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ lorſque celui des lettres ſera $m-1$, comme dans le cas préſent. Le nombre des lettres qui forment tous les produits abc, abd, &c, doit donc être $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$. Celui des produits ſera donc $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$; de ſorte que le quatrieme terme ſera $\frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^3 x^{m-3}$.

Formant de même les termes ſuivants, on trouvera que

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^3 x^{m-3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} a^4 x^{m-4} + \&c ; \ldots\ldots$$

& qu'en général $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3} b^3 + \&c$

Pour

Pour faire quelque application de cette formule, cherchons d'abord la cinquieme puiſſance du binome $a+b$. Nous trouverons $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Car $m=5$ dans ce cas; donc $a^m=a^5$; donc $ma^{m-1}b=5a^4b$; donc $\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2=10a^3b^2$; & ainſi de ſuite juſqu'au ſixieme terme $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5$, qui ſe réduit à b^5. Le calcul ne peut s'étendre plus loin dans cet exemple, parce que tous les termes qui ſuivent, ayant $m-5$ parmi les facteurs de leurs coefficients, & $m-5$ ſe réduiſant à zéro dans le cas préſent, tous ces termes ultérieurs s'y réduiſent auſſi.

Cette formule peut également ſervir à élever un polynome quelconque à une puiſſance quelconque. Soit propoſé, par exemple, d'élever le trinome $n+p+q$ à ſon cube. Je fais $a=n$; $b=p+q$; $m=3$. Donc $a^m=n^3$; $ma^{m-1}b=3n^2(p+q)$; $\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2=3n(p+q)^2$; & $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^{m-3}b^3=(p+q)^3$; enſorte que $(n+p+q)^3=n^3+3n^2p+3n^2q+3np^2+6npq+3nq^2+p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$.

Lorſqu'une expreſſion n'eſt pas fort compliquée, & qu'elle eſt en même temps une puiſſance parfaite, on en cherche la racine par les regles ordinaires de l'extraction. On pourroit la trouver par la formule du binome, mais le calcul en ſeroit plus long; ce qui fait qu'on ne s'en ſert communément que pour avoir des racines approchées.

314. Au reſte, on peut exprimer cette formule d'une maniere encore plus ſimple. En effet, de ce que $(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+$ &c...., il ſuit que $(P+PQ)^m=P^m+mP^mQ+\frac{m.m-1}{2}P^mQ^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}P^mQ^3+$ &c.

Donc ſi on repréſente par la lettre A le premier terme P^m, le ſecond ſera m A Q, & ſi le ſecond eſt repréſenté

à son tour par la lettre B, le troisieme sera $\frac{m-1}{2}$BQ. Celui-ci étant représenté par C, le quatrieme sera $\frac{m-2}{3}$CQ, &c, &c. On aura donc,

$$(P+PQ)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{mAQ} + \overset{C}{\frac{m-1}{2}BQ} + \overset{D}{\frac{m-2}{3}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3}{4}DQ} + \&c.$$

Or il est évident que cette formule est plus simple que la premiere, puisque le cinquieme terme, par exemple, se trouve tout de suite en multipliant D, terme déja calculé, par $\frac{m-3}{4}$Q, & que la quantité Q n'est autre chose que le second terme PQ du binome, divisé par le premier terme P.

APPLICATION. Soit proposé de trouver la quatrieme puissance de $2a+3z$.... Je fais $m=4$.... $P=2a$.... $PQ=3z$, d'où $Q=\frac{3z}{2a}$. J'ai donc $P^m = 16a^4$...., $mAQ = 4.16a^4.\frac{3z}{2a} = 96a^3z$... $\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2}.96a^3z.\frac{3z}{2a} = 216a^2z^2$.... $\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3}.216a^2z^2.\frac{3z}{2a} = 216az^3$... $\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}.216az^3.\frac{3z}{2a} = 81z^4$. Donc $(2a+3z)^4 = 16a^4 + 96a^3z + \&c.$

315. Enfin pour rendre cette derniere formule plus commode, supposons que l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome $P+PQ$ soit $\frac{m}{n}$; nous aurons généralement $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = \overset{A}{P^{\frac{m}{n}}} + \overset{B}{\frac{m}{n}AQ} + \overset{C}{\frac{m-n}{2n}BQ} + \overset{D}{\frac{m-2n}{3n}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3n}{4n}DQ} + \&c.$

APPLICATION. Il s'agit de trouver la racine cinquieme

de $u^2 - \xi^2$, ou la valeur approchée de $(u^2 - \xi^2)^{\frac{1}{5}}$. Pour cela, je suppose $P = u^2$, $Q = -\frac{\xi^2}{u^2}$, $m = 1$, $n = 5$, A = le premier terme, B = le second, C le troisieme, &c. Et je trouve que $(u^2 - \xi^2)^{\frac{1}{5}} = u^{\frac{2}{5}} - \frac{\xi^2}{5u^2} A + \frac{2\xi^4}{5u^4} B + \frac{3\xi^6}{5u^6} C + \frac{7\xi^8}{10u^8} D +$ &c $= u^{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{\xi^2}{5u^2} - \frac{2\xi^4}{25u^4} - \frac{6\xi^6}{125u^6} - \frac{21\xi^8}{625u^8} -\text{&c} \right)$. Revenons maintenant aux équations.

316. Lorsque parmi les facteurs d'une équation transposée, il n'y en a point d'imaginaires, & que ses termes sont précédés alternativement de signes différents, toutes les racines de cette équation sont positives. S'ils sont tous précédés du signe +, toutes les racines sont négatives. *Et en général, il y a autant de racines positives que de changements de signe, & autant de racines négatives que de répétitions immédiates du même signe.* C'est une exception fâcheuse que celle des facteurs imaginaires. Elle met en défaut la regle précédente, lorsqu'il y a de ces facteurs; & lors même qu'il n'y en a pas, cette regle devient presque inutile, si on ne le fait pas déja.

317. *Lorsqu'une équation manque de second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives*, sans quoi le second terme qui a pour coefficient la somme des unes & des autres ne se seroit pas évanoui (307).

Et puisque le dernier terme est toujours le produit de toutes les racines, il faut en conclure qu'*il y en a au moins une égale à zéro, toutes les fois que le dernier terme manque.*

318. Cette propriété qu'a le dernier terme d'être le produit de toutes les racines, a donné lieu à une méthode pour trouver celles qui sont commensurables. En effet, si après avoir cherché tous les diviseurs du dernier terme, on essaie de diviser l'équation par l'inconnue $x \pm$ quelqu'un de ces diviseurs, & que la division réussisse, on a dès-lors un facteur de l'équation, & par conséquent une de ses ra-

cines. Si on diviſe, par exemple, l'équation $x^4 - ax^3 + \&c$ (312) par $x - a$, on trouvera pour quotient $x^3 - \&c$, lequel diviſé à ſon tour par $x - b$, donnera $x^2 - \&c$; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait trouvé tous les facteurs de l'équation $x^4 - ax^3 + \&c$.

Si on propoſoit donc de trouver ceux de l'équation $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$, dans laquelle il doit y avoir deux racines poſitives & une négative, au cas toutefois qu'il n'y en ait pas d'imaginaires (316), on commenceroit par chercher tous les diviſeurs de 21; & on trouveroit ± 1, ± 3, ± 7, ± 21. On eſſayeroit enſuite la diviſion par $x + 1$, qui ne réuſſiſſant pas, feroit exclure ce diviſeur du nombre des facteurs cherchés. On eſſayeroit donc par $x - 1$, qui diviſant ſans reſte l'équation propoſée, ſeroit regardé comme un de ſes facteurs. En tâtonant de même, on trouveroit que $x - 3$ & $x + 7$ ſont les deux autres facteurs; d'où l'on concluroit que les trois racines ſont 1, 3 & -7, enſorte que l'une de ces trois valeurs indifféremment ſubſtituée dans l'équation au lieu de x, rendra ſon premier membre égal à zéro.

La pratique de cette méthode, (appellée communément la méthode des diviſeurs) n'a pas été bien longue dans cet exemple, parce que 21 ayant un petit nombre de diviſeurs il n'y a pas eu beaucoup de diviſions à tenter. Mais lorſque le dernier terme a un grand nombre de diviſeurs, cette méthode devient fatiguante. Rebutés de ſes longueurs, les Analyſtes ont imaginé un expédient aſſez prompt pour écarter au moins la plûpart des diviſions inutiles. Nous allons expliquer en quoi il conſiſte: mais il faut auparavant connoître la maniere de trouver tous les Diviſeurs d'un nombre.

Soit donc propoſé de trouver ceux du nombre 210. . . On voit d'abord que ce nombre peut être diviſé exactement par 2, & que le quotient de cette premiere diviſion eſt 105, qui étant un nombre impair n'eſt pas diviſible par 2. Ainſi le nombre propoſé 210 ne peut être diviſé par 4: mais comme 105 eſt diviſible par 3 (155), on voit

bien que 210, doit être diviſible par 6, qui eſt le produit des diviſeurs 2 & 6, dont on s'eſt ſervi.

Le quotient de la ſeconde diviſion eſt 35 qui ne peut être diviſé ni par 2, ni par 3, mais bien par 5. Ainſi 2.5, ou 10; 3.5, ou 15; 6.5, ou 30 ſont autant de diviſeurs exacts de 210.

Le quotient de la troiſieme diviſion eſt 7 qui n'eſt diviſible que par lui-même. Donc 7 fois 2, 7 fois 3, 7 fois 5, 7 fois 6, 7 fois 10, 7 fois 15, & 7 fois 30, ſont autant de nouveaux diviſeurs de 210: leſquels joints à ceux que les opérations précédentes ont fait connoître, compoſent la ſuite de tous les diviſeurs demandés.

La regle pour trouver tous les diviſeurs d'un nombre, ſe réduit donc à le diviſer d'abord par 2, s'il eſt pair, ou par 3, ou par 5, ou par 7, ou par quelqu'un des autres *nombres premiers*, s'il eſt impair. Puis on diviſe ce premier quotient par 2 encore, s'il eſt pair, ou par 3, ou par 5, &c, s'il eſt impair. Enſuite on multiplie le premier diviſeur par le ſecond, & on écrit le produit au rang des diviſeurs cherchés. Si le ſecond quotient eſt encore pair, on le diviſe par 2, & s'il eſt impair on eſſaie de le diviſer comme ci-deſſus, par un des autres nombres premiers, en commençant toujours par les plus petits. Après quoi, on multiplie tous les diviſeurs déja trouvés par celui dont on vient de faire uſage, & on pourſuit la diviſion juſqu'à ce que l'on parvienne enfin à un dernier quotient qui ſoit l'unité.

Deux exemples ſuffiront pour rendre cette méthode familiere. Voici d'abord le détail de celui que nous venons d'expliquer.

Dividendes	210	1. *Diviſeurs.*
&	105	2.
Quotients.	35	3.6.
	7	5.10.15.30.
	1	7.14.21.35.42.70.105.210.

Ainſi tous les diviſeurs de 210 ſont . . . . 1 . . 2 . . 3 . . 5 . . 6 . . 7 . . 10 . . 14 . . 15 . . 21 . . 30 . . 35 . . 42 . . 70 . . 105 . . 210.

Soit propoſé maintenant de trouver les diviſeurs de 900 . . . . je diſpoſe les parties du calcul, comme dans l'exemple précédent, & je trouve

Dividendes	900	1.	*Diviſeurs.*
&	450	2.	
Quotients.	225	2.4	
	75	3.6.12	
	25	3.9.18.36	
	5	5.10.15.20 30.45.60.90.180.	
	1	5.25.50.75.100.150.225.300.450.900.	

Le nombre 900 a donc pour diviſeurs . . . 1 . . 2 . . 3 . . 4 . . 5 . . 6 . . 9 . . 10 . . 12 . . 15 . . 18 . . 20 . . 25 . . 30 . . 36 . . 45 . . 50 . . 60 . . 75 . . 90 . . 100 . . 150 . . 180 . . 225 . . 300 . . 450 . . 900.

On peut trouver par la même méthode tous les diviſeurs de 360, & leur grand nombre fera ſentir la raiſon du partage purement arbitraire que les anciens Géometres ont fait de la circonférence du cercle en 360 degrés (97).

319. Cela poſé, ſoit a l'un des diviſeurs du dernier terme, qui étant ajouté à x forme le facteur $x + a$ d'une équation quelconque. Il eſt certain que ſi dans cette équation on ſuppoſe ſucceſſivement $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ &c, les réſultats que donnera le premier membre par ces différentes ſuppoſitions, ſeront ſucceſſivement diviſibles par $1 + a$, par a, par $-1 + a$, &c, provenus des mêmes ſuppoſitions faites dans le facteur $x + a$.

Or $1 + a$, a, $-1 + a$ ſont en progreſſion arithmétique. Donc aucun des diviſeurs du dernier terme (auquel ſeul l'équation ſe réduit par la ſuppoſition de $x = 0$) ne peut être le nombre cherché a, s'il n'eſt moyen proportionel entre deux autres diviſeurs des nombres provenus, l'un de la ſuppoſition $x = 1$, l'autre de la ſuppoſition $x = -1$. Et comme la différence de cette progreſſion eſt 1, il faut que le diviſeur qui répond à la ſuppoſition $x = 0$, ſurpaſſe d'une unité le diviſeur correſpondant à la ſuppoſition $x = -1$, & ſoit ſurpaſſé à ſon tour d'une unité par le diviſeur qui répond à la ſuppoſition $x = 1$.

Si on fait enſuite, $x = 2$, $x = 3$, &c, on doit trouver parmi les diviſeurs qui en proviendront, des termes qui ſoient en progreſſion arithmétique avec les précédents. Au moyen de cette condition, il eſt aiſé de connoître les facteurs qui diviſent exactement l'équation. On voit bien au reſte que chacun des diviſeurs du dernier terme doit être pris ſucceſſivement en + & en —.

Pour faire quelque application de cette méthode, cherchons les racines commenſurables de l'équation $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$. Je ſuppoſe d'abord $x = 1$; le premier membre ſe réduit à 6: ſi $x = 0$, il ſe réduit à 10: & ſi $x = -1$, le réſultat eſt 20. Je cherche tous les diviſeurs de 6, de 10, & de 20. Enſuite, je regarde ſi parmi ceux de 10, il en eſt qui étant pris en + ou en —, ſurpaſſent d'une unité quelqu'un de ceux du nombre 20, & ſoient ſurpaſſés à leur tour de la même quantité par quelqu'un de ceux du nombre 6. Je trouve que $+2$ & $+5$ ont ces conditions. Car 3 & 6, diviſeurs du nombre 6 ſurpaſſent d'une unité 2 & 5, diviſeurs de 10; & ceux-ci ſurpaſſent de la même quantité 1 & 4, diviſeurs de 20. Pour plus de clarté, on peut diſpoſer ainſi les ſuppoſitions, les réſultats, les diviſeurs, & les progreſſions.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Prog.*	
$x = 1$	6	1 . 2 . 3 . 6	3	6
$x = 0$	10	1 . 2 . 5 . 10	2	5
$x = -1$	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	1	4

Ces deux progreſſions me font déja connoître qu'il ſeroit inutile de tenter la diviſion de l'équation propoſée par d'autre facteur que $x + 2$, ou $x + 5$. Elles ne m'apprennent pas cependant ſi ces deux facteurs réuſſiront. Je ne puis m'en aſſurer qu'en eſſayant la diviſion, ou en faiſant une nouvelle ſuppoſition, par exemple $x = 2$, laquelle donne 14 pour réſultat; d'où je conclus que la premiere progreſſion 1, 2, 3 exigeant pour être continuée, que 4 ſoit un des diviſeurs de 14, ce qui n'eſt pas, $x + 2$ ne peut être un des facteurs de mon équation. Mais la progreſſion 4, 5, 6 exigeant 7 pour être continuée, & 14 étant diviſible par 7, je ſuis sûr que ſi l'équation a un facteur commenſurable, elle n'en a point d'autre que $x + 5$. Je la diviſe donc par $x + 5$, & la diviſion me réuſſit. Le quotient $x^2 - 2x + 2$ n'eſt plus que du ſecond degré, & ſes deux facteurs imaginaires $x - 1 \pm \sqrt{-1}$ ſe trouvent tout de ſuite en réſolvant l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Soit pris pour ſecond exemple, $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0$. Je ſuppoſe $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ & j'écris comme ci-deſſus tous les diviſeurs des réſultats 36, 75, & 144, provenus de ces trois ſuppoſitions.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Prog.*			
$x=1$	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36	4	-2	6	-4
$x=0$	75	1.3.5.15.25.75	3	-3	5	-5
$x=-1$	144	1.2.3.4.6.8.9.12.16.18.24.36.48.72.144	2	-4	4	-6

Je cherche enſuite parmi les diviſeurs de 75, ceux qui ſurpaſſent d'une unité quelqu'un des diviſeurs de 144, & qui ſont ſurpaſſés de la même quantité par quelqu'un de ceux de 36. Les nombres 3 & 5 pris tant en + qu'en — ont cette propriété, ce qui forme quatre progreſſions.

Pour connoître maintenant celles qu'il faut exclure, (car le dernier terme n'étant que — 75, il ne peut être le produit de ces quatre nombres), je ſuppoſe $x=2$. Le réſultat eſt 21, qui n'eſt pas diviſible par 5, comme la premiere progreſſion l'exigeroit. Donc $x+3$ n'eſt pas un des facteurs cherchés.

Pour vérifier les trois autres progreſſions, je ſuppoſe $x=-2$, ce qui donne pour réſultat 225. Or 225 n'eſt pas diviſible par 7, comme il le faudroit pour continuer la quatrieme progreſſion, — 4, — 5, & — 6; on doit donc rejetter $x-5$. Mais 225 eſt diviſible par 5 & par 3, comme la ſeconde & la troiſieme progreſſion l'exigent. Les ſeuls facteurs à eſſayer ſont donc $x+3$, & $x+5$.

J'eſſaie le premier. Il réuſſit, & donne pour quotient $x^3+2x^2-10x+25$, que j'eſſaye de diviſer par le ſecond. La diviſion réuſſit encore, & le quotient x^2-3x+5 n'a plus de facteurs commenſurables.

On voit par ces exemples avec quelle facilité on trouve les facteurs ſimples d'une équation numérique, lorſqu'elle en a. La méthode en eſt aiſée, & quoiqu'elle ne ſoit pas exempte de tâtonement, elle n'en eſt pas moins précieuſe par tous ceux qu'elle fait éviter.

Si l'équation à réſoudre paſſoit le troiſieme degré, elle pourroit bien n'être décompoſable qu'en facteurs du ſecond. Voici en peu de mots la maniere de trouver ces facteurs. On peut la voir bien détaillée dans les éléments d'Algebre de M. Clairaut.

310. Si on repréſente par $xx+bx+c$ le diviſeur à deux dimenſions d'une quantité donnée, il eſt clair qu'en faiſant ſucceſſivement $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, les réſultats provenus de cette ſubſtitution dans la quantité donnée, ſeront diviſibles ſucceſſivement par $4+2b+c$, par $1+b+c$, par c, par $1-b+c$, & par $4-2b+c$ réſultats du diviſeur x^2+bx+c. Il y aura donc parmi les diviſeurs du réſultat de $x=2$, un nombre qui repréſentera $4+2b+c$; & ſi de chacun de ces diviſeurs pris en + & en —, on retranche 4, quelqu'un de leurs reſtes repréſentera $2b+c$.

Il y aura parmi les diviſeurs du réſultat de $x=1$, un nombre qui repréſentera $1+b+c$. Donc ſi on ôte l'unité de tous ces diviſeurs pris tant en + qu'en —, ce ſera parmi ces reſtes que ſe trouvera $b+c$.

Parmi les diviſeurs du dernier terme de l'équation auquel elle ſe réduit lorſque $x=0$, on trouvera un nombre qui repréſentera c.

Parmi ceux du réſultat de $x = -1$, on trouvera $-b+c$ en retranchant l'unité de chacun de ces diviſeurs. Enfin on trouvera $4-2b+c$ dans la ſuite des diviſeurs du réſultat de $x=-2$, & ſi on ôte 4 de chacun de ces diviſeurs pris en $+$ & en $-$, quelqu'un de leurs reſtes repréſentera $-2b+c$.

Remarquez maintenant que $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ forment une progreſſion arithmétique, & que par conſéquent dans les ſuites des nombres qui repréſenteront $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$, il ne faudra prendre que des proportionels-arithmétiques. Celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=0$, repréſentera c; celui qui répondra à $x=1$ ſera $b+c$; donc ſi l'on ôte celui qui repréſente c de celui qui repréſente $b+c$, on aura la valeur de b, & par-là le facteur $xx+bx+c$ ſera déterminé.

Dans l'application de cette méthode, il pourra arriver qu'il y ait des progreſſions à rejetter. On ſaura bientôt à quoi s'en tenir, par une nouvelle ſuppoſition $x=3$ ou -3 : car ſi de tous les diviſeurs poſitifs & négatifs du nouveau réſultat on ôte 9, il doit y avoir parmi leurs reſtes des nombres propres à continuer les progreſſions qu'il faut admettre. Toutes celles qui ne pourront être continuées, ſont dans le cas d'être exclues.

Remarquez ſeulement que la quantité à retrancher chaque fois des diviſeurs eſt le quarré de la valeur correſpondante de x. D'après cela, il eſt aiſé de ſaiſir l'eſprit de la méthode, & d'en faire des applications. Deux ſuffiront.

On demande ſi l'équation $x^4-3x^3-12x+5=0$, a des facteurs commenſurables du ſecond degré?

J'écris les ſuppoſitions dans une premiere colonne, les réſultats dans la ſuivante; la troiſieme eſt pour les diviſeurs; la quatrieme pour les quarrés à ſouſtraire; les deux autres ſont pour les reſtes & les progreſſions.

Sup.	*Reſ.*	*Div.*	*Q*	*Reſt.*	*Prog.*			
$x=2$	15	1.3. 5. 15	4	-19,- 9,-7,-5,-3,-1,+1,+11	-3	1	- 5	11
$x=1$	9	1.3. 9.	1	-10,- 4,-2,0,+2,+8	-4	0	- 2	8
$x=0$	5	1.5.	0	- 5,- 1,+1,+5	-5	-1	+1	5
$x=-1$	15	1.3. 5. 15	1	-16,- 6,-4,-2,0,+2,+4,+14	-6	-2	4	2
$x=-2$	33	1.3.11. 33	4	-37,-15,-7,-5,-3,-1,+7,+29	-7	-3	7	-1

Celle des reſtes ſe forme, comme nous l'avons dit, en retranchant de tous les diviſeurs correſpondants pris en $+$ & en $-$, le quarré de la valeur correſpondante de x. La premiere ligne, par exemple, ſe forme en diſant, $-15-4=-19\ldots-5-4=-9\ldots-3-4=-7\ldots-1-4=-5$. Voilà tous les reſtes des diviſeurs de 15 pris en $-$. Pour les trouver quand on prend ces diviſeurs en $+$, il n'y a qu'à dire, $+1-4=-3\ldots+3-4=-1\ldots+5-4=+1\ldots+15-4=+11$. Les lignes ſuivantes ſe forment

de même. Il n'y a que la quantité à retrancher, qui varie dans chacune.

Comparons maintenant les reſtes de la troiſieme ligne qui répond à $x = 0$, avec ceux des lignes ſupérieures & inférieures, afin de trouver des progreſſions. Je vois d'abord que -5 eſt moyen proportionel entre -4 & -3 qui ſont au-deſſus, & -6 & -7 qui ſont dans les deux dernieres lignes. J'écris cette premiere progreſſion, & je compare ſucceſſivement -5 à tous les autres nombres ſupérieurs & inférieurs, pour ſavoir s'il n'y a pas d'autre progreſſion. Je n'en trouve point.

Je paſſe donc à -1 qui n'en donne qu'une auſſi dont la différence eſt 1. Enſuite à $+1$ qui en donne une autre dont la différence eſt 3. Enfin à $+5$ qui en donne une quatrieme. Mais il eſt bien évident que ces quatre progreſſions ne peuvent être admiſes toutes à la fois, puiſque le dernier terme de l'équation n'eſt que 5 (318).

Pour en exclure quelqu'une, je ſuppoſe $x = 3$, & j'ai pour réſultat 23, dont les diviſeurs ſont 1 & 23. Souſtrayant enſuite de ces diviſeurs pris en $+$ & en $-$ le quarré de 3, je trouve ces quatre reſtes, -32, -10, -8, $+14$, parmi leſquels manquent -2 & $+2$ qui ſeroient néceſſaires pour continuer les deux premieres progreſſions. Il faut donc les rejeter.

A l'égard des deux dernieres, on voit qu'elles peuvent être continuées par -8 & par 14. Ainſi je prends dans l'avant-derniere le terme $+1$ qui répond à $x = 0$, pour repréſenter c; & le terme -2 qui répond à $x = 1$, pour repréſenter $b + c$. J'en conclus que $b = -3$, & que parconſéquent le premier facteur à eſſayer eſt $x^2 - 3x + 1$. Je l'eſſaie, & la diviſion qui réuſſit me donne pour quotient $x^2 + 3x + 5$. Les deux facteurs de l'équation propoſée ſont donc $x^2 - 3x + 1$, & $x^2 + 3x + 5$, qu'il eſt aiſé de réſoudre ſi l'on veut par les méthodes du ſecond degré.

Soit pris pour ſecond exemple, $x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 2 = 0$. Ayant fait à l'ordinaire $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, je cherche tous les diviſeurs des réſultats 30, 15, 2, 3, & 78; le reſte s'entend aſſez par le détail ſuivant.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Q*
$x = 2$	30	1.2.3.5.6.10.15.30	4
$x = 1$	15	1.3.5.15	1
$x = 0$	2	1.2	0
$x = -1$	3	1.3	1
$x = -2$	78	1.2.3.6.13.26.39.78	4

Reſtes.		*Progr.*	
-34, -19, -14, -10, -9, -7, -6, -5, -3, -2, -1, +1, +2, +6, +11, +26	-6	$+2$	6
-16, -6, -4, -2, -0, +2, +4, +14	-4	0	4
-2, -1, +1, +2	-2	-2	2
-4, -2, 0, +2	0	-4	0
-82, -43, -30, -17, -10, -7, -6, -5, -3, -2, -1, +2, +9, +22, +35, +74	$+2$	-6	-4

Des trois progreſſions que m'offre cet exemple, je vois qu'il faut rejeter les deux dernieres, en ſuppoſant $x = 3$: car le réſultat 37 n'ayant pour diviſeur que 1 & 37, il eſt clair qu'en ôtant 9 de ces deux diviſeurs pris poſitivement & négativement, les reſtes -46, -10, -8, $+28$ ne permettront de continuer que la premiere progreſſion par -8.

J'ai donc -2 pour repréſenter c, & -4 pour repréſenter $b + c$: d'où je tire $b = -2$. Ainſi, s'il y a un facteur commenſurable à deux dimenſions dans l'équation propoſée, ce doit être $x^2 - 2x - 2$; je tente donc la diviſion, & je trouve pour quotient exact $x^3 + 3x + 1$.

Ces principes ſuffiſent pour trouver les diviſeurs commenſurables du premier & du ſecond degré, dans les équations qui ne paſſent pas le cinquieme. Celles qui ſont plus élevées ne ſont quelquefois diviſibles que par des facteurs du troiſieme, quatrieme, &c. Mais nous ne nous arrêterons pas à expliquer la maniere de les trouver, tant à cauſe de la longueur des calculs, qu'à cauſe du peu d'utilité qui en réſulte.

Nous ne nous arrêterons pas non plus à expliquer comment on décompoſe une équation purement algébrique en ſes facteurs de deux ou de pluſieurs lettres, du premier ou du ſecond degré. Quoique fort ingénieuſes, toutes ces méthodes ſe reſſentent pourtant un peu du tâtonnement.

Maniere de transformer les Equations, & d'en faire évanouir le ſecond terme.

321. Il eſt ſouvent utile de faire ſubir aux équations certains changements, de ſuppoſer, par exemple, l'inconnue égale à une autre inconnue $+$ une quantité indéterminée. Cette ſuppoſition facilite en certains cas la réſolution des équations.

Lorſque, par exemple, elles ſont affectées de coefficients fractionaires, comme celle-ci .... $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{f}{g} = 0$, & que l'on veut ôter toutes ces fractions, il n'y a qu'à ſuppoſer $x = \frac{y}{m}$ (y étant une nouvelle inconnue, & m une quantité que l'on détermine toujours facilement) : en ſubſtituant cette valeur à x, l'équation propoſée deviendra ... $\frac{y^3}{m^3} + \frac{by^2}{am^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{f}{g} = 0$, ou $y^3 + \frac{bmy^2}{a} + \frac{cm^2y}{d} + \frac{fm^3}{g} = 0$. Or cette derniere équation n'aura plus de coefficients fractionaires, ſi m eſt diviſible tout à la fois par a, par d, & par g ; & il le ſera, ſi on prend pour m leur produit adg, ou même un plus petit nombre que ce produit, quand les nombres

a, d, g, ne ſont pas premiers entre eux. Subſtituant donc $a d^2 g^2$ à lieu de m dans $y^3 + \frac{b m y^2}{a} +$ &c, on aura l'équation $y^3 + bdgy^2 + a^2 cdg^2 y + a^3 d^3 fg^2 = 0$, où il n'y a plus de fractions.

Les racines de cette équation une fois trouvées, celles de $x^3 + \ldots x^2 +$ &c. ſe préſenteront d'elles-mêmes, en diviſant les premieres par m que nous venons de déterminer. Toute la difficulté conſiſte donc à trouver ces premieres racines. Pour en faciliter la recherche, on a imaginé de faire évanouir le ſecond terme des équations à réſoudre; & voici comment on fait cette transformation.

322. Soit l'équation générale, $x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm$ &c $\ldots + \omega = 0$. Je ſuppoſe $x = y + f$ (y étant une autre inconnue, & f une indéterminée à laquelle on donnera telle valeur qu'il conviendra, pour faire évanouir le ſecond terme). J'ai donc la transformée,

$$\left.\begin{array}{l} y^m + my^{m-1} f + \dfrac{m \cdot m-1}{2} y^{m-2} f^2 + \text{&c} \ldots + \omega \\ \pm ay^{m-1} \pm \overline{m-1} \cdot ay^{m-2} f \pm \text{&c} \\ \qquad \pm by^{m-2} \pm \text{&c} \\ \qquad\qquad \text{&c} \end{array}\right\} = 0.$$

Maintenant, pour que le ſecond terme de cette équation s'évanouiſſe, il faut que $my^{m-1} f \pm ay^{m-1} = 0$. Il faut donc qu'après avoir diviſé par my^{m-1}, & tranſpoſé, on ait $f = \mp \frac{a}{m}$. Ce qui nous fait voir d'une maniere générale, que *pour faire évanouir le ſecond terme d'une équation, il n'y a qu'à ſuppoſer l'inconnue égale à une autre inconnue moins ou plus le coefficient du ſecond terme de cette équation, diviſé par le nombre qui en exprime le degré.* On met moins, lorſque le ſecond terme eſt poſitif; & plus, quand il eſt négatif.

Toute équation du ſecond degré ſemblable à celle-ci $x^2 + ax = b$, ſe réſout promptement par cette transformation, en faiſant $x = y - \frac{a}{2}$, & en ſubſtituant. Nous ne nous y arrêterons pas. Soit donc $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, que l'on voudroit changer en une équation équivalente, dans laquelle il n'y eût plus de ſecond terme.

Pour cela, je ſuppoſe $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$; & ſubſtituant, il vient $y^3 * - 8y - 15 = 0$, qui n'a pas de ſecond terme, c'eſt-à-dire, de y^2 dans cet exemple.

Pour transformer $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, je fais $x = y - \frac{2}{4} = y$

$-\frac{1}{2}$, & j'ai $y^4 * - \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$, dont le ſecond terme eſt évanoui. On transformeroit $z^5 + az^4 - bz^3 + cz + d = 0$, en ſuppoſant $z = x - \frac{a}{5}$; & ainſi des autres.

La même méthode ſerviroit à faire évanouir le troiſieme terme d'une équation; car en remontant à la transformée générale $y^m + my^{m-1} f +$ &c, il n'y auroit qu'à ſuppoſer $\frac{m \cdot m-1}{2} y^{m-2} f^2 \pm (m-1)\, ay^{m-2} f \pm by^{m-2} = 0$. On trouveroit $f = \mp \frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{m^2} \mp \frac{2b}{m \cdot m-1}\right)}$. Mais comme la ſubſtitution de cette valeur de f introduiroit des radicaux dans la transformée, on aime mieux ne faire évanouir que le ſecond terme. Le calcul deviendroit encore plus compliqué, ſi on vouloit faire évanouir le quatrieme ou le cinquieme, &c.

Du Calcul des Quantités radicales.

323. A commencer aux équations du ſecond degré, les quantités radicales ſont inévitables dans la réſolution de preſque toutes les équations. Il eſt donc à propos d'apprendre à calculer ces quantités, avant que d'aller plus avant dans cette théorie.

Quoique l'on appelle en général quantités radicales, toutes les quantités affectées du ſigne radical, il y en a pourtant beaucoup qui ne ſont radicales qu'en apparence; ce ſont des quantités commenſurables, qui peuvent par-là même ſubir les extractions de racine indiquées par l'expoſant du radical. Or toutes les fois que cette opération eſt poſſible, il ne faut pas manquer de la faire. C'eſt ainſi que les quantités ſuivantes $\sqrt{225} \ldots \sqrt{a^2 b^4} \ldots \sqrt[3]{x^6 y^9} \ldots \sqrt[4]{(1 + 4\varphi + 6\varphi^2 + 4\varphi^3 + \varphi^4)}$ ſe réduiſent à celles-ci, (157).

$$\pm 15 \ldots \pm ab^2 \ldots x^2 y^3 \ldots 1 + \varphi, \text{ ou } -1 - \varphi.$$

Le reſte des quantités radicales ſe partage en deux claſſes, dont l'une comprend toutes les quantités incommenſurables; l'autre renferme toutes les quantités imaginaires.

Les incommenſurables que l'on appelle auſſi quantités irrationelles, ne peuvent jamais être débarraſſées du radical qui les affecte, parce qu'il n'eſt pas poſſible d'avoir leur valeur d'une maniere exacte. Tout ce que l'on peut faire de mieux, c'eſt d'approcher de cette valeur, par les méthodes les plus promptes, ou du moins de ſimplifier ces quantités, lorſqu'il y a lieu.

Par exemple, les quantités ſuivantes peuvent être ſimplifiées, en

appliquant les regles d'extraction aux parties qui en sont susceptibles; & on peut écrire ces quantités, comme on les voit ici.

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ldots\sqrt[3]{432}=2\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2}\ldots\sqrt[4]{405}=3\sqrt[4]{5}.$$

$$\sqrt{m^2n}=m\sqrt{n}\ldots\sqrt[3]{\varphi^4a^5}=\varphi a\sqrt[3]{a^2}\ldots\sqrt[5]{\frac{c^6d^{12}}{g^8}}=\frac{cd^2}{g^2}\sqrt[5]{cd^2}.$$

$$\sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=(a-b)\sqrt{3}.$$

Outre ces premieres réductions praticables seulement en certains cas, les incommensurables peuvent subir toutes les opérations de l'Arithmétique. Il faut donc savoir comment on les assujettit à ces opérations.

324. L'addition des radicaux se fait en les écrivant de suite, avec les signes qui leur sont propres; & s'il se trouve des radicaux semblables, c'est-à-dire, qui aient le même exposant, & qui affectent la même quantité, on les réduit suivant la méthode ordinaire (113).

Soit proposé, par exemple, d'ajouter $\ldots\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, 2\sqrt{a}, -3\sqrt[3]{b}\ldots$ On écrira $3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}$. Soit proposé ensuite d'ajouter, $\sqrt[4]{x^3y}, -a\sqrt[4]{x^3y}+b\sqrt[4]{x^3y}\ldots$ On écrira $(1-a+b)\sqrt[4]{x^3y}$.

En général la somme de $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ peut se réduire à $\frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$. La soustraction des radicaux consiste à changer seulement le signe du coefficient du radical que l'on veut soustraire; & si par hazard les deux radicaux sont semblables, on les réduit comme ci-dessus.

Exemple. $3\sqrt{7}-\sqrt{7}=2\sqrt{7}\ldots\sqrt{75}-4\sqrt{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}\ldots\sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^3}=3a\sqrt{3ab}-ab^2\sqrt{3ab}=(3a-ab^2)\sqrt{3ab}$.

325. La multiplication des quantités radicales se fait à peu-près comme celle des autres quantités. Il y a seulement deux regles particulieres à observer; l'une dans le cas où le multiplicande & le multiplicateur sont soumis à des radicaux de même degré; l'autre, dans le cas, où leurs radicaux sont différents.

Dans le premier cas, on multiplie à l'ordinaire les quantités soumises à ces signes, & on écrit leur produit sous le radical commun; sauf à réduire ensuite, s'il y a lieu.

Exemples. $\ldots\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\ldots\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\sqrt[c]{5x^2y^4}\times\sqrt[c]{20ux}=\sqrt[c]{(100ux^2y^4)}\ldots\sqrt[g]{p}\times\sqrt[g]{-q}=\sqrt[g]{-pq}$.

Dans le second cas, on se contente souvent d'indiquer la multiplication; ou, si on veut l'effectuer, de maniere que le produit soit affe-

tenu à un seul radical, on commence par réduire les deux radicaux des facteurs au même exposant: après quoi on multiplie comme dans le premier cas.

Or pour opérer cette réduction, il faut multiplier l'un par l'autre les deux exposants des signes radicaux, & multiplier de même les exposants des quantités soumises à un radical, par l'exposant de l'autre radical. Cette double opération fait rentrer le second cas dans le premier.

EXEMPLES.... $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{a^3 b^2} \ldots \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[mn]{b^m c^n} \ldots \sqrt[p]{b^q} \cdot \sqrt[q]{c^p} = \sqrt[pq]{b^{qq} c^{pp}}$.

326. La division des radicaux peut quelquefois s'effectuer, quand ils ont le même exposant: mais lorsque la division est impraticable, on l'indique seulement, de la même maniere que pour les quantités rationelles.

EXEMPLES. $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \ldots \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{33}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \ldots \frac{\sqrt[m]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}} = \sqrt[n]{\frac{a}{by}}$.

Mais pour diviser $\sqrt[m]{a}$ par $\sqrt[p]{x}$, on écrira $\sqrt[m]{a} : \sqrt[p]{x}$; ou si l'on veut réduire ces deux radicaux au même exposant, on aura; $\sqrt[mp]{a^p} : \sqrt[mp]{x^m} = \sqrt[mp]{\frac{a^p}{x^m}}$.

En général $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}} : \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}} = \frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}$.

327. On éleve les quantités radicales à leurs différentes puissances, soit entieres, soit fractionaires, en multipliant leurs exposants par celui de la puissance à laquelle on veut les élever: après quoi, s'il y a quelque réduction à faire, on la fait.

Si on avoit, par exemple, $\sqrt{2}$ à élever au cube, on écriroit d'abord $\sqrt{2^3}$, ou $\sqrt{8}$; puis $2\sqrt{2}$. Pareillement pour élever au cube $\sqrt{a^m}$, on écriroit $\sqrt{a^{3m}}$; & pour élever $\sqrt{a^n b^x}$ au quarré, on ôteroit simplement le radical. Ainsi $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y \ldots$, & $(x + \sqrt{y})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y}$.

328. En général, quand l'exposant du radical est le même que celui de la puissance proposée, il n'y a qu'à ôter le radical. Ainsi $(\sqrt[m]{a})^m = a$. C'est une suite évidente du calcul des puissances par leurs exposants (157); & toutes les fois que l'on éprouvera quelque difficulté dans le calcul des radicaux, rien ne sera plus facile que de la résoudre, en transformant les quantités radicales en puissances fractionaires (161).

329. Les quantités imaginaires se calculent de la même façon. On

les ajoute, on les ſouſtrait & on les réduit, comme toutes les autres quantités radicales: mais il y a dans leur multiplication un cas aſſez embarraſſant, dont il eſt bon d'être prévenu.

Soit donc propoſé de multiplier $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$. Il ſemble d'abord que le produit doit être $\sqrt{+a^2} = a$: mais en remontant à l'origine du ſigne radical, on ne tarde pas à ſe convaincre que le produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$ doit être $-a$. Que déſigne-t-on en effet par l'expreſſion générale $\sqrt{m}$? N'eſt-ce pas la quantité, qui multipliée par elle-même, donne m? Soit donc $m = -a$; on aura $\sqrt{-a} . \sqrt{-a} = \sqrt{m} . \sqrt{m} = m = -a$.

Il eſt vrai qui ſi on multiplioit ſous le ſigne radical, $-a$ par $-a$, on trouveroit $\sqrt{+a^2}$: mais ſi on obſerve que $\sqrt{+a^2}$ peut être également $+a$ & $-a$, & que l'ambiguité de ſigne (qui a lieu en général toutes les fois qu'on ignore ſi a^2 provient de $+a . +a$, ou de $-a . -a$) ne ſauroit exiſter ici, puiſque l'on ſait que a^2 eſt provenu de $-a . -a$, il eſt impoſſible qu'on ne ſoit pas convaincu, que dans ce cas $\sqrt{a^2}$ eſt $-a$, & non $+a$.

D'après cette obſervation, il n'eſt pas difficile de voir que les puiſſances ſucceſſives de $\sqrt{-a}$ ſont....

$\sqrt{-a}, -a, -a\sqrt{-a}, a^2, a^2\sqrt{-a}, -a^3$, &c. & que les mêmes puiſſances de $-\sqrt{-a}$ ſont pareillement... $-\sqrt{-a}, -a, a\sqrt{-a}, a^2, -a^2\sqrt{-a}, a^3$ &c...

330. Cela poſé, la multiplication des polynomes qui ont des termes affectés d'imaginaires, ne doit plus être ſujette à aucune difficulté, pourvu qu'on faſſe attention aux ſignes qui précedent ces termes. Ainſi le quarré de $1 + \sqrt{-1}$ eſt $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$, ou $2\sqrt{-1}$.... Le cube de $-1 + \sqrt{-3}$ eſt $-1 + 3\sqrt{-3} + 9 - 3\sqrt{-3}$, ou 8.... Le produit de $x + a + \sqrt{-b}$ par $x + a - \sqrt{-b}$, eſt $x^2 + 2ax + a^2 + b$.

331. Ces deux derniers exemples font voir qu'une quantité réelle eſt quelquefois le produit de pluſieurs facteurs imaginaires, & que par conſéquent *une équation peut avoir un certain nombre de racines imaginaires, quoique tous ſes coëfficients ſoient réels.*

Soit $x + a + \sqrt{-b}$ l'un des facteurs imaginaires d'une équation dont le premier membre eſt A. On peut faire voir que cette même équation doit avoir auſſi pour facteur $x + a - \sqrt{-b}$; car il n'y a qu'une quantité de la forme $B(x + a - \sqrt{-b})$ qui multipliée par $x + a + \sqrt{-b}$, puiſſe donner un produit réel $B(x^2 + 2ax + a^2 + b)$ comme l'eſt le premier membre A. L'exiſtence du facteur imaginaire $x + a + \sqrt{-b}$ dans une équation entraîne donc celle d'un autre facteur pareil $x + a - \sqrt{-b}$, qui ne differe du premier que par le ſigne de $\sqrt{-b}$. Leur produit eſt équivalent au facteur du ſecond degré $x^2 + 2ax + a^2 + b$ entierement réel, & dont le dernier terme $a^2 + b$ eſt toujours poſitif. On tire de-là diverſes conſéquences utiles dans la théorie des équations.

1°, Les racines imaginaires qui ſe trouvent dans une équation, y ſont toujours en nombre pair.

2°,

2°, Les racines imaginaires que l'on rencontre dans la ſolution d'une équation, ont deux à deux la même quantité ſous le ſigne radical, & ne different que par les ſignes + & —.

3°, Toute équation d'un degré impair, a au moins une racine réelle.

4°, Toute équation d'un degré pair dont le dernier terme eſt négatif, a au moins deux racines réelles, puiſque le produit réel des radicaux imaginaires qui ſont alors partie des deux polynomes multipliés l'un par l'autre, ne peut être qu'une quantité poſitive (325).

Méthode pour extraire les Racines des quantités en partie rationelles & en partie incommenſurables.

332. Les équations qui ſe réſolvent par les méthodes du ſecond degré offrent ſouvent à extraire des racines de quantités en partie rationelles & en partie radicales. Ces équations ſont généralement repréſentées par $x^{2m} + px^m = q$, & leur ſolution générale donne $x = \sqrt[m]{[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$. Il importe donc à la réſolution complette de ces équations, que $\sqrt[m]{[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$ ſoit réduite, lorſque cela eſt poſſible, à une expreſſion plus ſimple, dans laquelle il n'entre qu'une quantité rationelle, avec un radical du ſecond degré. C'eſt pourquoi nous allons donner la méthode de faire cette réduction.

Prenons d'abord le cas où $m = 2$, c'eſt-à-dire; cherchons la racine quarrée des quantités en partie rationelles, en partie radicales. Nous repréſenterons généralement ces quantités par $p + \sqrt{q}$, & leur racine par $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. S'il n'y a qu'un ſeul radical dans la racine que l'on cherche, l'une de ces deux quantités $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ ſera commenſurable.

On aura donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(p + \sqrt{q})}$, d'où l'on tirera $x + y + 2\sqrt{xy} = p + \sqrt{q}$. Egalant enſuite la partie commenſurable du premier membre à celle du ſecond, on aura $x + y = p$. Leurs parties incommenſurables donneront $4xy = q$; d'où $y = \frac{q}{4x} = p - x$; & par conſéquent $x^2 - px = -\frac{q}{4}$; d'où encore $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}q)}$, & $y = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{q}{4})}$. Donc $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, ou $\sqrt{(p + \sqrt{q})} = \sqrt{[\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{(p^2 - q)}]} + \sqrt{[\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{(p^2 - q)}]}$.

Or quoique cette derniere quantité paroiſſe auſſi compliquée que $\sqrt{(p + \sqrt{q})}$, cependant lorſque celle-ci ſera ſuſceptible d'une racine exacte, l'autre pourra ſe réduire à une expreſſion plus ſimple. Il eſt aiſé de voir en effet, que ſi $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ eſt la racine quarrée de $p + \sqrt{q}$, celle de $p - \sqrt{q}$ doit être $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, & que par conſéquent $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ ou $x - y = \sqrt{(p^2 - q)}$, quantité commenſurable toutes les fois que $p + \sqrt{q}$ a une racine quarrée exacte.

APPLICATIONS. I°. On demande si $4+2\sqrt{3}$ a une racine quarrée exacte ? Pour le savoir, je fais $4=p..2\sqrt{3}$ ou $\sqrt{12}=q$. J'ai donc $q=12\ldots\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{3}$, &c. . . . . $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=1$; d'où je tire $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ ou $-1-\sqrt{3}$. C'est la racine demandée.

II°. On demande encore la racine de $8+2\sqrt{15}$?.... Ici on a $p=8$, $q=60$. Donc $\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{5}$, & . . . . $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{3}$. Donc $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ou $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

Il suit de là que $\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=1-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}-1$, & que $\sqrt{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$, ou $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. En général, $\sqrt{(p-\sqrt{q})}=\sqrt{(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}$, ou $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}-\ldots\ldots\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}$.

333. La même formule peut servir à extraire la racine quarrée d'une quantité en partie rationelle & en partie imaginaire. Soit, par exemple, $-1+2\sqrt{-2}$ qui étant comparée avec $p+\sqrt{q}$, donne $p=-1$, $q=-8$, $\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}$, & $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})}$, d'où $\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}=1+\sqrt{-2}$ ou bien $-1-\sqrt{-2}$.

334. On trouve quelquefois des quantités imaginaires monomes qui ont des racines binomes. Telle est la quantité $2\sqrt{-1}$ dont la racine est $1+\sqrt{-1}$. Pour extraire ces sortes de racines, on s'y prendra de la même maniere que dans les exemples précédents. Si on vouloit donc avoir celle de $m\sqrt{-1}$, (m étant une quantité réelle quelconque), on suppoſeroit $\sqrt{m\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$, ce qui donneroit $m\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$; d'où $x^2-y^2=0$, ce qui donne $x=y$, & $2xy=m$, d'où l'on tire $x=\sqrt{\frac{1}{2}m}$. Donc, en général, $\sqrt{m\sqrt{-1}}=\ldots\sqrt{\frac{1}{2}m(1+\sqrt{-1})}$.

335. Cherchons à préſent la racine cubique de $p+\sqrt{q}$, & repréſentons-la par $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$. Nous prenons $x+\sqrt{y}$, au lieu de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, parce que le cube de ces deux dernieres quantités ne contiendroit aucun terme commenſurable. Nous prenons auſſi $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, parce que dans le cube de cette expreſſion il entre auſſi bien une quantité commenſurable, que dans celui de $x+\sqrt{y}$, & parce que cette indéterminée z nous ſera utile.

Nous aurons donc $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(p+\sqrt{q})}$, & par conſéquent $(x-\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(p-\sqrt{q})}$. Multiplions l'une par l'autre ces deux équations, il viendra $(x^2-y)\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{(p^2-q)}$; d'où $x^2-y=\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)}}{z}$. Donc ſi x^2-y eſt commenſurable, c'eſt-à-dire, ſi on peut avoir la racine cubique exacte de la quantité propoſée

$p+\sqrt{q}$, l'expreſſion $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)\zeta}}{\zeta}$ doit être auſſi commenſurable. Mais il faut pour cela, que $(p^2-q)\zeta$ ſoit un cube parfait; il faut donc que $\zeta=1$, toutes les fois que p^2-q ſera un cube parfait; ou s'il ne l'eſt pas, il faut que l'on prenne pour ζ un nombre propre à le rendre tel.

Soit pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)\zeta}}{\zeta}=a$; nous aurons $x^3-y=a^3$ & puiſque d'un côté l'équation $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{\zeta}=\sqrt[3]{(p+\sqrt{q})}$ étant élevée à ſon cube, donne $x^3\zeta+3xy\zeta+3x^2\zeta\sqrt{y}+y\zeta\sqrt{y}=p+\sqrt{q}$, & que d'un autre côté, l'équation $x^3-y=a^3$ donne $y=x^3-a^3$, on trouvera 1°, que $x^3\zeta+3xy\zeta=p$, d'où $x^3+3xy=\frac{p}{\zeta}$; 2°, qu'en ſubſtituant ici la valeur de y, on a $4x^3-3ax=\frac{p}{\zeta}$; d'où $4x^3-3ax-\frac{p}{\zeta}=0$.

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver les diviſeurs commenſurables de cette derniere équation. Elle doit en avoir ſi $p+\sqrt{q}$ a une racine cubique exacte. On connoîtra donc x, ce qui déterminera auſſitôt la valeur de y; & comme ζ eſt déja connue, la racine que l'on cherche ſe trouvera toute connue.

Applications. I°. Quelle eſt la racine cube de $10+6\sqrt{3}$?... On a $p=10$, $q=108$. Donc $p^2-q=-8$, cube parfait; donc $\zeta=1$, $a=-2$, & l'équation $4x^3-3ax-\frac{p}{\zeta}=0$, devient $4x^3+6x-10=0$. Or $x-1$ eſt un diviſeur commenſurable de cette derniere équation; on a donc $x=1$, d'où $y=x^2-a=3$, & $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

II°. Quelle eſt la racine cube de $8+4\sqrt{5}$?... Ici $p=8$, $q=80$, donc $p^2-q=-16$ qui n'eſt pas un cube. Pour qu'il le devienne, on ſuppoſera $\zeta=4$, ce qui donnera $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)\zeta}}{\zeta}=-1=a=x^3-y$. Alors l'équation $4x^3-3ax-\frac{p}{\zeta}=0$, ſe change en celle-ci, $4x^3+3x-2=0$, dont le diviſeur $2x-1$; donne $x=\frac{1}{2}$, & par conſéquent $y=\frac{1}{4}$. La racine cherchée eſt donc $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$.

336. Nous remarquerons ici qu'une quantité quelconque a toujours trois racines cubiques. Cela ſuit de ce que la valeur de x ſe tire d'une équation du troiſieme degré, $4x^3-3ax-\frac{p}{\zeta}=0$, & de ce que la valeur de y dépend de celle de x. Sur quoi il faut obſerver que ſi la quantité propoſée eſt réelle, elle a une ſeule racine cube réelle, & que ſi elle eſt imaginaire, ſes trois racines cubes le ſont auſſi.

Dans la premiere application, par exemple, que nous venons de faire, nous avons trouvé que $1+\sqrt{3}$ étoit la racine cube exacte & réelle de $10+5\sqrt{3}$. S'il falloit maintenant trouver les deux racines imaginaires, je chercherois les trois racines de l'équation $4x^3+6x-10=0$, qui ſont (318) $x=1$, $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{-1}$. Ces trois valeurs de x donneroient $y=3$, & $y=\mp\frac{1}{3}\sqrt{-1}$; d'où je conclurois que les trois racines cubes cherchées ſont $1+\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{-1}+\sqrt{(\mp\frac{1}{2}\sqrt{-1})}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+3)\frac{\sqrt{-1}}{2}$.

337. Il ne ſeroit guere plus difficile d'extraire les trois racines cubes des quantités en partie commenſurables & en partie imaginaires. Soit, par exemple, la quantité $-10+9\sqrt{-3}$, qui donne $p=-10$, $q=-243$, & $p^2-q=343$, cube parfait; donc $z=1$, & $a=\sqrt[3]{343}=7\ldots y=x^2-7$, & $4x^3-21x+10=0$. Cette derniere équation donne $x=2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{5}{2}$, & par conſéquent $y=-3$, $y=-\frac{27}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$. Les trois racines cubes de $-10+9\sqrt{-3}$ ſont donc $2+\sqrt{-3}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Soit encore $-11-2\sqrt{-1}$ qui donne $p=-11$, $q=-4$, $p^2-q=125$, $z=1$, $a=5$, & $4x^3-15x+11=0$. De la derniere équation on tirera $x=1$, $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$. Donc $y=-4$, $y=-\frac{7}{4}\mp\sqrt{3}$ Donc $\sqrt[3]{(-11-2\sqrt{-1})}=1+2\sqrt{-1}$, ou $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}+\sqrt{(-\frac{7}{4}\mp\sqrt{3})}$.

Pour extraire des racines plus élevées, dans le même genre, on ſuivroit à peu-près le même procédé.

Réſolution des Equations du troiſieme degré.

338. POUR réſoudre une équation du troiſieme degré, on commencera par en faire évanouir le ſecond terme, ce qui la réduira à une équation de cette forme, $x^3+px+q=0$. On ſuppoſera enſuite $x=y+z$, & on déterminera les valeurs de ces nouvelles inconnues, de la maniere ſuivante.

Par la ſubſtitution de $y+z$ à la place de x dans l'équation $x^3+px+q=0$, elle deviendra $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+py+pz+q=0$; & ſi on ſuppoſe, comme on en eſt bien le maître, que $y^3+z^3+q=0$, il ne reſtera que $3y^2z+3yz^2+py+pz=0$, ou même que $3yz+p=0$ (en diviſant par $y+z$), ce qui donne

$$y=-\frac{p}{3z}=-\frac{\frac{1}{3}p}{z}.$$

Subſtituons cette valeur de y dans $y^3+z^3+q=0$; nous aurons $z^3-\frac{\frac{1}{27}p^3}{z^3}+q=0$, ou $z^6+qz^3-\frac{1}{27}p^3=0$: équation du ſixieme degré, mais qui ſe réſout par les méthodes du ſecond (332), & qui donne $z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$. D'où $z=\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$;

Maintenant, de $y^3+z^3+q=0$, on peut tirer $y^3=-z^3-q=-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$. Donc $y=\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$. Donc $y+z$, ou $x=\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}+\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}=\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}+\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$. Car la premiere expreſſion ſe réduit à la ſeconde, dans les deux cas du ſigne $\pm$.

339. A la vue de cette valeur générale de x, on ne croiroit pas d'abord qu'il fût poſſible d'en tirer trois racines pour l'équation $x^3+px+q=0$. Mais ſi l'on diviſe cette équation par le facteur ſuppoſé, $x-y-z$, on verra que le quotient eſt une équation du ſecond degré, laquelle à ſon tour ſe décompoſera facilement en ſes deux facteurs.

Soit en effet ſubſtitué dans l'équation $x^3+px+q=0$, $-3yz$ au lieu de p, (puiſqu'on a trouvé $y=\frac{-p}{3z}$); & $-y^3-z^3$ au lieu de q, (puiſqu'on a ſuppoſé $y^3+z^3+q=0$). Soit auſſi ſubſtitué dans la valeur générale de x, y au lieu de $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$, & z au lieu de $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$. L'équation deviendra $x^3-3yzx-y^3-z^3=0$; & ſon premier facteur ſera $x-y-z$.

Diviſons à préſent l'équation par ce facteur. Nous trouverons pour quotient exact, $x^2+xy+xz+y^2-yz+z^2=0$, équation du ſecond degré, qui donnera pour les deux autres valeurs de l'inconnue, $x=(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2})y-(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2})z$; & par conſéquent $x=(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2})\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}-(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$.

Or cette derniere formule donne deux valeurs imaginaires de x, toutes les fois que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ eſt une quantité réelle. Reſte donc à ſavoir ce que deviennent ces valeurs, lorſque $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ eſt imaginaire, ou, ce qui revient au même, lorſque $\frac{1}{27}p^3$ eſt négatif & plus grand que $\frac{1}{4}q^2$.

Je ſuppoſe, pour abréger, que $f=\frac{1}{2}q$, & que $g\sqrt{-1}$ repréſente $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$; on aura,

$$x=(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}};$$

& réduiſant en ſérie, on trouvera 1°, que $(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-f^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1}-\frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2-\frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^4+$ &c. . . . . On trouvera 2°, que $(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\ldots\ldots f^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1}+\frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2-\frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g^3\sqrt{-1}-\frac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^4+$ &c. Donc $(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-$

$(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, ou $x=-2f^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{g^2}{9f^2}-\frac{10g^4}{243f^4}+\frac{154g^6}{6561f^6}-\text{&c.}\right)$, expreſſion qui ne contient aucun terme imaginaire.

Et ſi nous reprenons les deux autres valeurs de $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right]}-\frac{(1\pm\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right]}$, ou $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{(-f+g\sqrt{-1})}+\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{(f+g\sqrt{-1})}$, nous aurons $x=f^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{g^2}{9f^2}-\frac{10g^4}{243f^4}+\frac{154g^6}{6561f^6}-\text{&c}\right)\mp\frac{g}{f^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}\left(1-\frac{5g^2}{27f^2}+\frac{22g^4}{243f^4}-\frac{374g^6}{6561f^6}+\text{&c}.....\right)$, autre expreſſion qui n'a point de terme imaginaire.

Donc *lorſque* $\frac{1}{27}p^3$ *eſt négatif & plus grand que* $\frac{1}{4}q^2$, *les trois valeurs de* x *ſont réelles.*

Il n'y a guere d'effort que l'on n'ait fait pour déterminer ces trois valeurs réelles, autrement que par des ſéries : mais on n'a pu en venir à bout. La difficulté attachée à ce cas, lui a fait donner le nom de *cas irréductible.*

340. Si p eſt poſitif, ou ſi étant négatif, il eſt tel que $\frac{1}{27}p^3$ ſoit moindre que $\frac{1}{4}q^2$, alors une des trois valeurs de x eſt réelle, & les deux autres ſont imaginaires. Ainſi *toute équation du troiſieme degré a au moins une racine réelle.*

Appliquons maintenant ces principes à un ou deux exemples, & d'abord propoſons-nous de trouver les trois racines de l'équation $y^3-3y^2+12y-4=0$.

Je fais $y=x+1$, & le ſecond terme diſparoît dans la transformée $x^3+9x+6=0$, qui étant comparée à $x^3+px+q=0$, donne $p=9$, $q=6$. Et parce que p ſe trouve ici poſitif, j'en conclus que des trois racines que je cherche, une ſeule eſt réelle. Pour la trouver, je ſubſtitue les valeurs de p & de q dans la formule générale $x=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\text{&c}}\right)}.....+\sqrt{\text{&c}}.....$ & j'ai $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3}\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$. Donc $x+1$ ou $y=1+\sqrt[3]{3}\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$. C'eſt la valeur réelle de y. Il eſt aiſé de trouver ſes deux valeurs imaginaires.

Propoſons-nous enſuite l'équation $x^3-3x-18=0$, qui donne $p=-3$, & $q=-18$. Or quoique p ſoit négatif ici, il eſt tel cependant que $\frac{1}{27}p^3$ eſt moindre que $\frac{1}{4}q^2$. La propoſée a donc une racine réelle & deux imaginaires. La premiere eſt $x=\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})}+\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}=3$. Les deux autres ne ſont pas difficiles à trouver.

Dans ce dernier exemple, il eût été plus ſimple de chercher les diviſeurs commenſurables de la propoſée $x^3-3x-18=0$. C'eſt mê-

me, en général, ce que l'on doit faire lorſqu'on a une équation du troiſieme degré à réſoudre, ſur-tout lorſque cette équation eſt dans le cas irréductible. Au défaut de ces diviſeurs, on peut avoir recours à une méthode d'approximation que nous expliquerons bientôt. On peut auſſi ſe ſervir des ſéries trouvées ci-deſſus : mais elles ſont ordinairement ſi peu convergentes, que pour en tirer des valeurs ſuffiſamment exactes, il faut en calculer un grand nombre de termes, ce qui devient fort long.

341. REMARQUE. Quoique dans le cas irréductible, la valeur de x ait une forme imaginaire, il n'eſt pas difficile cependant de trouver ſa valeur réelle, lorſqu'elle eſt un nombre entier. Car l'expreſſion générale de cette valeur étant la formule $x = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]}$, il eſt néceſſaire qu'elle ſe réduiſe à un nombre entier, lorſqu'une des valeurs de x eſt un nombre entier. Or elle ne peut s'y réduire qu'autant que $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ eſt un cube parfait, dont la racine eſt compoſée d'une partie réelle que j'appelle m, & d'une partie imaginaire n. C'eſt donc à dire que $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]} = m+n$, & que par conſéquent $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}]} = m-n$. Donc $x = 2m$.

Donc lorſque dans le cas irréductible une des valeurs de x eſt un nombre entier, on trouvera exactement cette valeur en doublant la partie réelle de la racine cube de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$. Et parce que $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ a trois racines cubes (337), il eſt clair que pour avoir les trois valeurs de x dans ce cas, il ſuffit de prendre le double des trois parties réelles de ces racines.

Soit pris pour exemple, $x^3-39x-70=0$, qui étant comparée à $x^3+px+q=0$, donne $p=-39$, $q=-70$. Donc $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3} = 35+18\sqrt{-3}$. Mais $35+18\sqrt{-3}$ a pour ſes trois racines cubes $-1+2\sqrt{-3}\ldots\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\ldots-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; dont les parties réelles ſont $-1\ldots+\frac{7}{2}\ldots-\frac{5}{2}$. Les trois valeurs de x ſont donc -2, $+7$, -5.

Soit encore $x^3-17x-4=0$; d'où $p=-17$, $q=-4$, & $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)} = 2+\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{5}{3}}$. Les trois racines cubes de cette derniere quantité ſont $-2+\sqrt{-\frac{5}{3}}\ldots 1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(-\frac{41}{12}+\sqrt{5})}\ldots 1-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(-\frac{41}{12}-\sqrt{5})}$. Donc les trois racines cherchées ſont -4, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$. D'où l'on voit qu'il eſt inutile de chercher les parties imaginaires des trois racines cubes de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, quand on en connoît les parties réelles.

Réſolution des Equations du quatrieme degré.

342. UNE équation du quatrieme degré étant propoſée à réſoudre, on commencera par en faire évanouir le ſecond terme, ce qui la

changera en une autre de cette forme, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Enſuite, on regardera la transformée comme le produit de deux équations du ſecond degré chacune, telles que $x^2 + \zeta x + y = 0$, & $x^2 - \zeta x + f = 0$. On ſuppoſe que ζ, y, & f ſont des indéterminées. D'ailleurs le ſecond terme de ces deux équations eſt le même aux ſignes près, afin que leur produit puiſſe donner une équation qui n'ait pas de ſecond terme. Ce produit donne en effet . . . . . .

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^2 + f\zeta x + fy = 0. \\ \quad -\zeta^2 \quad -y\zeta \\ \quad -y \end{array}$$

Or de cette équation comparée terme à terme avec $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, on tire $p = f - \zeta^2 + y \ldots q = (f - y)\zeta \ldots r = fy$; ce qui donne 1°, $f + y = p + \zeta^2 \ldots$ 2°, $f - y = \frac{q}{\zeta}$. Donc $f = \frac{p + \zeta^2}{2} + \frac{q}{2\zeta} \ldots y = \frac{p + \zeta^2}{2} - \frac{q}{2\zeta}$; & par conſéquent fy ou $r = \frac{(p+\zeta^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4\zeta^2}$; d'où l'on tire $\zeta^6 + 2p\zeta^4 + (p^2 - 4r)\zeta^2 - q^2 = 0$, équation du ſixieme degré, mais qui n'a d'autre difficulté que celle du troiſieme, en faiſant $\zeta^2 = u$. On appelle cette équation *la Réduite*, & ſes racines étant une fois trouvées, on ne tarde pas à connoître celles de la propoſée $x^4 + px^2 +$ &c.

Effectivement, ſi dans les équations $x^2 + \zeta x + y = 0 \ldots\ldots$ & $x^2 - \zeta x + f = 0$, on ſubſtitue pour f & y leurs valeurs en ζ, & qu'enſuite on réſolve ces équations, on aura pour la premiere, $x = -\frac{1}{2}\zeta \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2\zeta})}$, & pour la ſeconde, $x = \frac{1}{2}\zeta \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2\zeta})}$. Réuniſſant donc ces deux formules, on aura $x = \pm\frac{1}{2}\zeta \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2\zeta})}$, d'où l'on tire les quatre valeurs cherchées de x, dans leſquelles il n'y a plus qu'à ſubſtituer la valeur de ζ que donne la Réduite. Ces quatre valeurs ſont . . . .

$$x = \tfrac{1}{2}\zeta + \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\zeta^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2\zeta}\right)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\zeta - \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\zeta^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2\zeta}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\zeta + \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\zeta^2 - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2\zeta}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\zeta - \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\zeta^2 - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2\zeta}\right)}$$

D'où il ſuit, en général, que les racines d'une équation du quatrieme degré ſont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires, ou que deux étant réelles, les deux autres ſont imaginaires. Il ne peut jamais y avoir un nombre impair des unes ni des autres (331).

343. Soit, pour abréger, $a=\frac{1}{2}z \ldots b=\sqrt{(-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2z})} \ldots$ $c=\sqrt{(-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2z})}$, & nous aurons $x=a+b \ldots x=a-b \ldots x=-a+c, x=-a-c \ldots$ ou bien en tranſpoſant, $x-a-b=0, x-a+b=0, x+a-c=0, x+a+c=0$. Multipliant ces quatre facteurs les uns par les autres, nous trouverons...

$$\begin{array}{rrrr} x^4 & -2a^2x^2 & +2ac^2x & +a^4=0; \\ & -b^2 & -2ab^2 & -a^2b^2 \\ & -c^2 & & -a^2c^2 \\ & & & +b^2c^2 \end{array}$$

équation qu'il eſt aiſé de comparer avec $x^4+px^2+qx+r=0$, & qui donne $p=-2a^2-b^2-c^2 \ldots q=2ac^2-2ab^2 \ldots r=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$. Subſtituant ces valeurs de p, q, r dans la Réduite z^6+ &c, elle deviendra . . . . . .

$$\begin{array}{rrrr} z^6 & -4a^2z^4 & +8a^2b^2z^2 & +8a^2b^2c^2=0. \\ & -2b^2 & +8a^2c^2 & -4a^2b^4 \\ & -2c^2 & +b^4 & -4a^2c^4 \\ & & -2b^2c^2 & \\ & & +c^4 & \end{array}$$

Or les trois facteurs de cette derniere équation ſont $z^2-4a^2 \ldots$; $z^2-b^2-2bc-c^2 \ldots z^2-b^2+2bc-c^2$. D'où il ſuit,

1°, Que la Réduite conſidérée comme une équation du troiſieme degré n'a qu'une racine réelle, toutes les fois que l'une des deux quantités b & c eſt imaginaire, ou ce qui revient au même, toutes les fois que l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$ a deux racines réelles & deux imaginaires. On peut donc avoir dans ce cas la ſolution exacte de la Réduite, & par conſéquent celle de la propoſée.

344. 2°, Que ſi b & c ſont toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires, c'eſt-à-dire, ſi la propoſée x^4+px^2+ &c, a ſes racines ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, alors la Réduite conſidérée encore comme du troiſieme degré eſt dans le cas irréductible; elle a ſes trois racines réelles. Et ſi ces trois racines ſont toutes poſitives, l'équation propoſée a ſes quatre racines réelles. Car alors, $2a, b+c, b-c$ ſont des quantités réelles. Soit donc la premiere $=M$, la ſeconde N, & la troiſieme P, on aura $2b=N+P$, & $2c=N-P$. Donc $2a+2b=M+N+P \ldots 2a-2b$

$= M - N - P \ldots - 2a + 2c = N - P - M \ldots - 2a - 2c = P - N - M$, & puiſque $2a + 2b$, $2a - 2b$, $-2a + 2c$, $-2a - 2c$ ſont les quatre valeurs de $2x$, il eſt clair que les quatre valeurs de x ſont toutes réelles dans ce cas.

Mais ſi la Réduite n'a qu'une de ces racines poſitives, toutes celles de la propoſée ſont imaginaires. Suppoſons en effet que $z^2 - 4a^2$ ſoit la ſeule racine poſitive de la Réduite, nous aurons $2a = M$ quantité poſitive, $b + c = N\sqrt{-1}$, & $b - c = P\sqrt{-1}$: d'où $b = \frac{1}{2}P\sqrt{-1} + \frac{1}{2}N\sqrt{-1}$, & $c = \frac{1}{2}N\sqrt{-1} - \frac{1}{2}P\sqrt{-1}$. Donc puiſque b & c entrent dans les quatre valeurs de x, ces quatre valeurs doivent être imaginaires.

Si l'une des deux autres racines de la Réduite eût été ſuppoſée poſitive, $2a$ eût été imaginaire, & par conſéquent les quatre valeurs de x qui renferment toutes la quantité a euſſent encore été imaginaires. La réſolution des équations du quatrieme degré a donc alors le même inconvénient que la réſolution des équations du troiſieme degré dans le cas irréductible.

Pour faire quelque application de ces principes, cherchons les racines de l'équation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$. On a $p = -3$, $q = -42$, $r = -40$, ce qui change la Réduite en $z^6 - 6z^4 + 169z^2 - 1764 = 0$. Or cette équation traitée à la maniere de celles du troiſieme degré, en faiſant $z^2 = u + 2$ devient $u^3 + 157u - 1442 = 0$, & comme celle-ci n'a qu'une racine réelle, j'en conclus que la propoſée en a deux, & que les deux autres ſont imaginaires. Pour les trouver, je réſous d'abord l'équation $u^3 + 157u - 1442 = 0$, & j'ai $u = 7$. Donc $\pm\sqrt{(u+2)}$, ou $z = \pm 3$.

En ſubſtituant l'une de ces deux valeurs dans la formule générale $x = \pm\frac{1}{2}z \pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}\right)}$, je trouve les quatre valeurs ſuivantes, $x = 4$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-31}$. Ce ſont les quatre racines cherchées. La méthode des diviſeurs auroit donné le même réſultat.

S'il falloit trouver les racines de $x^4 + 3x^3 + 2x - 5 = 0$, je ferois d'abord $p = 3$, $q = 2$, $r = -5$, & la Réduite $z^6 + 2pz^4 +$ &c ſe changeroit en $z^6 + 6z^4 + 29z^2 - 4 = 0$. Je ferois enſuite $z^2 = u - 2$, ce qui transformeroit la Réduite en $u^3 + 17u - 46 = 0$, équation qui n'ayant qu'une racine réelle, m'apprendroit que la propoſée en a deux, & que les deux autres ſont imaginaires. Je les chercherois donc en réſolvant cette équation $u^3 + 17u - 46 = 0$, par la formule générale du troiſieme degré. Cette formule donne $u = \sqrt[3]{(23 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})} + \sqrt[3]{(23 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}.4799})}$. Donc $\pm\sqrt{(u-2)}$, ou $z = \pm \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(23 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}.4799})} + \sqrt[3]{(23 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}.4799})}]}$. Et ſubſtituant cette valeur de z dans la formule générale $x = \pm\frac{1}{2}z \pm$

$\sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p\pm\frac{q}{2z}\right)}$ je trouve pour les quatre racines de la propo-

$$x\ldots x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{-2+\sqrt[3]{(23+\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799})}+\sqrt[3]{(23-\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799})}\right\}}$$

$$\pm\sqrt{\left\{-1-\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(23+\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799}\right)}-\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(23-\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799}\right)}\right.}$$

$$\left.\mp\frac{I}{\sqrt{\left[-2+\sqrt[3]{(23+\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799})}+\sqrt[3]{(23-\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 4799})}.\right]}}\right\}$$

expreſſion fort compliquée, dans laquelle pourtant les deux racines imaginaires ſe connoiſſent facilement. Il ne faut, pour les avoir, que prendre le ſigne — dans la quantité $\mp\frac{1}{\sqrt{[-2+\sqrt[3]{(23+\&c.)}}}$

345. Remarquez que ſi les quatre racines d'une équation du quatrieme degré étoient réelles, on les trouveroit ſans peine toutes les fois que la Réduite auroit un nombre entier pour l'une de ſes racines. Il n'y auroit alors qu'à ſe ſervir de la méthode qui nous a fait trouver les trois racines réelles d'une équation du troiſieme degré dans le cas irréductible, lorſque l'une de ces racines étoit un nombre entier.

Exemple. On demande les quatre racines réelles de l'équation $x^4-25x^2+60x-36=0$. En comparant terme à terme les coefficients de cette équation à ceux de l'équation générale x^4+px^2 &c, on a $p=-25$, $q=60$, $r=-36$, ce qui change la Réduite en $z^6-50z^4+769z^2-3600=0$. Je fais $z^2=\frac{u+50}{3}$, & non $z^2=u+\frac{50}{3}$ afin d'éviter les fractions. J'ai $u^3-579u-1150=0$. Je réſous cette transformée (338). Ses racines ſont $u=25$, $u=-2$, $u=-23$. Donc $\pm\sqrt{(\frac{u+50}{3})}$ ou $z=\pm 5$, ou bien ± 4, ou encore ± 3. Et ſi je ſubſtitue l'une quelconque de ces valeurs de z dans la formule $x=\pm\frac{1}{2}z\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2z})}$, je trouverai également les quatre valeurs ſuivantes, $x=3$, $x=2$, $x=1$, $x=-6$.

On a ſix différentes valeurs de z, & la raiſon en eſt bien ſimple. C'eſt qu'une équation du quatrieme degré pouvant être regardée comme le produit des quatre facteurs, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, elle eſt diviſible par ſix facteurs du ſecond degré. Voici ces facteurs, $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+c)$, $(x+a)(x+d)$, $(x+b)(x+c)$, $(x+b)(x+d)$, $(x+c)(x+d)$. Et comme ils ont chacun un ſecond terme dont le coefficient eſt généralement repréſenté par z, il eſt clair que z doit avoir ſix différentes valeurs. Voilà pourquoi l'équation en z eſt du ſixieme degré.

Mais parce que la proposée manque de second terme; il faut bien que si une des valeurs de ζ est exprimée par g, une autre le sera par $-g$. Donc $\zeta^2 - g^2$ doit être un des facteurs de la Réduite. Donc si les quatre autres valeurs de ζ sont exprimées par h, $-h$, i, $-i$, la Réduite doit avoir, $\zeta^2 - h^2$, & $\zeta^2 - i^2$ au nombre de ses facteurs. Non-seulement donc elle doit être du sixieme degré; mais encore elle doit avoir toutes ses puissances paires, comme elle les a en effet.

Autre Ex. On voudroit avoir les quatre racines de l'équation $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$ qui donne $p = -20$, $q = -12$, $r = 13$, & pour Réduite, $\zeta^6 - 40\zeta^4 + 348\zeta^2 - 144 = 0$. Soit donc $\zeta^2 = \frac{u + 40}{3}$, la transformée sera $u^3 - 1668u - 6608 = 0$, dont les racines sont $u = -4$, $u = 2 \pm 6\sqrt{46}$. Substituant ces valeurs de u dans l'équation $\zeta = \pm\sqrt{(\frac{u+40}{3})}$, on aura $\zeta = \pm 2\sqrt{3}$, $\zeta = (14 \pm 2\sqrt{46})$ & substituant celle des valeurs de ζ que l'on voudra, la premiere par exemple, dans la formule $x = \pm\frac{1}{2}\zeta \pm$ &c, on trouvera $x = \sqrt{3} + \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, $x = \sqrt{3} - \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} + \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} - \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$.

Des Equations plus élevées que celles du quatrieme degré.

346. APRÈS avoir résolu les équations du troisieme & du quatrieme degré, il nous resteroit à indiquer les moyens de résoudre celles des degrés plus élevés. Mais les méthodes générales ne s'étendent pas si loin; ce qui joint aux exceptions nombreuses du cas irréductible fait presque désespérer de la perfection de cette théorie. Voici cependant deux méthodes qui peuvent être de quelque utilité.

La premiere sert à trouver les équations plus simples dont une équation composée est le produit. Si une équation du sixieme degré, par exemple, est le produit de deux équations du troisieme, cette méthode apprendra à trouver ces deux équations. On appelle *Réductibles* toutes les équations qui peuvent être ainsi décomposées en d'autres équations plus simples. Celles qui échappent à cette décomposition, s'appellent *Irréductibles*. Quand on en trouve, il faut avoir recours à la seconde méthode qui apprend à trouver des racines approchées. Les Analystes l'ont retournée de bien des façons, & il faut avouer que leurs travaux sur les approximations ont eu beaucoup de succès.

347. PREMIERE METHODE. Pour savoir si une équation proposée $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} +$ &c. $\ldots + \omega = 0$ peut être divisée sans reste par une équation du degré n, on supposera que la proposée est le produit de ces deux équations, $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} +$ &c. $\ldots + T = 0$, & $x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} +$ &c. $\ldots + t = 0$ dont tous les coefficients sont indéterminés. On prendra ensuite le produit de ces deux équations qui en donneront une du degré m dont on com-

rera les termes avec ceux de la propoſée, afin d'avoir les équations néceſſaires pour déterminer les coefficients A, B, C &c, p, q, r, &c. Enfin on réduira toutes ces équations à une ſeule qui ne renferme plus que l'une quelconque des indéterminées A, B, C &c, p, q, r, &c. Il ne s'agira plus alors que de chercher les diviſeurs commenſurables de cette équation, (elle doit en avoir puiſque tous ſes coefficients ſont des nombres entiers); & on aura la valeur de ſes coefficients; ce qui rendra déterminées les équations qui les renferment.

APPLICATIONS. On demande ſi l'équation $x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 15 = 0$ ne pourroit pas ſe décompoſer en deux autres, chacune du ſecond degré?

Je ſuppoſe que cette équation eſt le produit des deux équations indéterminées $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + mx + n = 0$, que je multiplie l'une par l'autre. Le produit eſt ....

$$\begin{array}{llll} x^4 + px^3 & + qx^2 & + mqx & + nq = 0. \\ + m & + mp & + np & \\ & + n & & \end{array}$$

Je le compare à la propoſée, & j'ai $p + m = 1$, $q + mp + n = 2$, $mq + np = -1$, $nq = 15$. Or ces quatre équations réduites à une ſeule dont q ſoit l'inconnue, donnent $q^6 - 2q^5 - 16q^4 + 44q^3 - 240q^2 - 450q + 3375 = 0$. Les diviſeurs commenſurables de cette équation ſont $q - 3$ & $q - 5$. Donc q peut être ſuppoſé égal à 3 ou à 5, & par conſéquent $n = 5$ ou 3 .... $p = -2$ ou $+3$ ... $m = 3$ ou -2. Les deux facteurs cherchés ſont donc $x^2 - 2x + 3 = 0$, & $x^2 + 3x + 5 = 0$.

On demande auſſi ſi l'équation $x^6 - 7x^4 + 8x^3 + 2x + 1 = 0$ peut ſe décompoſer en deux facteurs du troiſieme degré?

Suppoſons, pour le ſavoir, que cette équation eſt le produit de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ par $x^3 + fx^2 + mx + n = 0$. Il eſt clair que le ſecond terme devant manquer dans ce produit, f doit être $= -p$. Il eſt clair auſſi que le produit de n par r devant être $= 1$, on a $n = \pm 1$ & $r = \pm 1$. Servons-nous d'abord de leur valeur poſitive, & ſubſtituons-la dans les facteurs indéterminés $x^3 + px^2$ &c. Ils deviendront $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$, & $x^3 - px^2 + mx + 1 = 0$. Leur produit ſera

$$\begin{array}{llll} x^6 + qx^4 & + 2x^3 & + mqx^2 & + mx + 1 = 0; \\ - pp & - pq & + q & \\ + m & + mp & & \end{array}$$

lequel étant comparé à la propoſée, donne $q + m = pp - 7 \ldots 2 - pq + mp = 8 \ldots mq = 0 \ldots m + q = 2$. Egalant les deux valeurs de $q + m$ tirées de la premiere & de la derniere équation, nous aurons $pp = 9$, d'où $p = \pm 3$; & par conſéquent $m = 1 \pm 1 \ldots q = 1 \mp 1$. C'eſt-à-dire, que ſi $p = +3$, on a $m = 2$ & $q = 0$: ſi $p = -3$, on aura $m = 0$ & $q = 2$. Les deux facteurs cherchés ſont donc $x^3 + 3x^2 + x$

$= 0$, & $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ dans les deux cas.

Prenons maintenant la valeur -1 de n & de r, & substituons-la dans les facteurs indéterminés $x^3 + px^2 +$ &c. Leur produit alors sera . . . $x^6 + (q - pp + m)x^4 + (pm - pq - 2)x^3 + mqx^2 - x(m+q) + 1 = 0$. D'où $q + m = pp - 7$; $p(m-q) = 10$, $mq = 0$, $m + q = -2$; & par conséquent $pp - 7 = -2$, ou $p = \pm\sqrt{5}$. D'ailleurs $mq = 0$ & $m + q = -2$; donc $q = 0$, ou $q = -2$ & $m = -2$ ou 0. Mais comme ces valeurs substituées dans la seconde équation $p(m-q) = 10$ donnent $2\sqrt{5} = 10$, ce qui est absurde, il faut en conclure que l'équation proposée n'est divisible par aucune équation du troisieme degré dont le dernier terme soit -1.

348. SECONDE MÉTHODE. Quand on a épuisé les moyens qui tendent directement à trouver les racines exactes, on a recours à ceux qui en donnent d'approchées. Celui qui suit nous a paru un des meilleurs. Pour le faire mieux comprendre, nous l'appliquerons à un exemple.

Soit $x^3 - 4x - 2 = 0$, équation qui est dans le cas irréductible, (339) & dont on demande les racines approchées.

Je commence par supposer successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, &c. La premiere de ces suppositions réduit la proposée au dernier terme -2 qui ne peut être égal à zero. x doit donc être une quantité réelle. La seconde supposition donne pour résultat -5; celui de la troisieme est encore -2 : ces valeurs de x ne sont donc pas assez grandes. Je suppose $x = 3$; l'équation devient $+13 = 0$; d'où je conclus que la valeur de x est entre 2 & 3. Cela posé,

J'appelle d la fraction qu'il faut ajouter à 2 pour avoir une valeur approchée de x, j'ai donc $x = 2 + d$, & faisant $a = 2$ . . . $x = a + d$. Je substitue cette derniere valeur dans l'équation $x^3 - 4x - 2 = 0$. Elle devient en transposant $d^3 + 3ad^2 + (3a^2 - 4)d = 4a + 2 - a^3$, & en négligeant d^3 qui est une fort petite quantité, il reste $3ad^2 + (3a^2 - 4)d = 4a + 2 - a^3$. Cette équation résolue donne $d = \ldots$ $\frac{4 - 3a^2 + \sqrt{(16 + 24a + 24a^2 - 3a^4)}}{6a}$. Donc $a + d$ ou $x = \ldots$ $\frac{3a^2 + 4 + \sqrt{(16 + 24a + 24a^2 - 3a^4)}}{6a}$, & puisqu'ici $a = 2$, j'ai $x = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = 2,21$.

S'il falloit une valeur plus approchée, je prendrois 2,21 pour a, & pour les nouvelles décimales la quantité d, enforte que $x = a + d$ seroit l'expression algébrique de $x = 2,21 +$ les décimales que je cherche. Cette expression, je la substituerois dans la proposée, & je retrouverois la même équation que ci-dessus, en négligeant d^3 que l'on peut négliger avec moins d'inconvénient qu'auparavant. J'aurois donc la même formule pour la valeur de x, dans laquelle substituant 2,21 au lieu de a, le résultat seroit $x = 2,21432$, valeur plus exacte que la premiere.

S'il falloit encore une plus grande exactitude, on se la procureroit en prenant pour a la valeur 2, 21432, & pour d les nouvelles décimales cherchées; après quoi on détermineroit d par la formule, ce qui donneroit pour x une valeur beaucoup plus approchée que les deux autres.

349. Quand on a une des racines de l'équation proposée, il faut diviser l'équation par la racine déja trouvée. Cette division faite avec d'autant plus d'exactitude que la valeur de x sera plus approchée, abaissera l'équation d'un degré; & si on a le temps & la patience de traiter l'équation abaissée comme la proposée, & ainsi de suite, on parviendra enfin à connoître par approximation toutes les valeurs de x.

Prenons pour second exemple l'équation $x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0$, qui échappe à la résolution de celles du quatrieme degré, & cherchons-en une racine approchée.

En donnant successivement à x les valeurs que l'on voit ici, l'équation se réduit aux quantités qui sont vis-à-vis. Les six premieres font voir clairement que x doit être au-dessus de 5. La derniere indique que x est moins que 6. Sa vraie valeur est donc entre 5 & 6. Pour la trouver, je suppose $x = 5 + d = a + d$ & je substitue cette valeur dans la proposée. Cette substitution donne, en rejettant les termes affectés de d^3 & de d^4, $(6a^2 + 6a - 36)\,d^2 + (4a^3 + 6a^2 - 72a + 5)\,d = 36a^2 - 5a - 2a^3 - a^4 + 116$. Je résous cette équation, & j'ai $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$

x	*Suppos.*	*Résult.*	
	$= 0$	$- 116$	
	$= 1$	$- 144$	
	$= 2$	$- 218$	
	$= 3$	$- 290$	$= x^4 + \&c$
	$= 4$	$- 288$	
	$= 5$	$- 116$	
	$= 6$	$+ 346$	

$$36a - 3a^2 - 2a^3 - \tfrac{1}{2} + \sqrt{(-2a^6 - 6a^5 + 105a^4 + 52a^3 + 681a^2 + 696a - \tfrac{19679}{4})}$$

$$6a^2 + 6a - 36$$

Il ne reste plus qu'à mettre 5 au lieu de a dans cette valeur de d, pour avoir $x = 5{,}337$. Si l'on veut une racine plus approchée, il n'y a qu'à substituer 5,337 à la place de a dans la même formule de d. Le résultat du calcul sera $x = 5{,}335438$, valeur beaucoup plus exacte que la premiere. Elle le deviendroit encore davantage en répétant le même procédé.

On trouveroit les racines négatives en substituant 0, -1, -2, &c au lieu de x. Les résultats feroient connoître par le changement de signe entre quels nombres négatifs est la valeur cherchée, & on en approcheroit ensuite, autant qu'on le jugeroit à propos.

Mais lorsqu'après les substitutions des nombres positifs & négatifs compris entre zéro & le dernier terme de l'équation, on ne trouve aucun changement de signe, il faut en conclure que les racines sont égales deux à deux, ou quatre à quatre, &c, ou bien qu'elles sont

toutes imaginaires, ou enfin qu'elles ſont en partie égales deux à deux & en partie imaginaires.

On voit bien en effet que ſi les racines ſont égales deux à deux, quatre à quatre, &c, comme dans ces équations, $(x-a)^2(x-b)^2=0$, $(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^4=0$, &c, les réſultats doivent toujours être poſitifs, quelque valeur que l'on prenne pour x. On voit bien auſſi que, ſi toutes les racines ſont imaginaires, les ſignes ne doivent jamais changer; puiſque s'ils changeoient, la valeur de x ſe trouvant alors entre deux nombres réels, ne ſeroit plus imaginaire. On voit enfin que ſi les racines ſont en partie égales & en partie imaginaires, on ne peut s'attendre à aucun changement de ſigne. Reſte donc à faire voir comment on trouve les racines égales.

Pour avoir les racines égales d'une équation, on multipliera chacun de ſes termes par l'expoſant qu'a l'inconnue dans ce terme, & on diminuera cet expoſant d'une unité. Cela donnera une autre équation dont le plus grand commun diviſeur avec la propoſée, contiendra les racines égales que l'on cherche, élevées ſeulement à une puiſſance moindre d'une unité. En voici la démonſtration dans un cas.

Lorſque toutes les racines d'une équation ſont égales, on peut repréſenter cette équation par $x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} \ldots + a^m = 0$; & ſi on multiplie chaque terme de la formule par l'expoſant de x dans ce terme, on a (en remarquant que dans le dernier l'expoſant de x eſt 0) cette nouvelle équation, $mx^m + (m.m-1)ax^{m-1} + \left(\frac{m.m-1.m-2}{2}\right)a^2x^{m-2} + \&c \ldots = 0$: laquelle étant diviſée par mx, donne $x^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \left(\frac{m-1.m-2}{2}\right)a^2x^{m-3} + \&c = 0$. Or cette expreſſion eſt le développement du binome $(x+a)^{m-1}=0$, & le plus grand diviſeur commun de ce binome & de l'équation propoſée, $(x+a)^m=0$ eſt évidemment $(x+a)^{m-1}$. La méthode eſt donc démontrée pour le cas où toutes les racines ſont égales entr'elles.

Si elles ne l'étoient que deux à deux, comme dans l'équation $(x+a)^m(x+b)^n=0$, on multiplieroit l'un par l'autre les deux binomes développés; ce qui donneroit une nouvelle équation dont les termes étant multipliés chacun par l'expoſant reſpectif de x produiroient $m(x+a)^{m-1}(x+b)^n + n(x+b)^{n-1}(x+a)^m = 0$. Or le plus grand commun diviſeur de cette derniere équation & de la propoſée eſt $(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}$.

APPLICATIONS. I°. Trouver les racines égales de l'équation $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$.

Je multiplie chaque terme par l'expoſant de x, j'ai $4x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 12x = 0$. Diviſant par $4x$, il vient $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Je cherche (134) le plus grand commun diviſeur de cette der-

niere

niere équation & de la propoſée. Je trouve que c'eſt $x^3 - 2x - 3$, produit de $x - 3$ par $x + 1$. Les racines égales de la propoſée ſont donc $(x-3)^2$ & $(x+1)^2$.

II°. Trouver les racines égales de $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$. Multipliez par les expoſants reſpectifs & diviſez enſuite par $6x$, vous aurez $x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = 0$, dont le plus grand commun diviſeur avec la propoſée ſera $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, ou $(x+1)^3(x-2)$. Vous conclurez de-là que $(x+1)^4$ & $(x-2)^2$ ſont les racines cherchées.

Des Problêmes indéterminés du premier degré.

350. LORSQUE dans un Problême, le nombre des inconnues ſurpaſſe d'une unité celui des conditions, on l'appelle *indéterminé*. Si le nombre des inconnues ſurpaſſe de pluſieurs unités celui des conditions, le Problême eſt *plus qu'indéterminé*.

Or dans les Problêmes indéterminés, on ne peut jamais avoir pour réſultat qu'une équation à deux inconnues : enſorte que pour fixer la valeur d'une de ces inconnues, il faut ſuppoſer une valeur arbitraire pour l'autre inconnue, & voir enſuite ſi ces deux valeurs ſatisfont au problême.

Soit propoſé, par exemple, de trouver trois nombres x, y, z, dont la ſomme ſoit 105, & qui ayent entre eux une même différence.

Les conditions de ce problême s'expriment par ces deux équations... $x + y + z = 105$.... & $x - y = y - z$. Prenant dans la ſeconde, la valeur de x qui eſt $2y - z$, & ſubſtituant dans la premiere équation, on trouvera $y = 35$, & par conſéquent $x + 35 + z = 105$, ce qui donne $x + z = 70$, équation d'où on ne peut faire évanouir ni x ni z.

Il faut donc ſuppoſer une valeur à l'une de ces deux inconnues, à x par exemple, pour avoir la valeur de l'autre. Soit $x = 10$, on aura $z = 60$, & les trois nombres 10, 35, 60 pourront ſatisfaire à la queſtion. Et ſi on fait $x = 12$, on aura $z = 58$, & les trois nombres, 12, 35, & 58 y ſatisferont auſſi.

On voit même que ce problême peut avoir 69 ſolutions en nombres entiers & poſitifs, parce qu'on peut ſuppoſer x égal ſucceſſivement à tous les nombres depuis 1 juſqu'à 69, mais non au-delà, parce que la ſomme des deux inconnues $x + z$ eſt 70. Il peut cependant avoir une infinité d'autres ſolutions, en prenant pour x des valeurs fractionaires.

351. Quoique la ſolution de ces ſortes de problêmes ſoit plus curieuſe qu'utile, il eſt bon cependant de connoître un peu plus en détail la maniere de les réſoudre en nombres entiers & poſitifs.

Soit l'équation $ax = by + c$, à laquelle tout problême indéterminé du premier degré peut être réduit, & dans laquelle a, b, c exprimens

des nombres entiers & connus. On mettra d'abord cette équation sous cette forme. . . . $x = \frac{by+c}{a}$; & puisque x doit être un nombre entier, $\frac{by+c}{a}$ doit l'être aussi. Mais au lieu d'écrire tout au long ces mots, *nombre entier*, nous les désignerons par la lettre E. On aura donc $\frac{by+c}{a} = E$.

Si l'on pouvoit maintenant transformer cette expression en une autre où y n'eut que l'unité pour coefficient, & qui étant, par exemple, de cette forme, $\frac{y+d}{a}$, fût encore un nombre entier, différent à la vérité de celui que l'on avoit d'abord, mais également désigné par E, on auroit $\frac{y+d}{a} = E$, d'où on tireroit $y = aE - d$.

Prenant alors pour E telle quantité numérique que l'on voudroit, pourvu qu'elle fût entiere & positive, à commencer même par zéro lorsque $-d$ est un nombre positif, on auroit différentes valeurs de y, que l'on substitueroit dans l'équation du problême, & chaque substitution donneroit une valeur correspondante pour x. Quelques exemples vont rendre cette méthode fort intelligible.

Je suppose donc que l'on cherche toutes les valeurs entieres & positives de x & de y dans l'équation $3x = 4y + 5$. Je fais d'abord $x = \frac{4y+5}{3} = y + 1 + \frac{y+2}{3}$ (en divisant par 3). Mais cette valeur de x doit être un nombre entier. Donc $y + 1 + \frac{y+2}{3} = E$; & puisque y doit être aussi un nombre entier, il faut bien que $\frac{y+2}{3}$ le soit de même. J'aurai donc $\frac{y+2}{3} = E$; d'où $y = 3E - 2$.

Cela posé, je fais $E = 1$ (& non pas 0, afin d'éviter la valeur négative -2 pour y). J'ai donc $y = 1$. Donc $x = 3$. Je fais ensuite $E = 2$, donc $y = 4$, ce qui donne $x = 7$. Faisant $E = 3$, je trouve $y = 7$, d'où la valeur correspondante de x est 11.

Je dispose ainsi ces valeurs . . . $\begin{cases} y = 1. \ . \ . \ 4. \ . \ . \ 7. \ . \ . \ \&c \\ x = 3. \ . \ . \ 7. \ . \ . \ 11. \ . \ . \ \&c \end{cases}$ & je remarque qu'elles sont en progression arithmétique.

La différence de la premiere progression est 3, coefficient de x. Celle de la seconde est 4, coefficient de y. Rien donc n'est plus aisé que de trouver la suite de ces valeurs, & de voir que ce problême a une infinité de solutions.

352. Au reste, ce n'est point par hazard que l'on trouve ces pro-

greſſions arithmétiques. En y réfléchiſſant un peu, on verra bien que c'eſt une ſuite néceſſaire de la méthode. Mais ces progreſſions ne ſont pas toujours infinies, au contraire elles ſont limitées toutes les fois que chaque membre de l'équation ayant une inconnue, ces inconnues ſont affectées d'un ſigne contraire.

EXEMPLE. On demande, en nombres entiers, toutes les valeurs poſitives de x & de y dans l'équation $9x = 2000 - 13y$.

On a d'abord $x = \frac{2000-13y}{9} = E$, enſuite, $\frac{2-4y}{9} = E$, en diviſant par 9, ou ce qui eſt plus ſimple, en ſupprimant tous les 9 (30). Mais ſi $\frac{2-4y}{9}$ eſt un nombre entier, le double de cette quantité doit être auſſi un nombre entier. Ce double eſt $\frac{4-8y}{9}$; donc en ajoutant un autre nombre entier, tel que $\frac{9y}{9}$, & en réduiſant, on aura $\frac{y+4}{9} = E$; d'où l'on tire $y = 9E - 4$. Pour avoir maintenant toutes les valeurs de y, à commencer par la plus petite, je ſuppoſe $E = 1$; donc $y = 5$: ſi $E = 2$, $y = 14$; ſi $E = 3$, $y = 23$ &c, &c.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation $x = \frac{2000-13y}{9}$, je trouve 1°, $x = 215$; 2°, $x = 202$; 3°, $x = 189$. &c. &c.: & diſpoſant ainſi toutes ces quantités,

$y = 5 \ldots 14 \ldots 23 \ldots 32 \ldots$ &c. 149
$x = 215 \ldots 202 \ldots 189 \ldots 176 \ldots$ &c. 7

Je ne tarde pas à reconnoître que les différences de ces deux progreſſions ſont les coefficients réciproques des deux inconnues, & que par conſéquent celui de y étant négatif, toutes les valeurs de x ſe trouveront en ſouſtrayant 13 de la valeur précédente. Or ces ſouſtractions réitérées doivent enfin épuiſer le nombre des valeurs poſitives, & on voit bien dans cet exemple, qu'il n'eſt pas poſſible d'en trouver au-deſſous de 7.

Bien loin donc que les deux progreſſions ſoient infinies, on trouvera tout de ſuite le nombre de leurs termes, en diviſant la plus grande valeur de x par le coefficient de y, & en ajoutant une unité au quotient. Ainſi $\frac{215}{13} = 16$ (avec un reſte 7 qui eſt la plus petite valeur de x). Il y a donc 17 valeurs de ces inconnues qui ſatisfont au problême.

Cela eſt général pour toutes les équations ſemblables, dont les coefficiens ſont des nombres *premiers entre eux*.

(On appelle ainſi les nombres qui n'ont d'autre diviſeur commun que l'unité). Et comme toutes les autres équations peuvent être ramenées à cette forme, en les diviſant par le plus grand commun diviſeur de ces coefficients, il eſt clair que la méthode eſt générale.

Ces détails suffisent pour l'intelligence des deux exemples suivants.

I. Un marchand doit 1200^{tt}, & au défaut d'argent, il offre deux sortes de marchandises en payement. La premiere vaut 7^{tt} l'aune, la seconde 5^{tt}. Trouver de combien de manieres il peut acquitter sa dette.

Soit x le nombre d'aunes de la premiere marchandise, & y celui des aunes de la seconde. On aura $7x + 5y = 1200^{tt}$; d'où $x = \frac{1200 - 5y}{7}$; d'où encore, $\frac{3 - 5y}{7} = E$; & par conséquent $\frac{12 - 20y}{7} = E$; donc $\frac{5 - 6y}{7} = E$; donc $\frac{7y}{7} + \frac{5 - 6y}{7}$, ou $\frac{y + 5}{7} = E$; donc enfin $y = 7E - 5$. Soit $E = 1$, on aura $y = 2$, d'où l'on tirera $x = 170$. Soit $E = 2$ on aura $y = 9$, & $x = 165$. Le reste va de suite. Les deux progressions ont 35 termes chacune; il y a donc 35 manieres différentes de faire la somme de 1200^{tt} avec des effets dont les uns valent 7^{tt} & les autres 5.

II. Un Laboureur a donné des agneaux en échange pour des brebis. Il estimoit 4^{tt} chaque agneau, 9^{tt}, chaque brebis, & il a donné 15^{tt} en sus. Trouver de combien de façons il a pu varier son marché.

x, nombre des agneaux; y, celui des brebis. Donc $4x + 15^{tt} = 9y$. Donc $x = \frac{9y - 15}{4}$; donc $\frac{y - 3}{4} = E$; donc $y = 4E + 3$; & si $E = 0$, $y = 3$. C'est le moins qu'il ait pu prendre de brebis, auquel cas il a dû livrer trois agneaux. Si $E = 1$, $y = 7$, & $x = 12$. La marche des deux progressions est manifeste, & puisqu'elles vont toutes deux en croissant, on peut varier à l'infini les solutions de ce petit problême.

353. Quand ces sortes de questions renferment quelque absurdité, on la découvre bientôt par le résultat du calcul. L'équation $6x = 6y + 7$ peut servir d'exemple.

354. La méthode prescrite pour la solution des problêmes indéterminés du premier degré, est fondée sur cet unique principe, que des nombres entiers, ajoutés ou soustraits, ou multipliés par d'autres nombres entiers, doivent toujours donner des entiers pour résultat. Or ce principe est évident.

Appliquons cette méthode à la résolution de quelques autres problêmes..... Trouver un nombre x qui étant divisé par des nombres connus a, b, c, &c. donne pour restes d'autres nombres connus aussi m, n, p, &c.

Il est clair, d'après cet exposé, que $\frac{x - m}{a}$ est un entier, ainsi que $\frac{x - n}{b}$, &c. On a donc $x = aE + m$ (191), & substituant cette valeur dans la seconde quantité, on aura $\frac{aE + m - n}{b} = E'$. (On pro-

nonce E prime, & par cette lettre on entend ici un nombre entier en général, comme par la lettre E). Cherchant enſuite la valeur de E par la méthode qui a fait trouver ci-deſſus la valeur de y, on la ſubſtituera dans l'équation $x = a\,E + m$; & cette nouvelle expreſſion de la valeur de x, étant une fois miſe dans la troiſieme quantité $\frac{x-p}{c}$, on trouvera encore un nombre entier, que nous déſignerons par E'' (E ſeconde). Le premier membre de cette équation contiendra E', qu'il faudra déterminer comme ci-deſſus, & l'on aura enfin la valeur de x en nombres connus & en E'', ou en E''' (E Tierce), ou &c, ſelon le nombre des diviſeurs. On prendra alors pour le dernier E telle quantité entiere que l'on voudra, & bientôt on aura déterminé les valeurs qui peuvent ſatisfaire aux conditions du problême.

Exemples. Quels ſont les nombres qui étant diviſés par 5 & par 7 donnent 4 & 2 pour reſtes ?

On a $\frac{x-4}{5} = E$, & $\frac{x-2}{7} = E'$. Donc $x = 5\,E + 4$; donc $\frac{5E+2}{7} = E'$; donc $\frac{15E+6}{7} = E'$; & ſouſtrayant $\frac{14E}{7}$, on aura $E = 7\,E' - 6$. Si on ſuppoſe $E' = 1$, on aura auſſi $E = 1$ donc $x = 9$; & c'eſt le plus petit des nombres cherchés.

Pour avoir les autres, on ſuppoſera $E' = 2$, ce qui donnera $x = 44$. Si $E' = 3$, $x = 79$; & ainſi de ſuite, ajoutant à chaque valeur précédente le produit 35 des deux diviſeurs 5 & 7 : car puiſque 35 eſt diviſible ſans reſte par 5 & par 7, il eſt clair que $35 + 9$ ou 44, que $70 + 9$ ou 79, &c, donneront les mêmes reſtes que le plus petit nombre 9.

Un avare a dans ſon coffre-fort pluſieurs ſacs de 1200^{liv} chacun. En les comptant un jour trois à trois, il n'en trouva aucun de reſte. Il les compta un autre jour ſept à ſept, & il n'en reſta qu'un. Les comptant un autre fois dix par dix, il en trouva ſix de reſte. Ne pourroit-on pas deviner combien il en avoit, ſachant d'ailleurs qu'il en avoit plus de cent, mais moins de trois cent ?

Soit x le nombre de ces ſacs. E, E', E'' déſigneront à l'ordinaire des entiers; & l'on aura $\frac{x}{3} = E \ldots \frac{x-1}{7} = E' \ldots \frac{x-6}{10} = E''$. La premiere expreſſion donne $x = 3\,E$. La ſeconde, $\frac{3E-1}{7} = E'$: donc $\frac{15E-}{7}$ ſera un entier, & ſouſtrayant $\frac{14E}{7}$ de ce dernier nombre, le reſte en ſera un auſſi. On aura donc $E = 7\,E' + 5$. D'où $x = 21\,E' + 15$.

Subſtituant cette valeur dans la troiſieme expreſſion, il viendra $\frac{21E'+9}{10} = E''$. D'où $E' = 10\,E'' - 9$. Si on fait $E'' = 1$, on aura

$x = 36$; & ce ſera le plus petit des nombres qui diviſés par 3, par 7, & par 10, auront pour reſtes, 0, 1, & 6. Pour trouver le ſecond nombre, on ſuppoſera $E'' = 2$, d'où $x = 246$. Si $E'' = 3$, $x = 456$. Donc le nombre de ſacs eſt 246.

355. Remarquez que la ſuite des nombres 36, 246, 456, &c ſe forme en ajoutant au nombre qui précede, le produit 210 des trois diviſeurs 3, 7, 10, & cela aura lieu toutes les fois que les diviſeurs ſeront des nombres premiers entre eux. S'ils ne l'étoient pas, la progreſſion formée par l'addition de leur produit, ne contiendroit à la vérité que des nombres propres à ſatisfaire au problême; mais elle ne les contiendroit pas tous.

356. C'eſt par une application de cette méthode que l'on peut réſoudre pluſieurs problêmes relatifs au Calendrier. Soit propoſé, par exemple, de trouver dans quelle année de l'Ere Chrétienne, on a eu 27 de Cycle ſolaire, 6 de Cycle Lunaire, & 5 d'indiction.

On ſait que le Cycle ſolaire, autrement dit, le Cycle des Lettres Dominicales, eſt une révolution périodique de 28 ans; que le cycle Lunaire, plus connu ſous le nom du Nombre d'Or, eſt une révolution de 19 ans, & que l'indiction Romaine recommence tous les 15 ans.

Cela poſé, appellant x l'année que l'on demande, on aura.... 1°, $\frac{x-17}{28} = E$ .... 2°, $\frac{x-6}{19} = E'$ .... 3°, $\frac{x-5}{15} = E''$. La premiere équation donne $x = 28E + 17$, & ſubſtituant cette valeur de x dans la ſeconde équation, on a $\frac{28E+11}{19} = E'$; d'où on tire, après les opérations convenables .... $E = 19E' + 22$, & par conſéquent $x = 532E' + 633$.

Subſtituant cette nouvelle valeur de x dans la troiſieme équation, on trouve $\frac{532E'+628}{15} = E''$; ce qui donne $E' = 15E'' + 11$, & par conſéquent $x = 7980E'' + 6485$.

Soit maintenant $E' = 0$, on aura $x = 6485$. Si on ſuppoſe $E'' = 1$, on aura $x = 14465$, & ainſi de ſuite. Mais comme ces années appartiennent à la Période Julienne, dont le commencement précede de 4713 ans celui de l'Ere Chrétienne, il faut ſouſtraire 4713 de ces différentes époques, pour les réduire aux années de notre Ere qui ſatisfont aux trois conditions du problême.

Souſtraction faite ſur la premiere époque, qui eſt 6485, on trouve 1772 pour reſte. Ainſi depuis le commencement de l'Ere Chrétienne, & même depuis le commencement du monde, tel que la Chronologie ordinaire le fixe, il n'y a eu que l'année 1772 de notre Ere qui ait réuni tout à la fois, 17 de Cycle Solaire, 6 de Nombre d'Or, & 5 d'Indiction.

En ſouſtrayant pareillement 4713 de la ſeconde époque, 14465, on

trouve que l'année 9752 de notre Ere ſera la ſeule qui dans l'intervalle de 1772 à 9752, ſatisfera aux mêmes conditions. Les autres années qui y ſatisferoient de même, ne ſe ſuivroient que tous les 7980 ans, dont eſt formée la Période Julienne, ainſi appellée de Joſeph-Juſte Scaliger qui l'imagina le premier. Cette Période réſulte du produit des trois Cycles, 28, 19 & 15. Elle eſt préférable à la Période Dyoniſienne, qui n'eſt que de 532 ans, (produit de 28 par 19), en ce qu'elle embraſſe un bien plus grand nombre d'événements dans ſa durée.

357. Ceux qui déſireront connoître plus en détail la Théorie des problêmes indéterminés, trouveront dequoi ſe ſatisfaire, dans le ſecond Volume des Eléments d'Algebre de M. Euler. Nous terminerons ceux-ci par les énoncés de quelques problêmes, dont on trouvera les réſultats à la fin du Livre, ſous la lettre H^{IV}.

I. Deux Courriers ſont partis au même inſtant, l'un de Paris pour Fontainebleau, l'autre de Fontainebleau pour Paris. Leurs viteſſes ſont dans le rapport de 3 à 4; on demande où il ſe rencontreront, la diſtance des deux points de départ étant ſuppoſée de 14 lieues. Généraliſer le problême.

II. Un lièvre a déja fait un nombre n de pas, lorſqu'un Lévrier ſe met à ſa pourſuite. Les pas du Lévrier ſont plus grands que ceux du Lievre dans le rapport de $p : q$: mais auſſi le Lievre fait $m + a$ de pas, pendant que le Lévrier n'en fait qu'un nombre m. Trouver une formule qui faſſe connoître ſi le Lévrier atteindra le Lievre, & au cas qu'il l'atteigne, à quelle diſtance il l'atteindra.

III. B a dépenſé le tiers de ſon argent, & ſa dépenſe eſt telle que la cinquieme puiſſance de l'argent dépenſé eſt au cube de l'argent qui lui reſte :: 9 : 8. C au contraire a gagné une ſomme dont le cube eſt au quarré de celle qu'il avoit d'abord :: 3 : 16. Trouver ce qu'ils avoient, & ce qui leur reſte.

IV. Une perſonne à qui on avoit demandé quelle heure il étoit, répondit qu'il étoit entre 5 & 6 heures, & que l'aiguille des minutes ſe trouvoit exactement ſur celle des heures. Quelle heure étoit-il donc?

V. Trois cauſes C, C', C'' agiſſant ſéparément, ont produit les trois effets E, E', E'' dans des tems T, T', T''. Quel temps leur faudroit-il, agiſſant toutes trois enſemble, pour produire l'effet E''?

VI. Etant donnés les prix a & b de deux quantités, pour en former un mélange c dont le prix moyen ſoit m, quelles parties x & y doit-on prendre de ces quantités?

VII. Démontrer la Regle de double fauſſe poſition, autrement que dans le n° 268.

VIII. La ſomme de 6000# placée à intérêt pendant 15 ans 4 mois a produit 18000#, y compris les intérêts des intérêts. A quel denier cette ſomme a-t-elle été placée?

IX. Calculer par la méthode des coefficients indéterminés les premiers termes de la ſérie qui provient de $\frac{a^2 - x^2}{a + bx - x^2}$.

X. Trouver par la méthode inverſe des ſéries la valeur de y, en ſuppoſant que l'on a $x = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} y^2 + \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 12} y^3 +$ &c.

XI. Réſoudre généralement les problêmes ſur la population, n° 309.

XII. On a diviſé le nombre 37 en deux parties, dont la plus grande multipliée par le quarré de la plus petite, donne 800. Quelles ſont ces parties?

XIII. Connoiſſant la ſomme a de deux nombres, & le quotient q du moindre de ces nombres diviſé par la racine cube du plus grand, déterminer ces nombres.

XIV. Soit un nombre compoſé de trois chiffres, tels 1°, qu'en les multipliant les uns par les autres, leur produit ſoit 54; 2°, que le chiffre du milieu ne ſoit que la ſixieme partie de la ſomme des deux autres; 3° qu'en ſouſtrayant 594 de ce nombre, le reſte ſoit compoſé des mêmes chiffres que ce nombre, mais dans un ordre inverſe. On demande quels ſont ces trois chiffres.

XV. Etant donnée l'équation $x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$, déterminer ſes racines par la méthode des diviſeurs.

XVI. Le Gouverneur d'une Place aſſiégée voulant obtenir au plutôt du ſecours de ſon Général, lui écrit que la Garniſon eſt réduite à autant de centaines d'hommes qu'il y a d'unités dans la racine poſitive de l'équation $x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x = 245$. L'homme chargé de ce billet eſt arrêté par les ennemis: on le fouille, on voit l'avis donné au Général, & on n'y comprend rien. Si vous euſſiez été dans le camp des aſſiégeants, quel parti auriez-vous tiré de ce billet?

XVII. Un Voiturier, chargé du tranſport d'un barril plein de vin, en a d'abord tiré 12 bouteilles, qu'il a remplacées par 12 bouteilles d'eau. Puis il a tiré 12 autres bouteilles de ce barril, qu'il a remplacées par 12 bouteilles d'eau; & il a fait deux autres fois la même manœuvre. Arrivé à ſa deſtination, il eſt ſoupçonné d'avoir mis de l'eau dans le barril: on décompoſe ce mélange, & il n'en réſulte que 54 bouteilles de vin pur. Le Voiturier offre de payer ce qu'il a ſouſtrait: mais on ne ſait comment l'évaluer, le barril n'exiſtant plus. Si on s'étoit adreſſé à vous pour cette évaluation, comment en feriez-vous venu à bout?

XVIII. Extraire la racine quarrée des quantités ſuivantes . . . . 3°, 14 + 6√5 . . . , 2°, 28 + √187 . . . . 3°, 39 + 2√5 . . . 4°. 10√−1.

XIX. Extraire la racine-cube de 22 + 10√7, & de −24 − 40√−2.

XX. Trouver par approximation les racines de l'équation $x^3 - 17x^2 + 54x - 350 = 0$.

XXI. Etant donnée l'équation $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 15x + \frac{1}{2} = 0$, trouver la valeur de x approchée juſqu'au cinquieme rang des décimales.

XXII. Par la Regle de double fauſſe poſition calculer la valeur de l'inconnue y dans l'équation *exponentielle*, $y^y = 2000$.

XXIII. Avec des écus de ſix francs & des écus de 3^{tt}, de combien de manieres pourroit-on faire la ſomme de 264^{tt} ?

XXIV. On déſireroit avoir un nombre qui pût être exactement diviſé par 7, & qui étant diviſé par 2, 3, 4, 5 & 6 donnât 1 pour reſte.

XXV. Réſoudre par la méthode des problêmes indéterminés, le troiſieme cas de la Regle d'Alliage (page 173).

XXVI. Un Aubergiſte a fait payer 20^{tt} pour la dépenſe de quelques Voyageurs, à raiſon de 4 francs par Maître, de 40^{f} par Domeſtique, & de 30^{f} par Cheval. Combien y avoit-il de Maîtres, de Domeſtiques & de Chevaux?

XXVII. Avec des Pieces de 24^{f}, de 12^{f}, & de 6^{f}, eſt-il poſſible de faire un paiement de 19^{tt} ? Et au cas que cela ſoit poſſible, de combien de manieres cela l'eſt-il ?

XXVIII. On a acheté une Bibliotheque compoſée de mille volumes, dont les *infolio* ont été évalués à 6^{tt} chacun; les *in-quarto* à 3^{tt}, & les *in*-12 à 30^{f}. Elle a coûté 2190^{tt}. Combien y avoit-il de volumes de chaque format ?

XXIX. En quelle année le Pape Grégoire XIII réforma-t-il le Calendrier? Pour vous aider à en rappeller la date, on vous dit ſeulement que cette année-là avoit 6 pour Nombre d'Or, & 23 pour Cycle Solaire.

XXX. Il parut une Comète ſingulierement remarquable dans une certaine année, qui avoit pour Nombre d'Or 9, pour Cycle Solaire 9, & 3 pour Indiction. Quelle étoit cette année-là ?

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

358. LA GÉOMÉTRIE tire son nom du principal usage, auquel il semble qu'elle fut employée dans l'origine. Le partage des biens exigeoit une science qui apprît à connoître avec précision leur étendue; cette science fut appellée *Géométrie*, c'est-à-dire, mesure de la terre.

Elle resta bornée à ce premier usage, jusqu'à la brillante époque, où Archimede & plusieurs autres Géomètres Grecs lui donnerent tant d'éclat. Mais elle ne mérita vraiment le nom de science, qu'après avoir été réduite en corps de doctrine, par Euclide, qui rassembla les principales découvertes géométriques faites avant lui.

Il joignit les siennes à celles des Géomètres qui l'avoient précédé, & toujours aussi rigoureux dans ses démonstrations, que méthodique dans sa marche, il vint à bout de fixer & de répandre les notions jusques-là fort vagues de la Géométrie. Son Ouvrage, consacré depuis deux mille ans, par l'estime générale des siecles éclairés, est un des plus précieux monuments échappés aux injures du temps.

Euclide y considere l'étendue dans son berceau, pour ainsi dire, & procédant toujours du plus simple au plus composé, il s'éleve par une gradation bien soutenue, depuis le Point jusqu'aux Solides. Nous suivrons à peu-près

la même gradation ; mais en nous rapprochant de la méthode que les Géomètres modernes ont adoptée. Si elle n'eſt pas auſſi rigoureuſe, elle a d'autres avantages qui nous la font préférer.

Au reſte, quoiqu'il n'y ait point d'étendue ſans longueur, largeur & profondeur, on peut cependant conſidérer ces trois dimenſions, les unes ſans les autres. C'eſt ainſi, par exemple, que l'on parle de la longueur d'une Toiſe, ſans ſonger à ſa largeur ; & que l'on parle de la grandeur d'un étang, ſans faire mention de la profondeur de ſes eaux.

Cette abſtraction ſimplifiant les recherches de la Géométrie Elémentaire, preſque tous les Auteurs qui ont écrit depuis un ſiecle ſur cette matiere, s'en ſont ſervis pour diviſer leurs Ouvrages en trois Parties. Dans la premiere, ils enſeignent ce qui a rapport à la ſeule dimenſion de longueur, ſavoir les propriétés des *Lignes*, la meſure des *Angles* qu'elles forment, & la deſcription des *Figures* qui en réſultent. Dans la ſeconde, ils conſidèrent tout-à-la fois la longueur & la largeur, & ils enſeignent à meſurer les *Surfaces*. Dans la derniere Partie ils ſuppoſent les trois dimenſions réunies, & ils cherchent à déterminer la *ſurface* & la *ſolidité* des corps. Nous ſuivrons le même plan.

PREMIERE PARTIE.

DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

FIG. 1. 359. D'UN point A quelconque on peut aller à un autre point B, par une infinité de chemins différents : mais on voit bien qu'il doit y en avoir un plus court que tous les autres ; & celui-là, quel qu'il ſoit, s'appelle la *Ligne droite.*

360. Donc 1°, *La vraie meſure de la diſtance d'un point à un autre point, eſt toujours la ligne droite qui les joint.* Telle eſt la ligne AB.

Donc 2°, on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite d'un point à un autre ; & par conſéquent *deux points ſuffiſent pour déterminer la poſition d'une ligne droite quelconque.* Toutes les autres que l'on voudroit mener par les mêmes points, ſe confondroient avec la premiere.

Donc 3°, *deux lignes droites ne peuvent ſe couper qu'en un ſeul point* : elles ne peuvent jamais avoir deux points communs.

361. Lorſqu'une ligne droite en rencontre une autre, il en réſulte une *Ligne briſée.* Telles ſont les lignes ADB & AFB, qui aboutiſſent aux mêmes points A & B, que la droite AB. Or cette droite eſt plus courte que toute autre ligne qui ſe termine aux mêmes points : Donc *une ligne droite quelconque menée entre deux points donnés, eſt plus courte que toutes les lignes briſées, menées entre les mêmes points.*

Donc auſſi celles-là ſont les plus longues parmi les lignes briſées, qui s'éloignent le plus de la ligne droite ; & on ſent bien qu'il peut y en avoir une infinité.

On peut en décrire de même une infinité d'autres qui changeant, pour ainſi dire, de direction à chaque point, comme les lignes ACB, AMB, aboutiſſent pourtant

aux mêmes points A & B. On les appelle des *Lignes courbes*, & elles ſont diverſifiées à l'infini. Mais il en eſt une plus connue & plus facile à décrire que les autres: c'eſt la *Courbe circulaire*. FIG. I.

362. Soit la droite AC mobile autour du point A. Il eſt clair que ſi elle fait une révolution entiere, ſon extrémité C décrira une courbe fermée CEBDC. L'eſpace terminé par cette courbe ſe nomme *Cercle*. La courbe qui le termine s'appelle la *Circonférence*. (Il ne faut pas confondre ces deux choſes).

Le point A eſt le *centre* du cercle. Toute ligne droite menée du centre à un des points de la circonférence, ſe nomme *Rayon*; & tout rayon prolongé en ligne droite au-delà du centre juſqu'à la circonférence, ſe nomme *Diamètre*. Ainſi AB eſt un rayon; BD eſt un diamètre.

363. Il ſuit de la deſcription du cercle, 1°, que tous ſes rayons ſont égaux; 2°, que tous ſes diamètres le ſont auſſi; 3°, que chaque diamètre diviſe le cercle & la circonférence en deux parties égales.

Une portion quelconque CEB de circonférence ſe nomme *Arc de cercle*. L'eſpace ACEBA renfermé entre l'arc CEB & les deux rayons CA, AB, ſe nomme *Secteur*. L'eſpace CEBC compris entre le même arc CEB & la droite CB ſe nomme *Segment*; enfin la droite CB ſe nomme *la Corde de l'arc* CEB.

364. Concluons, 1°, que dans un même cercle le diamètre eſt toujours plus grand qu'une corde quelconque. Car ſi on mene AC, par exemple, on aura la ligne briſée CAB plus grande que CB: or CAB = DB; donc DB > CB.

Concluons 2°, que dans un même cercle, les arcs égaux ont des cordes égales, & réciproquement.

3°, Que les plus grands arcs ſont ſoutendus par les plus grandes cordes, & que les plus petits arcs ſont ſoutendus par les plus petites cordes; ce qui eſt réciproque.

Vous obſerverez ſeulement que lorſqu'on parle de l'arc ſoutendu par une corde, on entend toujours le plus petit

FIG. 2. are qui eſt terminé par cette corde. Ainſi la corde CB ſoutend l'arc CEB & non l'arc CDB.

Si les Géomètres diviſent la circonférence du cercle en 360 parties égales qu'ils nomment degrés, & s'ils ſoudiviſent enſuite chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 ſecondes, &c, c'eſt que ces diviſions leur ont paru plus commodes à cauſe du grand nombre de diviſeurs exacts de 360 & de 60.

365. Il ſuit de-là que les degrés & les minutes d'un cercle ne ſont pas des quantités abſolues comme un pied, une toiſe, &c. Leur grandeur varie dans le même rapport que celle des circonférences auxquelles ils appartiennent, puiſqu'ils en ſont des parties ſemblables.

Des Angles.

3. 366. Si deux lignes droites AC, & CD ſe rencontrent; elles forment l'*Angle* ACD, qui a ſon *Sommet* au point de rencontre C, & dont les lignes AC, CD ſont les *Côtés*. (Quand on déſigne un angle par trois lettres, on place au ſecond rang celle qui eſt à ſon ſommet. Si on ne le déſigne que par une ſeule lettre, c'eſt toujours par celle qui eſt au ſommet).

Décrivons du centre C & d'un rayon quelconque CK l'arc KL, nous aurons une meſure bien naturelle de l'angle ACD; puiſque ſi l'on conçoit que cet angle augmente en devenant AC*d*, ou diminue en devenant ACI, l'arc KL augmentera ou diminuera dans le même rapport. On peut donc dire que *la meſure d'un angle qui a ſon ſommet au centre d'un cercle quelconque eſt l'arc compris entre ſes côtés.*

Au reſte, quoique l'on puiſſe décrire du centre C avec des rayons inégaux, une infinité d'arcs de cercle compris entre les mêmes côtés CA, DC, tous ces arcs n'en ont pas moins le même nombre de degrés, parce qu'ils ſont tous des parties ſemblables de leurs circonférences. C'eſt pourquoi, en diſant que l'angle ACD a pour meſure

l'arc KL, on entend toujours le nombre de degrés de l'arc KL, & non la longueur absolue de cet arc. FIG. 3.

367. Donc *la grandeur d'un angle est tout-à-fait indépendante de la longueur de ses côtés.*

On distingue trois sortes d'angles, l'angle *aigu*, l'angle *droit*, & l'angle *obtus*. Tout angle qui a pour mesure moins de 90°, est un angle aigu. Tel est entre autres l'angle BC*d*. Tout angle qui a pour mesure 90°, ou le quart de la circonférence, est un angle droit. Tel est l'angle ACI. Enfin tout angle qui est mesuré par un arc de plus de 90°, est un angle obtus. Ainsi l'angle ACD est un angle obtus.

368. On nomme *Complément* d'un angle ou d'un arc, ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour qu'il soit de 90°. Ainsi le complément d'un arc de 57° 31′ est de 32° 29′.

On nomme *Supplément* d'un angle ou d'un arc ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc pour avoir 180°. Un angle aigu de 35° par exemple, a pour supplément un angle obtus de 145°, & réciproquement.

369. Il suit de-là que *deux angles sont égaux, quand ils ont un même supplément.*

Donc *les angles* ACD, BCF *opposés au sommet sont égaux*: car ils ont un même supplément DCB.

370. Il suit aussi qu'une droite DC qui tombe sur une autre AB, forme avec elle deux angles ACD & DCB, dont la somme est toujours de 180°. On peut donc dire que les *deux angles formés par la rencontre de deux lignes, équivalent toujours à deux angles droits.*

Et par conséquent la somme des quatre angles ACD, DCB, BCF, & FCA équivaut à quatre angles droits; ou ce qui revient au même, les angles formés par l'intersection de deux lignes, ont pour mesure 360°.

En général, si tant de droites ACB, DCI, ECH, que l'on voudra, viennent se couper en nombre quelconque au point C, la somme des angles ACD + DCE +

FIG &c, qu'elles feront toutes enſemble d'un ſeul côté de AB, ſera de 180°, & la ſomme des angles qu'elles feront tant en deſſus qu'en deſſous de AB, ſera de 360°.

Des Lignes perpendiculaires.

371. ON appelle *Lignes perpendiculaires* celles qui par
5. leur rencontre forment des angles droits. Ainſi AB eſt perpendiculaire à DF, ſi l'angle AGD, par ex. eſt de 90°.

Si on décrit du centre C & du rayon CD la circonférence DEFGD, l'arc DE ſera de 90°, ainſi que l'arc EF. Donc leurs cordes ED, EF ſeront égales (364). Donc le point E ſera à égale diſtance de D & de F, comme le point C. Ainſi la ligne AB aura deux de ſes points également éloignés chacun de D & de F. Tous ſes autres points ſeront donc autant éloignés du point D que du point F (360).

Réciproquement, ſi les deux points A, E de la ligne droite AB ſont chacun également éloignés de D & de F, cette ligne AB ſera perpendiculaire à DF. Car deux des points de la ligne AB étant chacun à égale diſtance de D & de F, tous les autres points de AB ont cette même propriété. Donc DC = CF; par conſéquent la ligne AB diviſe en deux également la ligne DF. De plus ED = EF. Donc les arcs ED, EF ſont égaux; ils ſont donc chacun de 90°; donc AB eſt perpendiculaire à DF.

Enfin ſi AB eſt perpendiculaire à DF, & ſi d'ailleurs ſon point A eſt également éloigné des points D & F, tous les autres points de la ligne AB auront la même propriété que le point A; ſans quoi cette ligne ne ſeroit plus perpendiculaire à la ligne DF. *Un ſeul point ſuffit donc pour déterminer la poſition d'une perpendiculaire, quand on a déja la ligne ſur laquelle on veut la mener.*

372. Il eſt évident que la ligne droite DF eſt plus courte que la ligne briſée DEF, & que par conſéquent DC, moitié de DF, eſt plus courte que DE, moitié de

de DEF, & à plus forte raiſon que toute autre oblique DA. FIG.

On doit donc regarder la perpendiculaire menée d'un point donné ſur une ligne droite comme la vraie meſure de la diſtance de ce point à la ligne dont il s'agit.

373. D'après ce que nous venons de dire, il eſt facile de réſoudre les problêmes ſuivants.

I. Diviſer la ligne donnée DC en deux parties égales. 61

Je décris des points D & C pris pour centres, & du même rayon DG deux arcs de cercle qui ſe coupent aux points G & H, & par ces deux points d'interſection, je mene GFH, qui diviſera la ligne DC en deux également au point F. Ce problême eſt d'un grand uſage.

II. Mener d'un point donné G hors d'une droite AB une perpendiculaire GF ſur cette ligne.

Je décris du centre G un arc DC qui coupe la ligne AB aux points D & C. Je diviſe enſuite DC en deux parties égales DF & FC, & par les points F & G je mene FG qui ſera la perpendiculaire demandée. Car deux de ſes points, ſavoir F & G ſont chacun à égale diſtance des deux points D & C de la ligne AB. Donc (371) FG eſt perpendiculaire à AB.

374. Comme il n'y a qu'un ſeul point F qui ſoit le milieu de la ligne DC, & qu'on ne peut mener d'un point à un autre qu'une ſeule ligne droite, on en doit conclure que d'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire à cette droite.

III. Mener par un point donné F de la ligne AB une perpendiculaire à cette ligne.

Je prends d'abord DF = FC, enſuite des centres D & C, & du même intervalle DG, je décris deux arcs qui ſe coupent en G, & ayant mené FG, je dis qu'elle ſera la perpendiculaire cherchée. Car deux de ſes points ſont chacun à égale diſtance de D & de C.

Il eſt donc évident que d'un point pris ſur une ligne, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne.

Si le point donné F étoit à l'extrémité de la ligne AB,

FIG. on prolongeroit cette ligne, & on éleveroit la perpendicu-
laire, comme il vient d'être dit. Mais si on ne pouvoit pas prolonger la ligne donnée, on se serviroit d'une méthode que nous indiquerons bientôt.

Des Lignes perpendiculaires considérées dans le Cercle.

7. 375. SOIT le rayon CM perpendiculaire à la corde FG; il est clair que le point C est également éloigné de F & de G, & par conséquent que tout autre point du rayon CM est également éloigné de F & de G; on a donc FD = DG, & FM = MG. L'arc FIM est donc égal à l'arc MLG, ou l'angle FCM = l'angle MCG; c'est-à-dire que *tout rayon ou diamètre perpendiculaire à une corde, coupe en deux parties égales cette corde & l'arc qu'elle soutend.*

Réciproquement, si la corde FG est divisée en deux également par le rayon CM, ce rayon sera perpendiculaire à la corde FG, & divisera en deux également l'arc FMG ou l'angle FCG: en effet ce rayon a deux points C & D également éloignés de F & de G; donc il est perpendiculaire à FG, & par conséquent MF = MG.

Si la corde FG est divisée en deux également & perpendiculairement par la ligne DM, il n'est pas difficile de démontrer que cette ligne passe nécessairement par le centre C, puisque le point D de la perpendiculaire DM étant à égale distance de F & de G, tous ses autres points doivent avoir la même propriété. Le centre C est dans ce cas; donc la perpendiculaire DM doit passer par le centre.

376. De-là il suit que de ces trois choses, *être perpendiculaire à une corde, la diviser en deux également, passer par le centre, deux étant posées, la troisieme suit nécessairement.*

Pour faire quelque application de ces principes, propo-
6. sons-nous de diviser l'arc DMC en deux également.

On menera la corde DC, & on divisera cette corde en deux également & perpendiculairement par la ligne GM qui coupera l'arc DMC en deux parties égales au point M.

Donc s'il falloit diviſer l'angle DGC en deux parties égales, on décriroit du ſommet G comme centre, & d'un intervalle quelconque GD l'arc DMC. On diviſeroit enſuite cet arc en deux également au point M, & ayant mené MG, il eſt évident que cette ligne diviſeroit en deux également l'angle DGC. FIG. 6.

Si on diviſe de la même maniere l'angle DGM en deux parties égales, on aura le quart de l'angle DGC, enſuite le huitieme, le ſeizieme, &c. Il eſt donc facile de diviſer par la Géométrie élémentaire un angle quelconque en 2, 4, 8, 16, 32, &c, parties égales. Mais lorſqu'il s'agit de diviſer un angle en 3, 5, 7, 9, &c parties égales, c'eſt un problême dont la difficulté ne peut être appréciée que par ceux qui ſont déja avancés dans l'étude de la Géométrie.

377. Soit propoſé maintenant de faire paſſer une circonférence par trois points A, B, D qui ne ſoient pas en ligne droite. 8.

Ayant mené AB & BD, on diviſera ces deux lignes en deux également & perpendiculairement par FL & GI, dont le point de concours C ſera le centre du cercle cherché. Car on aura, *par la conſtruction*, AC = CB, & CB = CD : donc AC = CD : & par conſéquent ſi du rayon CA on décrit la circonférence ABDA, elle paſſera par les trois points A, B, D.

378. De-là il ſuit que *trois points A, B, D qui ne ſont pas en ligne droite déterminent la poſition d'un cercle.* Il eſt donc impoſſible que deux circonférences de cercle ſe coupent en plus de deux points. Car ſi elles ſe coupoient en trois, elles ne feroient plus qu'une ſeule & même circonférence.

Les trois points A, B, D ne peuvent jamais être ſuppoſés en ligne droite, parce que ſi l'on pouvoit faire paſſer une circonférence par trois points en ligne droite, il ſeroit poſſible de mener pluſieurs perpendiculaires d'un même point ſur une droite ; ce qui eſt impoſſible (374).

Si l'on vouloit trouver le centre d'une circonférence, ou d'un arc de cercle donné, on prendroit à volonté dans cette

FIG. circonférence ou dans cet arc, trois points que l'on joindroit par deux cordes ; & l'on diviſeroit ces cordes comme ci-deſſus. Le centre cherché ſe trouvera toujours au point de concours des deux lignes de diviſion.

Des Tangentes.

7. 379. UNE droite MT qui n'a qu'un ſeul point M de commun avec la circonférence FMG ſe nomme *Tangente*, & le point commun M ſe nomme *point de Contact.*

Menons du centre C au point de contact M le rayon CM ; ce rayon ſera plus court que toute autre ligne COK menée du centre C à quelque point de la ligne MT. Donc il meſurera la diſtance du centre C à la ligne MT. Donc (372) il ſera perpendiculaire à cette ligne ; donc *tout rayon ou diamètre qui aboutit au point de contact, eſt perpendiculaire à la tangente qui ſe termine au même point.*

Réciproquement, une droite quelconque MT perpendiculaire à l'extrémité M du rayon CM eſt tangente en ce point M : car MT étant perpendiculaire au rayon CM, tous les autres points de la droite MT ſont plus éloignés du centre C que le point M. Donc ils ſont tous hors du cercle, à l'exception du point M, qui ſeul eſt commun à cette ligne & à la circonférence.

380. Il eſt donc facile de mener une tangente à un point quelconque M pris ſur une circonférence donnée : car ayant mené le rayon CM, on eſt sûr que *la perpendiculaire à l'extrémité du rayon eſt tangente au cercle.*

D'ailleurs il eſt évident qu'une droite MT ne peut toucher qu'en un ſeul point M la circonférence donnée. Car ſi elle touchoit cette circonférence en pluſieurs points, on pourroit mener autant de perpendiculaires différentes du centre C ſur la ligne MT, ce qui eſt impoſſible.

9. 381. Si deux, ou un plus grand nombre de cercles ſe touchent en un point, ſoit en dehors ſoit en dedans,

la ligne qui passe par leurs centres passe aussi par leur point de contact. FIG. 9.

Car la même tangente TM est perpendiculaire aux rayons CM, AM. Donc ces rayons ne font qu'une seule ligne droite qui aboutit aux deux centres, & qui passe nécessairement par le point de contact. On a donc CA = CM ± AM.

Des Lignes parallèles.

382. Deux lignes AB, CD sont *parallèles* lorsque leur distance est par-tout la même. Par exemple, si toutes les perpendiculaires EG, FH, &c menées des points E, F &c de la ligne AB sur CD sont égales, les lignes AB, CD sont parallèles. Mais puisque deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite, il suffit que deux de ces perpendiculaires soient égales, EG par exemple & FH, pour que la droite CD qui passe par les deux points G & H soit parallèle à AB. 10.

De-là il suit que *deux lignes parallèles ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les suppose prolongées.*

383. Si une ligne quelconque NQ coupe deux parallèles AB, CD, les angles AFG, FGD formés par l'intersection de cette ligne & des parallèles, sont *alternes-internes.* (On les appelle alternes, parce qu'ils sont de différents côtés de la sécante: on les appelle internes, parce qu'ils sont en dedans des parallèles). Or prenons les deux arcs indéfinis FLM, GKI décrits des centres G & F, & du même intervalle GF; & prolongeons les perpendiculaires EG, FH jusqu'à ce qu'elles rencontrent les arcs GKI, FLM; nous aurons EG = FH; donc 2EG = 2FH, ou (376) GI = FM: mais les arcs FLM, GKI sont décrits du même rayon; donc, puisque leurs cordes sont égales, ils sont égaux, ainsi que leurs moitiés GK, FL. Donc l'angle AFG qui a pour mesure GK est égal à l'angle FGD, dont la mesure est FL; donc *toutes les fois qu'une droite quelconque coupe deux parallèles, les angles alternes-internes formés par cette intersection sont égaux.*

FIG. 10. 384. D'où on peut conclure, 1°, que *les angles correſpondants* NFB, NGD *ſont égaux*, ainſi que NFA, NGC.

2°, Que les angles *alternes-externes* CGQ, NFB *ſont égaux.*

Réciproquement, ſi les angles alternes-internes AFG, FGD ſont égaux, les lignes AB, CD ſont paralleles. On en trouvera aiſément la démonſtration.

Si les angles correſpondants, ou les angles alternes-externes étoient égaux, les angles alternes-internes le ſeroient. Donc les lignes ſeroient encore paralleles.

385. Cela poſé, il eſt facile de mener d'un point donné G la parallele GD à la ligne AB.

On décrira du centre G & d'un intervalle quelconque GF un arc indéfini FLM, enſuite du point d'interſection F pris pour centre & du même intervalle FG, on décrira l'arc GK. On prendra FL = GK, & la ligne GL menée par les points G & L ſera la parallele demandée, puiſque les angles alternes-internes AFG & FGD ſeront égaux.

11. De l'égalité des angles correſpondants, il ſuit 1°, que ſi deux angles BAC, NLM ont leurs côtés AB, LN, & AC, LM paralleles, ces deux angles ſont égaux. Car ſi l'on prolonge NL juſqu'à la rencontre D de la ligne AC, on aura NLM = NDC = BAC.

12. 2°, Que pour mener une perpendiculaire AF à l'extrémité A de la ligne AB (374), on peut mener d'abord la perpendiculaire CD ſur la ligne AB, & mener enſuite par le point A la ligne AF parallele à DC. Elle ſera la perpendiculaire demandée. Car FAB = DCB.

7. 386. 3°, Que deux paralleles FG, IL qui traverſent un cercle coupent ſur ſa circonférence deux arcs égaux FI, LG. Car ſi on mene le rayon CM perpendiculaire ſur FG, il ſera auſſi perpendiculaire ſur IL, à cauſe des angles correſpondants CDF, CHI. Or (375) FIM = MLG, & IM = ML, donc FIM − IM = MLG − ML, ou FI = GL.

Il en ſeroit de même ſi une de ces paralleles étoit tan-

gente, ou si elles l'étoient toutes deux. Jusqu'ici nous n'avons considéré que deux paralleles; s'il y en avoit un plus grand nombre, elles auroient les mêmes propriétés. FIG.

De la mesure des Angles.

387. Si tous les angles avoient leur sommet au centre d'un cercle, leur mesure seroit toujours l'arc entier compris entre leurs côtés: mais on en rencontre souvent dont le sommet est à la circonférence, & dont on a besoin de connoître la grandeur. Quelquefois aussi on en trouve qui ont leur sommet au dehors du cercle, ou au-dedans, mais non au centre; il s'agit de déterminer leur mesure dans tous les cas.

388. Proposons-nous d'abord de mesurer l'angle BAD formé par la tangente AB & par la corde AD. (On le nomme *angle du segment*). 13.

Par le centre C je mene le diamètre HCG parallele à AD, & le rayon CF perpendiculaire sur AD, enfin le rayon CA au point A de contact. Cela posé, BAC sera un angle droit ainsi que FCG. On aura donc FCG = BAC, dont la mesure est l'arc FAG: or l'angle ACG = l'angle DAC (383) dont la mesure est l'arc AG; donc BAC — DAC, ou BAD a pour mesure FAG — AG = FA = $\frac{1}{2}$AFD; donc l'*angle du segment* BAD *a pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde* AD.

389. Il suit de-là que l'*angle inscrit* DAK compris entre deux cordes DA, AK, *a pour mesure la moitié de l'arc* DK *compris entre ses côtés*. Car BAK a pour mesure $\frac{1}{2}$AK, & BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$AD. Donc BAK — BAD, ou DAK a pour mesure $\frac{1}{2}$AK — $\frac{1}{2}$AD = $\frac{1}{2}$DK.

Donc 1°, l'*angle central* DCK *est double de l'angle inscrit* DAK *appuyé sur le même arc* DK.

2°, *Tout angle inscrit appuyé sur le diamètre est un angle droit*, & tous les angles inscrits appuyés sur le même arc dans le même cercle, sont égaux. 14. &

Il est aisé, d'après cela, de mener d'un point donné A 15.

FIG. hors d'un cercle une tangente à la circonférence de ce cercle. En effet si on mene du point A au centre C la droite
16. CA, & si après avoir diviſé cette droite en deux parties égales au point B, on décrit du rayon BC & du point B comme centre une circonférence, elle coupera le cercle donné aux points M & M', de ſorte que ſi par ces points & par le point A on mene les lignes MA, AM', elles ſeront tangentes aux points M & M'.

Car ſi on mene CM, l'angle CAM ſera droit. Donc la ligne MA eſt perpendiculaire à CM & par conſéquent tangente en M (380). On voit donc que ce problême a deux ſolutions, puiſqu'il eſt toujours poſſible de mener du même point A hors d'une circonférence deux tangentes AM, AM' à cette circonférence.

17. 390. Propoſons-nous maintenant de meſurer l'angle *excentrique* BAD dont le ſommet A eſt au-dedans du cercle.

Je ſuppoſe d'abord que l'angle BAD eſt aigu, & ayant prolongé BA & AD juſqu'en G & en F, je mene GE parallele à AD. Cela poſé; on aura $BAD = BGE = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}FG$. Si l'angle excentrique eſt obtus comme BAF, on aura $BAF = 180° - BAD = \frac{1}{2}BFGDC - \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}BF + \frac{1}{2}GD$. Donc *l'angle excentrique a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, plus la*
18. *moitié de l'arc compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

391. Soit l'angle *circonſcrit* BAD dont le ſommet A eſt hors du cercle, & dont les côtés AB, AD aboutiſſent à deux points de la circonférence, on aura pour ſa meſure la moitié de la différence des arcs convexe & concave interceptés par ſes côtés; c'eſt-à-dire que l'angle BAD aura pour meſure l'arc $\frac{1}{2}(BD - GI)$.

Car ſi on mene GE parallele à AD, on aura $BAD = BGE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}GI$. Car $ED = GI$ (386).

Si la ſécante AB devient la tangente AF, on aura $FAB = \frac{1}{2}FB - \frac{1}{2}FG$; donc ſi AM eſt l'autre tangente menée du point A, on aura de même $FAM = \frac{1}{2}(FBM - FGM)$.

DES FIGURES.

392. On appelle *Figure* tout eſpace terminé de tout côté par des lignes.

18. Si ces lignes ſont droites, la figure qu'elles forment eſt *rectiligne*; ſi elles ſont courbes, la figure ſe nomme *curvi-*

ligne. Elles ſont dans les deux cas les *côtés* de la figure, & FIG.
leur ſomme en eſt *le contour* ou *le perimetre.* L'enſemble forme ce que l'on appelle un *polygone.*

Nous ne parlerons ici que des figures rectilignes. Or il eſt aiſé de voir qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un eſpace. Ainſi le premier & le plus ſimple de tous les polygones eſt *le triangle*, ou une figure de trois angles & de trois côtés.

Après le triangle vient le *quadrilatere*, ou une figure de quatre côtés; enſuite le *pentagone*, de cinq, l'*hexagone* de 6, l'*heptagone* de 7, l'*octogone* de 8... le *décagone* de 10.. le *dodécagone* de 12... le *pentédécagone* de 15, &c. Nous inſiſterons principalement ſur le triangle, parce que les autres polygones s'y rapportent facilement.

Du Triangle.

393. UN triangle dont les trois côtés ſont égaux, ſe nomme *équilatéral.* S'il n'a que deux côtés égaux, il ſe nomme *iſoſcele.* Enfin ſi tous ſes côtés ſont inégaux, il ſe nomme *ſcalene.*

Un triangle qui a un angle droit ſe nomme *rectangle*, & le côté oppoſé à l'angle droit ſe nomme *hypoténuſe.*

Le côté oppoſé à un angle quelconque d'un triangle ſe nomme la *Baſe* de cet angle.

Deux côtés quelconques d'un triangle ſont une ligne briſée. Leur ſomme eſt donc plus grande que le troiſieme côté.

Si on fait paſſer une circonférence par les ſommets 195
A, B, C des trois angles d'un triangle ABC, ce triangle ſe trouvera *inſcrit* dans la circonférence ABC. Or (377) on peut faire paſſer une circonférence par trois points de cette eſpece; il eſt donc toujours poſſible d'inſcrire un triangle donné dans un cercle.

394. Cela poſé, l'angle A B C $= \frac{1}{2}$ A C (389), l'angle ACB a pour meſure $\frac{1}{2}$ AB, & l'angle BAC a pour meſure $\frac{1}{2}$ BC; donc A B C + A C B + B A C $= \frac{1}{2}$ A B C $=$

FIG. 19. 180°. Donc *la ſomme des trois angles d'un triangle quelconque eſt égale à* 180°.

395. Delà on peut conclure 1°, que ſi on prolonge un côté quelconque AC, l'*angle extérieur* BAF *eſt égal à la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés* ABC, ACB. Car la ſomme de ces deux angles + l'angle BAC = 180°; de même l'angle FAB + BAC = 180°; donc &c.

396. 2°, Que l'un quelconque des angles d'un triangle eſt le ſupplément de la ſomme des deux autres, & que par conſéquent *ſi on connoît deux angles d'un triangle, ou ſeulement leur ſomme, on aura le troiſieme, en ôtant cette ſomme de* 180°.

3°, Qu'un triangle quelconque ne peut avoir qu'un ſeul angle droit ou qu'un ſeul angle obtus; auxquels cas les deux autres ſont néceſſairement aigus.

4°, Que dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus eſt complément de l'autre; d'où il eſt facile de conclure la valeur de l'un, quand on connoît celle de l'autre.

5°, Que dans un triangle quelconque les côtés oppoſés aux angles égaux ſont égaux, & réciproquement. Car les cordes égales AC, BC ſoutendent des arcs égaux, & réciproquement.

6°, Que dans un triangle quelconque le plus grand angle eſt oppoſé au plus grand côté, le plus petit angle au plus petit côté; & réciproquement. Il ne faut pas croire cependant que les cordes croiſſent dans le même rapport que les angles, enſorte qu'un angle double par exemple ſoit oppoſé à une corde double. Nous verrons dans la Trigonométrie le rapport de leurs accroiſſements.

20. 7°, Que dans un triangle iſoſcele un ſeul des angles étant connu, les deux autres le ſont immédiatement. Car ſi on connoît l'angle A ou ſon égal C, on aura l'angle B = 180° — 2 A. Si on donne au contraire l'angle B, on aura A = C = 90° — $\frac{1}{2}$ B.

8°. Que les angles oppoſés aux côtés égaux dans les triangles iſoſceles ſont toujours aigus.

9°, Que chaque angle d'un triangle équilatéral = 60°.

Car ſes angles ſont tous égaux ; leur ſomme = 180°. FIG.
Donc chacun = 60°. 20.

397. Si du ſommet B d'un triangle iſoſcele ABC on abaiſſe la perpendiculaire B F ſur la baſe A C, tous les points de cette perpendiculaire ſeront chacun à égale diſtance de A & de C, & par conſéquent la baſe AC ſera diviſée en deux également au point F. Car AB = BC, à cauſe du triangle iſoſcele ABC. Donc &c. (376).

REMARQUE. Toutes les fois que les deux angles de la baſe d'un triangle ſont aigus, la perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet tombe en dedans du triangle ; mais ſi l'un des deux eſt obtus, cette perpendiculaire tombe en dehors. *Voyez* les triangles ACB, FCB. La démonſtration eſt 21.
aiſée.

De la ſimilitude & de l'égalité des Triangles.

398. DEUX triangles ſont *ſemblables* lorſque les angles 22.
de l'un ſont reſpectivement égaux aux angles de l'autre. &
Si l'angle A B C, par exemple, eſt égal à l'angle *d b f*, & 23.
ſi en même temps B A C = *b d f*, & A C B = *d f b*, les triangles A B C, *d b f* ſont ſemblables. La ſimilitude des triangles n'entraîne donc pas leur égalité. Car pour que deux triangles ſoient égaux, il faut non-ſeulement que les angles de l'un ſoient reſpectivement égaux aux angles de l'autre ; mais il faut de plus que chaque côté de l'un ſoit égal au côté correſpondant de l'autre.

Si deux triangles ſont ſemblables, les côtés oppoſés aux angles égaux ſe nomment *côtés homologues*. En général, on appelle *dimenſions homologues* de deux figures, les lignes de même dénomination dans l'une & dans l'autre, ou même des lignes tirées de la même maniere dans l'une & dans l'autre. Par exemple, dans deux cercles, les rayons, les diamètres, les circonférences, les arcs d'un égal nombre de degrés, ainſi que leurs cordes, ſont des dimenſions homologues.

Cela poſé, nous allons faire connoître les cas dans leſ-

FIG. quels on peut conclure la ſimilitude ou l'égalité de deux triangles.

399. I. *Deux triangles qui ont deux angles reſpectivement égaux ſont ſemblables.* Car le troiſieme eſt égal de part & d'autre (396).

Donc *ſi deux triangles rectangles ont chacun un angle aigu égal de part & d'autre, ces deux triangles ſeront ſemblables.*

22. 400. II. Deux triangles ſont ſemblables lorſque tous leurs côtés homologues ſont paralleles. Car alors tous leurs angles ſont reſpectivement égaux.

401. III. *Deux triangles ſont ſemblables, lorſque tous les côtés de l'un ſont perpendiculaires aux côtés homologues de l'autre*, ou lorſqu'étant prolongés, ils ſe rencontrent à angles droits. Il ſuffit pour s'en convaincre de faire faire un quart de révolution autour d'un point fixe à l'un de ces triangles; car alors ſes côtés homologues ſeront tous paralleles à ceux de l'autre triangle.

402. IV. Si un nombre quelconque de paralleles DF, IL, AC, coupent les côtés d'un angle ABC, tous les triangles BDF, BIL, BAC ſeront ſemblables. Car outre qu'ils ont l'angle B commun, tous les angles BDF, BIL, BAC ſont égaux (384); il en eſt de même des angles BFD, BLI, BCA.

Si les deux triangles ABC, *b d f* ſont ſemblables, & que l'on imagine le triangle *b d f* poſé ſur le triangle ABC de maniere que l'angle *b* tombe ſur ſon égal B, & le côté *d b* ſur ſon homologue AB, le côté *d f* repréſenté alors par DF ſera parallele à la baſe AC. Car le triangle BDF égal à *b d f* ſera ſemblable au triangle ABC. Donc l'angle BDF = BAC. Donc les lignes DF & AC ſont paralleles.

403. V. Si deux triangles ont un angle égal & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre, ils ſont égaux & ſemblables.

En effet, ſi le triangle BDF qui a déja l'angle B commun avec le triangle ABC, avoit auſſi les deux côtés BD,

B F, égaux reſpectivement à A B, B C, il eſt évident que ces deux triangles ſe confondroient. FIG.

404. VI. Deux triangles ABC, *a b c*, qui ont tous leurs côtés homologues égaux, ſont égaux & ſemblables. 22.

Pour le prouver, imaginons le triangle *a b c* poſé ſur ABC, de maniere que le côté *a c* tombe ſur AC; il eſt clair que puiſque AB = *ab*, & que BC = *bc*, le point *b* doit ſe trouver ſur les deux arcs décrits, l'un du centre A & du rayon A B, l'autre du centre C & du rayon C B. Donc il ſe trouvera ſur leur interſection B. Le triangle *a b c* ſe confondra donc avec A B C, & lui ſera par conſéquent égal & ſemblable. & 24.

405. VII. Si deux triangles *a b c*, A B C ont deux côtés homologues égaux *a b*, AB, & BC, *bc* avec les angles A & *a* oppoſés à l'un de ces côtés égaux de part & d'autre, je dis que ces triangles ſeront égaux & ſemblables, pourvu que les angles C, *c* oppoſés aux autres côtés égaux A B, *ab* ſoient de même eſpece, c'eſt-à-dire, ou tous deux aigus ou tous deux obtus.

Poſons l'angle *bac*, ſur l'angle B A C, le point *b* tombera ſur le point B, à cauſe de AB = *ab*, & le point *c* ſur quelque point de A C, à cauſe de l'angle B A C = *b ac*. Mais *bc* = B C; donc le point *c* doit tomber auſſi ſur quelque point de l'arc C E décrit du centre B & du rayon BC. Donc il eſt ou en E, ou en C. Or le triangle BEC étant iſoſcele, les angles égaux C, E ſont aigus (396), & par conſéquent l'angle A E B eſt obtus. Donc ſi les angles C & *c* ſont tous deux aigus, le point *c* tombera ſur le point C; le triangle *a b c* ſera donc confondu avec A B C & lui ſera égal & ſemblable. Mais ſi les angles *e*, C, ou plutôt *e*, E ſont obtus, le point *e* tombera en E & par conſéquent le triangle *a b e* ſera confondu avec A E B & lui ſera égal & ſemblable.

406. De ce que nous venons de dire ſur l'égalité des triangles, il ſuit 1°, que deux obliques paralleles A B, C D compriſes entre deux autres paralleles A D, B C ſont égales. 25.

Car ſi l'on mene A F & D E perpendiculaires ſur B C, le triangle A B F ſera ſemblable au triangle C D E. Or par la nature des paralleles A F = D E. Donc le triangle A B F eſt égal au triangle C D E; donc A B = C D: on prouveroit de même que A D = B C.

407. 2°, Que tout triangle A B D peut être *circonſ-* 26.

FIG. *crit* à un cercle, c'eſt-à-dire, que l'on peut décrire au dedans
26. de ce triangle une circonférence qui touche tous ſes côtés.

Il ſuffit pour cela de diviſer deux de ſes angles en deux parties égales, & de mener du point de concours des deux lignes de diviſion une perpendiculaire ſur l'un des trois côtés, n'importe lequel. Cette perpendiculaire ſera le rayon de la circonférence cherchée. Car les triangles ACE, ACG ſont égaux. Donc CE = CG; & CG = CH, à cauſe de l'égalité des triangles BCG, BCH. Donc les trois perpendiculaires CE, CG, CH peuvent être rayons d'un même cercle inſcrit dans le triangle propoſé.

408. On a auſſi BG = BH, HD = ED, AE = AG. Et appellant p le périmetre du triangle ABD, on aura $p = 2AE + 2ED + 2BH = 2AD + 2BH = 2BD + 2AE = 2AB + 2ED$. Donc $AE = \frac{AD + AB - BD}{2}$; le point E eſt donc déterminé. Les points G & H peuvent l'être de même. Il n'y aura donc qu'à faire paſſer une circonférence par ces trois points.

409. Si le triangle étoit rectangle en B, l'angle CBH moitié de ABD ſeroit de 45°; ſon complément BCH ſeroit donc auſſi de 45°; & le triangle BCH ſeroit iſoſcele. Donc $CH = BH = \frac{1}{2}p - AD$. Donc le rayon du cercle inſcrit dans un triangle rectangle eſt égal à la moitié de ſon périmetre moins l'hypoténuſe.

Des autres Polygones & de leurs principales propriétés.

410. On diſtingue trois ſortes de Polygones, *les irréguliers*, *les ſymmétriques*, *& les réguliers*.

Les polygones irréguliers ſont ceux qui ont des angles & des côtés inégaux. On appelle polygones ſymmétriques ceux dont tous les côtés oppoſés ſont paralleles & égaux. Les polygones réguliers ont tous leurs côtés & tous leurs angles égaux.

27. Un quadrilatere ſymmétrique ſe nomme *Parallélo-*
28. *gramme*. Un quadrilatere régulier s'appelle *Quarré*. Un
29. quadrilatere qui a deux côtés paralleles ſe nomme *Trapeze*.
30. Un parallélogramme dont tous les côtés ſont égaux, mais
31. qui n'a d'angles égaux que les angles oppoſés, ſe nomme

Rhombe ou *Lozange*. Enfin un parallélogramme dont les côtés opposés sont égaux, & dont tous les angles sont droits, se nomme *Parallélogramme rectangle*, ou simplement *Rectangle*. FIG.

Une ligne quelconque AD qui traverse un polygone en passant d'un angle à un autre, se nomme *Diagonale*.

32. On appelle *Angle saillant* celui dont le sommet sort de la figure, comme ABC, & on nomme *Angle rentrant* celui dont le sommet est au-dedans de la figure. 33. Tel est l'angle CDE.

411. Supposons maintenant qu'un polygone n'ait pas d'angle rentrant, & cherchons quelle est la somme de ses angles *intérieurs*, ABC, BCD, CDE, &c.

32. De l'un quelconque A des angles de ce polygone, on peut mener les diagonales AC, AD, AE qui divisent le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux. Or il est évident que la somme de tous les angles de ces triangles est égale à celle des angles intérieurs du polygone; donc la somme des angles d'un polygone est égale à 180° multipliés par le nombre de ses côtés, moins deux; ensorte que si on appelle s la somme des angles du polygone, & n le nombre de ses côtés, on aura $s = 180°(n-2)$.

Donc 1° la somme des angles d'un quadrilatere quelconque $= 360°$; la somme des angles d'un pentagone $= 540°$; &c.

2°, L'un quelconque des angles d'un polygone régulier $= 180(1-\frac{2}{n})$. Car alors tous les angles intérieurs sont égaux. Donc leur somme est égale au produit de l'un quelconque de ces angles par leur nombre, par conséquent l'un de ces angles, ou $\frac{s}{n} = 180(1-\frac{2}{n})$. On voit donc que les angles d'un polygone régulier sont d'autant plus obtus, ou approchent d'autant plus de 180°, que ce polygone a de côtés.

De-là il suit que chaque angle du triangle équilatéral

FIG. $= 60°$; que chaque angle du quarré $= 90°$; que celui du pentagone régulier $= 108°$; que celui de l'hexagone régulier $= 120°$; que celui de l'heptagone régulier $= 128° + \frac{4}{7} = 128°\ 34'\ 17'' + \frac{1}{7}''$, &c, &c.

412. Quant à la ſomme des ſuppléments des angles intérieurs d'un polygone quelconque qui n'a pas d'angle rentrant, elle eſt encore plus facile à déterminer. Car chaque ſupplément $= 180°$ moins l'angle intérieur auquel il appartient; donc la ſomme de tous les ſuppléments $= 180° \times n$ — la ſomme des angles intérieurs $= 180° \times n - 180° (n - 2) = 360°$.

413. Si un polygone a des angles rentrants, la ſomme de tous les ſuppléments des angles ſaillants plus tous les angles rentrants $= 360° + 180°$ pris autant de fois que le polygone a d'angles rentrants.

83. Car la ſomme de tous les ſuppléments des angles ſaillants du polygone ABCEFI $= 360°$. Or ſi on fait un angle rentrant CDE, la ſomme des ſuppléments augmente de ECD + DEC ou de $180°$ — l'angle rentrant CDE. De même ſi on faiſoit un autre angle rentrant FHI, la ſomme des ſuppléments ſeroit $360° + 180° \times 2$ — CDE — FHI. Donc en général la ſomme des ſuppléments des angles ſaillants plus la ſomme des angles rentrants $= 360°$ + autant de fois $180°$ que le polygone a d'angles rentrants.

Des Polygones ſymmétriques.

414. Puiſque les côtés oppoſés d'un polygone ſymmétrique doivent être paralleles & égaux, il eſt clair 1°; que le nombre de ces côtés eſt toujours pair; 2°, que tout polygone régulier d'un nombre pair de côtés eſt en même temps ſymmétrique.

34. & 35. Cela poſé, ſi de chaque angle d'un polygone ſymmétrique, on mene des diagonales aux angles oppoſés, les triangles oppoſés au ſommet, comme AFB, DFC ſeront égaux.

Car le côté AB eſt égal & parallele au côté homologue DC; donc l'angle FDC = FBA, & l'angle FCD = FAB. Les triangles AFB, DFC ſont donc ſemblables. D'ailleurs ils ont un côté homologue égal de part & d'autre, ſavoir AB, DC. Donc ils ſont égaux.

De-là

De-là il suit que AF = FC, que BF = FD, &c. Donc toutes les diagonales AC, DB, &c, se coupent en deux parties égales au même point F qu'on peut appeller à cause de cela le centre du polygone symmétrique. Une diagonale quelconque AC divise donc le polygone symmétrique en deux parties égales & semblables, puisqu'il y a de part & d'autre de cette diagonale autant de triangles égaux & semblables. FIG. 34. & 35.

415. En général toute droite IL passant par le centre F d'un polygone symmétrique est divisée en deux également au point F, & partage le polygone en deux parties égales & semblables. Cela se prouve par l'égalité & la similitude des triangles FIB, DFL & AIF, LCF.

416. De ces propriétés on peut déduire une maniere facile de décrire un polygone symmétrique d'un nombre de côtés donné. Veut-on, par exemple, décrire un polygone symmétrique de six côtés? on menera par le point F, trois droites EFG, DFB, AFC qui fassent entre elles des angles quelconques. On prendra ensuite FB = DF, & d'une grandeur arbitraire; de même AF = FC, EF = GF, & par les points A, B, G, C, D, E, ainsi trouvés, on menera AB, BG, &c qui seront les six côtés du polygone demandé. Cela est évident, puisque les triangles AFB, DFC ayant deux côtés égaux autour d'angles égaux, doivent être égaux & semblables. Donc AB est égal & paralléle à DC, &c.

Des Polygones réguliers.

417. Tout polygone régulier peut être inscrit & circonscrit à un cercle.

Cela se réduit à prouver qu'il y a au-dedans de ce polygone un point C également éloigné des sommets de tous les angles, & tel en même temps que les perpendiculaires menées de ce point sur chaque côté du poly- 36.

FIG. 36. gone soient égales entre elles & divisent chaque côté en deux parties égales.

Or si on divise en deux également tous les angles ABD, BDF, &c, par les lignes CB, CD, &c, je dis que toutes ces lignes se rencontreront au point cherché C. En effet les angles ABD, BDF, &c, étant égaux, leurs moitiés ABC, CBD, CDF, CFD, sont égales. Donc tous les triangles ABC, BCD, DCF, &c, sont isosceles & semblables. Mais les bases AB, BD, DF, sont toutes égales. Donc ces triangles sont isosceles, égaux & semblables. Donc AC = BC = CD = CF, &c. Donc le cercle décrit du rayon CB passe par tous les sommets des angles du polygone donné.

Pour prouver maintenant que l'on peut circonscrire tout polygone régulier à un cercle, il faut faire voir que les perpendiculaires CK, CL, CM, &c sont égales. Or les triangles ACB, BCD, &c étant isosceles, les perpendiculaires CK, CL, CM, &c divisent en deux également les côtés sur lesquels elles tombent (376). De plus, l'angle CBL = CBK. Donc les triangles rectangles CBK, CBL sont égaux & semblables. Donc CK = CL; on prouvera de même que CL = CM = CN &c. Donc toutes ces perpendiculaires sont égales.

418. De-là il suit que le côté d'un polygone quelconque régulier inscrit dans un cercle est la corde d'un arc de $\frac{360°}{n}$, n étant le nombre des côtés du polygone. Ainsi le côté d'un triangle équilatéral inscrit, est la corde d'un arc de 120°.

On voit par ce qui précéde, qu'il est facile d'inscrire dans un cercle un polygone régulier donné. Mais lorsqu'il s'agit d'inscrire dans un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés donné, c'est un problême que la Géométrie élémentaire ne peut résoudre que dans très-peu de cas. Nous allons les exposer briévement.

419. I. Inscrire dans un cercle donné un triangle équilatéral. D'un point quelconque B pris sur la circonfé-

rence donnée, comme centre, & du rayon BC, je décris l'arc ACD qui coupe en A & en D la circonférence; par ces points A & D, je mene AD, & prenant AG, DG égaux chacun à AD, j'aurai le triangle ADG qui ſera équilatéral. FIG. 36.

Car ayant mené les deux cordes AB, BD, les triangles ACB, BCD ſeront équilatéraux. Donc les angles ACB, BCD, ou les arcs AB, BD ſeront chacun de 60°; & par conſéquent l'arc total ABD ſera de 120°. Or la corde de 120° eſt égale au côté du triangle équilatéral. Donc, &c.

420. Puiſque l'arc AB eſt de 60°, ſa corde AB eſt le côté de l'hexagone régulier inſcrit. Or AB = CB. Donc *le côté de l'hexagone régulier inſcrit eſt égal au rayon.*

Si on diviſe l'arc AB en deux parties égales, la corde de la moitié de cet arc ſera le côté du dodécagone régulier; on peut donc par la Géométrie élémentaire inſcrire dans un cercle les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24, 48, &c côtés.

421. Soit propoſé maintenant de trouver l'expreſſion analytique du côté du triangle équilatéral.

A cauſe du triangle iſoſcele BAC la perpendiculaire AQ menée du ſommet A ſur la baſe CB diviſera cette baſe en deux parties égales au point Q. Donc CQ eſt la moitié de CB. Soit le rayon $CB = a$. On aura $CQ = \frac{1}{2}a$, & $\sqrt{(AC^2 - CQ^2)}$, ou $AQ = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Donc 2AQ ou le côté AD du triangle équilatéral a pour expreſſion analytique $a\sqrt{3}$.

422. II. Inſcrire un quarré dans un cercle donné. 37.

Si on mene les diametres AD, BF perpendiculaires l'un à l'autre, je dis qu'ils couperont la circonférence donnée aux points A, B, D, F, par leſquels ſi on mene les cordes AB, BD, DF, AF, on aura les quatre côtés du quarré demandé, puiſque les arcs AB, BD, DF, AF ſont chacun de 90°.

423. De-là il ſuit que ſi on nomme le rayon AC, a, on aura le côté du quarré $= a\sqrt{2}$. Car $AC^2 + CF^2 = AF^2$, ou $AF^2 = 2a^2$.

424. III. Inſcrire dans un cercle donné un décagone régulier. 38.

Suppoſons que AB ſoit le côté cherché, & menons les rayons AC, BC avec la ligne BE, de maniere qu'elle diviſe en deux également l'angle ABC. Cela poſé, l'angle ACB eſt de 36°. Donc

FIG. 38. les angles ABC, BAC ſont chacun de 72°. Or par la ſuppoſition BE diviſe en deux également l'angle ABC. Donc l'angle ABE = 36° = ACB. Le triangle ABE eſt donc iſoſcele & ſemblable au triangle ACB. Donc AE : AB :: AB : AC; mais l'angle EBC = $\frac{1}{2}$ ABC = 36° = ACB. Donc le triangle ECB eſt iſoſcele. Donc EB ou AB = EC, & AE : EC :: EC : AC. Donc ſi on diviſe le rayon AC *en moyenne & extrême raiſon* au point E, le plus grand ſegment EC ſera égal au côté AB du décagone régulier.

39. 425. IV. Inſcrire dans un cercle un *Pentédécagone* régulier, ou un polygone régulier de quinze côtés.

On prendra d'abord AB égal au rayon AC, c'eſt-à-dire l'arc ADB de 60°; enſuite on fera AD égal au côté du décagone, & la corde DB menée par les extrémités des deux arcs AB, AD ſera le côté du pentédécagone cherché. Car l'arc ADB = $\frac{1}{6}$ de la circonférence, & l'arc AD = $\frac{1}{10}$ de cette même circonférence. Or $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; d'où il eſt aiſé d'inſcrire dans un cercle les polygones de 30, 60, 120, &c côtés.

40. 426. Lorſqu'on voudra circonſcrire à un cercle donné un polygone régulier, on commencera par inſcrire dans ce cercle un polygone d'un égal nombre de côtés. Cela fait, du centre C on abaiſſera ſur chaque côté, comme AD, une perpendiculaire CB. Enſuite par le point B, on fera paſſer la tangente EBF qui rencontrera en E, & F les rayons CA, CD prolongés, & on aura EF pour l'un des côtés du polygone cherché. On fera la même choſe pour les autres côtés FG, GH, &c, & par-là le polygone cherché ſe trouvera décrit.

On voit en effet, que les triangles ECB, FCB, FCM, MCG, &c, ſont tous égaux entre eux. Donc EF = FG = GH, &c, & EB = BF = $\frac{1}{2}$ EF = FM &c. Donc le cercle donné touche chaque côté du polygone EFGH &c par le milieu. Ce polygone eſt donc circonſcrit au cercle donné.

427. Si on veut avoir l'expreſſion du côté d'un polygone circonſcrit, on nommera CA, a, le côté AD d'un polygone d'un même nombre de côtés inſcrit = b, & on aura AQ = $\frac{1}{2}b$, QC = $\sqrt{(aa - \frac{1}{4}bb)}$, & à cauſe des triangles ſemblables CAQ, CEB, QC ($\sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$) : AQ ($\frac{1}{2}b$) :: CB ($a$) : EB. Donc 2EB ou le côté cherché = $\frac{2ab}{\sqrt{(4aa - bb)}}$ = EF.

428. On peut déduire de la formule précédente, 1°. Que le côté du

quarré circonſcrit = 2a, ce qui d'ailleurs eſt évident. 2°. Que le côté du triangle équilatéral circonſcrit = 2a√3 = le double du côté du triangle équilatéral inſcrit. FIG. 40.

Des Lignes proportionelles.

429. Lorsqu'une premiere ligne eſt à une ſeconde, comme une troiſieme eſt à une quatrieme, ces lignes ſont *proportionelles* entre elles.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la quatrieme à la troiſieme, les deux premieres ſont *réciproquement* proportionelles aux deux autres.

Dans l'un & dans l'autre cas, celles-là ſont *réciproques* aux deux autres, qui ſont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres ſont les moyens.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la ſeconde à la troiſieme, on a une proportion continue dont la ſeconde ligne eſt *moyene proportionelle.*

Cette proportion continue devient une progreſſion, lorſque la premiere ligne eſt à la ſeconde, comme la ſeconde à la troiſieme, comme celle-ci à la quatrieme, & ainſi de ſuite.

En général toutes les propriétés que nous avons démontrées ſur les quantités proportionelles, conviennent aux lignes qui ont entre elles ce rapport. Au reſte, il ne s'agit ici que de proportions & progreſſions géométriques; & c'eſt la partie la plus eſſentielle des Elémens de Géométrie.

430. Suppoſons d'abord que ſur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI &c, & que l'on mene les paralléles DF, GH, IK, &c, ſur la droite AC; il eſt clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite ſeront égales entre elles: car ſi on mene parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR ſeront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c. 41.

On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK; &

FIG. par conſéquent AP, ſomme de tous les antécédents, eſt à AQ, ſomme de tous les conſéquents (241), comme un ſeul antécédent AD eſt à ſon conſéquent AF; & comme un nombre quelconque de parties de AB eſt au même nombre de parties de AC; par exemple: : AG : AH : : AI : AK : : DI : FK, &c.

42. 431. Donc 1°, *Si deux droites* AE, AD *ſont coupées par deux ou par un plus grand nombre de paralléles* ED, CB, *leurs parties* CE, BD *ſeront proportionelles aux lignes entieres* AE, AD.

43. 432. 2°, Si deux triangles ABC, *abc* ſont ſemblables, tous leurs côtés homologues ſont proportionels.

Car ſi l'angle B = *b*, & ſi on prend ſur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF paralléle à AC, le triangle BDF ſera égal au triangle *abc*.

Or AB : BC : : BD : BF. Donc AB : BC : : *ab* : *bc*. On prouvera de même que AB : AC : : *ab* : *ac*; & que AC : CB : : *ac* : *cb*. Donc *les triangles ſemblables ont tous leurs côtés homologues proportionels.*

433. Réciproquement, ſi les deux triangles ABC, *abc* ont tous leurs côtés homologues proportionels, je dis qu'ils ſeront ſemblables.

Pour le prouver, prenons ſur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, & menons DF paralléle à AC. Le triangle BDF ſera ſemblable au triangle ABC. Donc AB : BD : : AC : DF : : CB : BF. Mais par la ſuppoſition AB : *ab* ou DB : : AC : *ac* : : BC : *bc*; Donc DF = *ac*, & BF = *bc*. Le triangle BDF eſt donc égal & ſemblable au triangle *abc*; & puiſque le premier eſt ſemblable à ABC, le ſecond l'eſt auſſi.

434. Si deux triangles ABC, *abc*, ont un angle égal B, *b* & les côtés autour de cet angle proportionels, je dis qu'ils ſeront ſemblables.

Soit encore pris BD = *ab*, & on aura AB : BC : : *ab* : *bc* : : BD ou *ab* : BF. Donc BF = *bc*; de même DF = *ac*. Le triangle *abc* eſt donc égal & ſemblable au triangle BDF, & par conſéquent ſemblable au triangle ABC. On prouvera de même que ſi les triangles ABC, *abc* ont un angle égal, B = *b*, & deux autres côtés homologues AB, AC, & *ab*, *ac* proportionels, ils ſeront ſemblables.

La propriété des triangles ſemblables que nous venons d'expoſer, eſt un principe fondamental de la Géométrie. En voici deux applications. FIG.

435. Le point B étant ſuppoſé inacceſſible, on demande la diſtance de ce point au point D. 44.

Du point D ayant viſé le point B, on marquera ſur le rayon viſuel BD un point quelconque G, & on conſtruira ſur le terrein le triangle AGD dont on meſurera exactement les trois côtés; cela fait, d'un point quelconque C de la baſe AD, on viſera de nouveau l'objet B, & on obſervera le point E où le rayon viſuel BC coupe le côté AG; la diſtance EG étant meſurée, voici comment on trouvera la diſtance inconnue BD que j'appelle x.

Soit EF paralléle à AD, ſoit $AD=a$... $AG=b$..., $GD=c$.. $CD=d$... $EG=f$. A cauſe des triangles ſemblables AGD, GEF, on aura AG: EG::AD: $EF=\frac{af}{b}$::GD: $GF=\frac{cf}{b}$. Donc $BF=BD-FD=$ $BD-(GD-GF)=BD+GF-GD=x+\frac{cf}{b}-c$.

Or à cauſe des triangles ſemblables BEF, BCD, on a BD: CD::BF: EF, ou $x:d::x+\frac{cf}{b}-c:\frac{af}{b}$; donc $\frac{afx}{b}=dx+\frac{cdf}{b}-cd$; & par conſéquent $x=cd.\frac{b-f}{bd-fa}$. Il n'y a donc qu'à ſubſtituer les valeurs dans cette formule.

436. La Regle de double fauſſe poſition peut ſe démontrer auſſi par les triangles ſemblables: car ſoit repréſenté par $AC=a$ le premier nombre ſuppoſé: ſoit $AB=b$ le ſecond nombre. Si le nombre cherché eſt entre ces deux-là, on pourra le repréſenter par $AP=x$, & ſuppoſant une droite indéfinie EG qui paſſe par le point P & qui faſſe avec AC un angle aigu quelconque, on aura $CD=c$ pour marquer l'écart de ces deux lignes dans la premiere ſuppoſition: ainſi CD exprimera la 45.

FIG. 45. première erreur, & $BE = d$ exprimera la seconde.

Or les triangles BPE & CPD sont semblables ; donc $BP : BE :: CP : CD$, ou $x - b : d :: a - x : c$; ce qui donne $cx - bc = ad - dx$, & $x = \frac{ad + bc}{c + d}$, formule exactement la même que celle que nous avons trouvée (238), pour le cas où les erreurs ont des signes contraires.

Si les deux quantités supposées eussent été moindres que AP, telles, par exemple, que AI & AB, on eût trouvé deux erreurs de même signe, & la formule qui convient à ce cas-là. On trouve avec la même facilité la correction indiquée (269).

437. De la propriété des triangles semblables il suit, 46. que si on divise un angle quelconque A d'un triangle ABC en deux parties égales par la droite AD, les côtés AB & AC seront proportionels aux *segments* BD & DC.

Car soit BF paralléle à AD & qui rencontre en F le côté AC prolongé, on aura $BD : DC :: FA : AC$. Or l'angle $DAC = DAB = ABF = BFC$. Donc le triangle FAB est isoscele, & par conséquent $FA = AB$. Donc $BD : DC :: BA : AC$.

438. Il suit aussi que les parties de deux droites qui se coupent entre paralléles, sont proportionelles. *Voyez* les Fig. 34 & 35.

47. 439. Si du sommet de l'angle droit A d'un triangle rectangle BAC on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AD, il en résultera que les triangles BAD, ADC seront semblables entre eux & au triangle total BAC.

Il en résultera aussi que *la perpendiculaire* AD *sera moyene proportionelle entre les segments* BD, DC.

Il en résultera enfin que chaque côté AB, ou AC du triangle rectangle BAC sera moyen proportionel entre l'hypoténuse entiere BC & le segment *adjacent* à ce côté, c'est-à-dire qu'on aura $BC : AB :: AB : BD$, & $BC : AC :: AC : DC$.

1°. Le triangle rectangle BAD a un angle aigu B commun avec le triangle rectangle BAC. Donc il lui eſt ſemblable. Le triangle rectangle ADC a auſſi un angle aigu C commun avec le triangle BAC; il lui eſt donc ſemblable auſſi. Or deux triangles ſemblables à un même triangle, ſont ſemblables entre eux. Donc, &c. FIG.

II°. De la ſimilitude des triangles BAD, ADC, on déduit BD : AD :: AD : DC. Donc $AD^2 = BD \times DC$.

III°. A cauſe des triangles ſemblables BAD, BAC, on a BD : BA :: BA : BC, & par la même raiſon les triangles BAC, ADC donnent DC : AC :: AC : BC.

Or de ces deux dernieres proportions, on tire $AC^2 = DC \times BC$, & $BA^2 = BD \times BC$. Donc $BA^2 + AC^2 = (DC + BD) \times BC = BC \times BC = BC^2$.

440. Et par conſéquent *dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypoténuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres côtés*: propoſition célebre par ſa grande utilité. Elle eſt la quarante-ſeptieme du premier Livre d'Euclide.

441. Soit le côté $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, on aura $c^2 = a^2 + b^2$, d'où il ſuit que deux quelconques des côtés d'un triangle rectangle étant connus, le troiſieme l'eſt immédiatement. Ainſi $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$... $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$... $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$. Si $a = b$, on a $c = a\sqrt{2}$. Or dans ce cas BC eſt la diagonale du quarré ABCD dont le côté $AB = a$. Donc *la diagonale eſt incommenſurable avec le côté du quarré.* 48.

442. De ce qui précede, on peut conclure que ſi du ſommet A d'un triangle quelconque ABC on abaiſſe ſur la baſe BC la perpendiculaire AD, on aura cette proportion: la baſe BC eſt à la ſomme AC + AB des deux autres côtés, comme leur différence AC — AB eſt à la ſomme ou à la différence DC ± DB des ſegments DC, BD. (On doit prendre la ſomme des ſegments lorſque cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle). 49.

FIG. 49. Car $AB^2 - DB^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2$. Donc $AC^2 - AB^2 = DC^2 - DB^2$; d'où l'on tire $BC : AC + AB :: AC - AB : DC \pm DB$.

Des Lignes proportionelles considérées dans le Cercle.

50. 443. *Si d'un point quelconque* M *pris sur la demi-circonférence* AMB, *on mene la perpendiculaire* MP *sur le diamétre* AB, *cette perpendiculaire sera toujours moyene proportionelle entre les deux segments* ou *abscisses* AP, PB ; enſorte que l'on aura toujours $PM^2 = AP \times PB$.

Car ſi on mene AM & MB, le triangle AMB ſera rectangle. Donc $MP^2 = AP \times PB$. On a auſſi le quarré AM^2 de la corde AM, $= AP \times AB$.

444. Soit le diametre $AB = 2a$, l'abſciſſe $AP = x$, ce qui donne $2a - x$ pour l'autre abſciſſe BP. Soit la perpendiculaire ou l'*ordonnée* $PM = y$, & nous aurons généralement $yy = (2a - x)x = 2ax - xx$; équation fondamentale que nous retrouverons ſouvent, & qui exprime la propriété ſi connue du cercle, d'avoir toujours le quarré de chacune de ſes ordonnées égal au produit des abſciſſes correſpondantes. On l'appelle à cauſe de cela l'*équation du cercle.*

Si on eût fait $PC = x$, c'eſt-à-dire, ſi on eût mis l'*origine* des abſciſſes au centre du cercle, alors on eût trouvé par le triangle rectangle CPM, l'équation $yy = aa - xx$, laquelle exprime la même propriété du cercle.

Et ſi au lieu d'appeller $2a$ le diametre, on l'appelloit a, les deux équations précédentes deviendroient $yy = ax - xx$, & $yy = \frac{1}{4}aa - xx$; ce qui reviendroit toujours au même.

445. Imaginons maintenant la tangente MT, & prolongeons l'axe AB juſqu'à ce qu'il rencontre cette tangente au point T, la ligne PT eſt ce qu'on appelle la *ſoutangente.*

Pour en trouver l'expreſſion, rappellons-nous que le triangle CMT eſt rectangle en M. On a donc $TP \times PC = PM^2$. Donc $PT = \frac{PM^2}{CP}$. Soit $CP = x$, & on aura $PT = \frac{aa - xx}{x}$. Donc $PT + CP = CT = \frac{aa}{x}$. Ce qui donne cette proportion, $CP : CA :: CA : CT$. D'où il eſt facile de connoître le point T, & par conſéquent de mener la tangente TM, le point M étant donné.

Veut-on maintenant avoir l'expreſſion de la tangente T M ? Le triangle T M C rectangle en M donnera $TM = \sqrt{(CT^2 - CM^2)} = \ldots$ FIG. 50.

$\sqrt{\left(\frac{a^4}{x^2} - aa\right)} = \frac{a}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

446. *Si deux cordes ſe coupent dans un cercle, leurs parties ſeront réciproquement proportionelles*, c'eſt-à-dire qu'on aura CF : AF :: FB : FD, ou CF × FD = AF × FB. 51.

Car ſi on mene AC, BD, les triangles ACF, FBD ſeront ſemblables, puiſque l'angle CFA = DFB, & que l'angle CDB = CAB. Donc CF : AF :: FB : FD.

447. Par-là on peut réſoudre les deux problêmes ſuivants.

I. Mener par le point donné A la corde BAD de maniere que AD ſoit à AB :: m : n. 52.

Par le point A & par le point C je mene d'abord le diametre FG; puis je remarque que le point A étant donné, on connoît ſa diſtance AC au centre C. Soit donc AC = b, CF = a, AD = x, & on aura $AB = \frac{nx}{m}$, $BA \times AD = \frac{nx^2}{m} = FA \times AG = aa - bb$.

Donc x, ou $AD = \sqrt{\left[\frac{m}{n}(aa - bb)\right]}$, & $AB = \sqrt{\left[\frac{n}{m}(aa - bb)\right]}$.

Donc ſi du point A comme centre & d'un rayon $\sqrt{\left[\frac{m}{n}(aa - bb)\right]}$ on décrit un arc de cercle, cet arc coupera la circonférence en un point D par lequel & par le point A ſi on mene DAB, elle ſera la corde demandée.

II. Par le point A mener la corde BAD égale à une droite donnée c. En gardant les mêmes dénominations, on aura $AB = c - x$, & $AB \times AD = cx - xx = aa - bb$. D'où l'on tire AD ou $x = \frac{1}{2}c + \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + bb - aa\right)}$, & $AB = \frac{1}{2}c - \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + bb - aa\right)}$.

448. Si du même point B pris hors la circonférence d'un cercle on mene les deux ſécantes AB, AC, *leurs parties extérieures* AD, AE *ſeront réciproquement proportionelles aux ſécantes entieres*; en ſorte que l'on aura AD : AE :: AC : AB. Car ſi on mene BE, DC, les triangles ABE, ADC ſeront ſemblables, ayant, outre l'angle commun A, les angles DBE, DCE égaux. Donc AD : AE :: AC : AB. Donc AD × AB = AE × AC. 53.

449. Si l'une des ſécantes devient la tangente AM, cette tangente ſera moyene proportionelle entre la ſé- 54.

cante entiere AB & ſa partie extérieure AD.

54. Car ſi on mene MD, MB, les triangles AMD, AMB ſeront ſemblables, puiſqu'outre l'angle commun A, les angles AMD, ABM ſont égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc MD. Donc AD : AM :: AM : AB, & $AM^2 = AD \times AB$. Donc les deux tangentes AM, AN menées du même point A ſont égales.

450. Si quatre cordes forment un quadrilatere inſcrit, le produit
55. des deux diagonales BD, AC ſera égal à la ſomme des deux produits de chaque côté par le côté oppoſé, c'eſt-à-dire qu'on aura $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$.

Menons DE de maniere que l'angle ADE = BDC, les triangles AED, BCD ſeront ſemblables, puiſque par la ſuppoſition ADE = BDC, & que l'angle DAE = DBC. Donc BD : BC :: AD : AE = $\frac{BC \times AD}{BD}$. Or les triangles BAD, EDC ſont auſſi ſemblables, puiſque ABD = ACD, & que ADB = CDE (car ADB = ADE - BDE = BDC — BDE = CDE). Donc BD : AB :: CD : CE = $\frac{AB \times CD}{BD}$.

Donc $AE + CE = AC = \frac{AB \times CD + BC \times AD}{BD}$. D'où l'on tire $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

451. Pour faire quelque application de cette propriété, ſoient les
56. deux arcs AC, CB, & ayant mené AB, propoſons-nous de trouver une équation générale qui exprime le rapport qu'il y a entre AC, CB, AB & le rayon du cercle.

Je mene par le point C le diametre CD & les cordes AD, DB; je nomme enſuite CD (2a), AC (b), CB (c), AB (d); cela poſé, le quadrilatere inſcrit ACBD donne $2ad = CB \times AD + AC \times BD$: or $AD = \sqrt{(CD^2 - AC^2)}$, & $BD = \sqrt{(CD^2 - CB^2)}$. Donc $2ad = c\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - c^2)}$, équation générale par le moyen de laquelle on peut réſoudre les problêmes ſuivans.

I. Etant donnée la corde AC d'un arc, trouver la corde AB du double de cet arc.

On a dans ce cas $b = c$. Donc $d = AB = \frac{b}{a}\sqrt{(4a^2 - b^2)}$.

II. Etant donnée la corde AB d'un arc, trouver la corde AC de la moitié de cet arc.

Soit x la corde cherchée AC, & on aura $ad = x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. Donc $x = \sqrt{2a^2 - \sqrt{4a^4 - a^2d^2}} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{2}ad)} - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}ad)}$.

III. Etant données les cordes AC, CB de deux arcs, trouver la corde AB d'un arc ACB égal à leur ſomme.

On a $AB = d = \frac{c}{2a}\sqrt{(4a^2 - b^2)} + \frac{b}{2a}\sqrt{(4a^2 - c^2)}$. FIG. 56.

IV. Etant données les cordes AB, AC de deux arcs, trouver la corde CB d'un arc égal à leur différence.

Soit $CB = c = x$, on aura $2ad = x\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - x^2)}$.

D'où l'on tire $x = \frac{d}{2a}\sqrt{(4a^2 - b^2)} - \frac{b}{2a}\sqrt{(4a^2 - d^2)}$.

V. Etant donnés trois points A, C, B, trouver le rayon du cercle qui passeroit par ces trois points.

En regardant a comme l'inconnue dans l'équation $2ad = c\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - c^2)}$, on trouve $a = \frac{bcd}{\sqrt{4c^2d^2 - (d^2 + c^2 - b^2)^2}}$.

Si le triangle ABC est rectangle, on a $a = \frac{1}{2}b$. Donc le centre du cercle tombe alors au milieu de AB ; ce qui d'ailleurs est évident.

Solutions de quelques problêmes sur les lignes proportionelles.

452. I. Etant données trois droites a, b, c, trouver une quatrieme proportionelle $\frac{bc}{a}$. 57.

Ayant mené deux droites AD, AE qui fassent entre elles un angle quelconque, je prends sur AD la partie $AB = a$, & $AD = c$, je prends ensuite sur AE la ligne $AC = b$, & ayant mené CB, je tire DE parallele à CB. Cela posé, je dis que AE est la quatrieme proportionelle demandée.

Car les triangles ACB, AED sont semblables. Donc $AB : AC :: AD : AE = \frac{bc}{a}$. On eût trouvé la même chose par l'intersection de deux droites entre paralleles.

S'il falloit trouver une troisieme proportionelle à deux droites données a & b, il est évident que la construction seroit toujours la même. Il faudroit seulement prendre $AD = AC$.

453. II. Trouver entre deux droites a & b une moyene proportionelle $\sqrt{ab}$. 58.

Ayant mené la ligne indéfinie APB, je prends sur cette ligne la partie $AP = a$, $BP = b$ & je décris une demi-circonférence sur le diamètre AB. Cela posé,

FIG. il eſt clair que la perpendiculaire PM menée par le point de diviſion P ſera la moyene proportionelle demandée.
58. Car $PM^2 = AP \times PB$.

59. 454. III. Diviſer une droite donnée *a* de la même maniere qu'une autre droite AB eſt diviſée.

Par l'une des extrémités A de la droite AB je mene AC égale à la droite donnée *a* & qui faſſe avec AB un angle quelconque. Enſuite, je tire CB, & des points de diviſion I, F, D de la ligne AB, je mene parallelement à CB les lignes DE, FG, IH qui diviſeront AC de la même maniere que la droite AB eſt diviſée. Car les lignes BC, DE, FG, IH étant paralleles, on a AB : AC :: AI : AH :: IF : HG :: FD : GE :: DB : EC.

60. 455. IV. Diviſer une droite AB en un nombre quelconque *n* de parties égales.

Par le point A on menera la ligne indéfinie AC ſur laquelle ayant pris un nombre *n* de parties égales de telle grandeur que l'on voudra AE, EG, &c.... LC, on menera par l'extrémité C & par le point B la ligne CB. Cela poſé, les lignes LK, IH, &c, paralleles à CB diviſeront la ligne AB en un nombre *n* de portions égales. Car AB : AC :: AD : AE :: DF : EG :: FH : GI, &c. Or $AE = EG = GI = IL = \frac{1}{n} AC$.

Donc $AD = DF = FH = \frac{1}{n} AB$.

61. 456. V. Diviſer une droite donnée AB en *moyene & extrême raiſon*; c'eſt-à-dire, de maniere que le plus grand ſegment FB ſoit moyen proportionel entre la ligne entiere AB & le plus petit ſegment AF.

Par l'extrémité A de la ligne AB élevez la perpendiculaire $AC = \frac{1}{2} AB$, & ayant mené CB, prenez $FB = CB - AC$; la ligne AB ſera diviſée en moyene & extrême raiſon au point F.

Car CB^2 ou $FB^2 + 2AC \times FB + AC^2 = AC^2 + AB^2$. Donc $FB^2 = AB^2 - 2AC \times FB = AB^2 - AB \times FB = AB \times AF$. Donc AB : FB :: FB : AF.

Conſtruction géométrique des Equations déterminées du premier & du ſecond degré.

PARMI les découvertes qui ont rendu Deſcartes ſi célèbre, il n'en eſt point qui ait plus contribué aux progrès des Mathématiques, que celle de l'application de l'Algebre à la Géométrie. Les conſtructions géométriques ſont partie de cette application; mais nous nous bornerons ici à celles des équations du premier & du ſecond degré.

457. Conſtruire géométriquement une équation, c'eſt trouver en lignes les valeurs de l'inconnue.

Si l'équation n'eſt que *linéaire*, ou du premier degré, on déterminera toujours la valeur de l'inconnue par la ſeule interſection des lignes droites.

Si l'équation eſt *quadratique*, ou du ſecond degré, auquel cas l'inconnue doit avoir deux valeurs, on les trouvera par l'interſection de la circonférence du cercle avec une ligne droite.

Mais ſi l'équation à conſtruire eſt plus élevée, il faut alors ſe ſervir de différentes courbes dont le choix & l'uſage entraînent beaucoup de difficultés. Celle de les décrire exactement, eſt ſi grande que les réſultats donnent des racines bien moins approchées, que ceux des méthodes purement algébriques.

458. Si on a $\frac{ac}{b} = x$, on prendra (452) une quatrieme proportionelle à b, a, c, & on aura la valeur de x. Si on a $x = \frac{abc}{de}$, on prendra $m = \frac{ab}{d}$, enſuite $n = \frac{cm}{e}$, & on aura $n = x$. De même $\frac{abcd}{efg}$ ſe conſtruit en prenant une ligne $m = \frac{ab}{e}$, enſuite une ligne $n = \frac{cmd}{fg}$; & on a $n = \frac{abcd}{efg}$, & ainſi des autres. Ce ſeroit la même choſe, ſi on avoit à conſtruire $\frac{aa}{b}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a^4}{b^3}$, &c.

459. Mais ſi on a une fraction à conſtruire dont le numérateur ſoit complexe, comme $\frac{abc + ccd + mnp}{rq}$, on prendra, par ce qui précede, une ligne $k = \frac{abc}{rq}$, une ligne $i = \frac{ccd}{rq}$, enfin une ligne $l = \frac{mnp}{rq}$, & en ajoutant k, i, l, on aura une ligne égale à la fraction propoſée.

460. Si le numérateur & le dénominateur étoient complexes, comme

dans $\frac{abc+cfg}{mk+nh}$, on prendroit une ligne $l=k+\frac{nh}{m}$, & la fraction proposée deviendroit $\frac{abc}{ml}+\frac{cfg}{ml}$ que l'on construiroit, comme ci-dessus. De même si on avoit $x=\frac{abcc+q^3h+noqk-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$, on prendroit une ligne $f=i-\frac{kl}{q}+\frac{cmd}{qq}$, & on auroit $x=\frac{abcc}{fqq}+\frac{qh}{f}+\frac{okn}{fq}-\frac{m^3p}{fqq}$, que l'on construiroit comme ci-dessus.

461. Au reste, il y a plusieurs cas où la construction est plus facile que par les méthodes précédentes; nous en allons donner quelques exemples.

Soit $x=\frac{ab+bc}{c+d}$. Au lieu de décomposer cette fraction en deux autres $\frac{ab}{c+d}$, $\frac{bc}{c+d}$, on prendra une quatrieme proportionelle à $c+d, a+c, b$, & on aura la valeur de x.

Soit $x=\frac{aa-bb}{c}$, on prendra une quatrieme proportionelle à c, $a+b, a-b$, & on aura x.

Soit encore $\frac{abcc-aabb}{abc+c^3}$; on prendra une ligne $m=\frac{ab}{c}$; & on aura $x=\frac{cm-mm}{m+c}$; d'où en prenant une quatrieme proportionelle à $m+c$, $c-m, m^2$ on aura la valeur de x.

Nous ne nous arrêtons pas à éclaircir ces exemples par des figures; cela ne peut avoir aucune difficulté.

462. Voyons donc comment on peut construire les radicaux du second degré.

Si on avoit d'abord $xx=am$, ou $x=\sqrt{am}$, il faudroit prendre une moyene proportionelle entre a & m, & ce seroit la valeur de x. Si on avoit $x=\sqrt{(ab+bc)}$, on prendroit entre b & $a+c$ une moyene proportionelle qui seroit égale à $\sqrt{(ab+bc)}$.

De même si on avoit $x=\sqrt{(a^2+bc)}$, on prendroit $m=\frac{bc}{a}$, & on auroit $x=\sqrt{a(a+m)}$ qui se construiroit comme dans le cas précédent.

463. Soit maintenant $x=\sqrt{(ac+bd)}$, on prendra $m=\frac{bd}{a}$ & on aura $x=\sqrt{a(c+m)}$.

Si on avoit $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$, on prendroit une moyene proportionelle

tionelle entre $a+b$ & $a-b$, & on auroit la valeur de x. On peut FIG.
auſſi conſtruire $\sqrt{(a^2-b^2)}$ de cette autre maniere. Soit décrite du diamètre $AB=a$ une demi-circonférence ACB, je dis que ſi on y inſcrit la corde $AC=b$, en menant CB, cette ligne ſera $=\sqrt{(a^2-b^2)}$. Car le triangle ACB eſt rectangle.

Si on avoit à conſtruire $\sqrt{(a^2+b^2)}$, on prendroit $m=\frac{b^2}{a}$, enſuite une moyene proportionelle entre a & $a+m$; mais il eſt plus ſimple de conſtruire un triangle rectangle ACB, dont les côtés AC, CB ſoient a, & b; l'hypoténuſe AB ſera égale à $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

S'il y avoit ſous le radical propoſé plus de deux termes comme dans $\sqrt{(ab+bc+df)}$, on prendroit (460) $m=\frac{ab}{d}+\frac{bc}{d}+f$, & le radical deviendroit $\sqrt{am}$, quantité facile à conſtruire. Si on avoit $x=\sqrt{(ac-fg+mq+rd)}$, on prendroit $n=c-\frac{fg}{a}+\frac{mq}{a}+\frac{rd}{a}$, & on auroit $x=\sqrt{an}$.

464. Soit l'expreſſion à conſtruire, $\sqrt{(a^2+b^2+c^2+f^2+\&c)}$; 63.
au lieu de faire comme dans la méthode précédente $m=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}$ &c, on prendra $AB=a$; enſuite on menera $BC=b$ perpendiculaire à AB, & on aura $CA^2=a^2+b^2$. Si on mene $CD=c$ perpendiculaire à CA, on aura $AD^2=a^2+b^2+c^2$. En menant $DE=d$ perpendiculaire à DA, on aura $AE^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, &c. &c, d'où il eſt évident que la derniere hypoténuſe AF ſera $\sqrt{(a^2+b^2+c^2\ \&c)}$.

S'il y avoit dans cette expreſſion quelques quarrés négatifs, on prendroit, par ce qui précede, un ſeul quarré m^2 égal à la ſomme des quarrés poſitifs, un autre quarré n^2 égal à la ſomme des quarrés négatifs, on auroit enſuite à conſtruire $\sqrt{(m^2-n^2)}$, ce qui eſt facile.

465. On peut réduire à la conſtruction que nous venons de donner toutes les autres quantités radicales. Si on a, par exemple, $\sqrt{(bc+am+dn-cq)}$, on prendra $bc=i^2$, $am=k^2$, $dn=l^2$, $cq=p^2$, & on aura à conſtruire $\sqrt{(i^2+k^2+l^2-p^2)}$.

S'il y a des fractions ſous le radical propoſé, il ſera aiſé de s'en débarraſſer. Qu'on ait, par exemple, $x=\sqrt{\left(\frac{ab^2+cd^2}{b+c}\right)}$, on prendra $\frac{ab}{b+c}=m$, $\frac{cd}{b+c}=n$, & on aura $x=\sqrt{(bm+dn)}$, quantité facile à conſtruire.

Suppoſons maintenant qu'on ait $x=\sqrt{\left(aa-\frac{ccff-ddff}{ab+cd}\right)}$, je prends $cc+dd=mm$, $\sqrt{(ab+cd)}=n$, & j'ai $x=\sqrt{\left(aa-\frac{ffmm}{nn}\right)}$, je prends $p=\frac{fm}{n}$, & j'ai $x=\sqrt{(aa-pp)}$.

FIG. 63. 466. Nous avons supposé jusqu'ici 1°, que la quantité donnée étoit homogène : si elle ne l'étoit pas comme $\frac{a^3+b}{a^2+c}$, on la rendroit telle, en multipliant ses termes par différentes puissances d'une ligne l qu'on regarderoit comme l'unité, ce qui ne changeroit pas la valeur de la quantité. On auroit donc dans cet exemple $\frac{a^3+l^2b}{a^2+lc}$, quantité homogène & égale à la proposée. Si on avoit $\frac{a^4c+ab^3-d}{b^4+a^3-c}$, on rendroit cette expression homogène en l'écrivant ainsi $\frac{a^4c+alb^3-l^4d}{b^4+a^3l-l^3c}$, &c.

467. Nous avons supposé 2°, que la quantité donnée n'étoit que d'une dimension ; si elle en avoit plusieurs, il ne seroit pas difficile de la réduire à une seule quantité monome de la même dimension.

Qu'on ait, par exemple, $\frac{abc+cfg}{m+n}$. Je prendrois (460) $p=\frac{ab+fg}{m+n}$, & j'aurois $pc=\frac{abc+cfg}{m+n}$.

468. S'il entroit deux radicaux dans la quantité proposée, comme dans $\sqrt{[ff+g\sqrt{(kk-bb)}]}$, on prendroit $\sqrt{(kk-bb)}=c$, ensuite $\sqrt{(ff+gc)}=n=\sqrt{[ff+g\sqrt{(kk-bb)}]}$. Si on avoit à construire $\sqrt[4]{a^3c}$, on feroit $ac=m^2$, & on auroit $\sqrt[4]{(a^2m^2)}=\sqrt{am}=\sqrt[4]{(a^3c)}$. De même $\sqrt{abcd}$ se construit en prenant $ab=m^2$, $cd=n^2$, ce qui donne $\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{mn}$. Enfin, si on avoit $\sqrt[4]{(a^2fg+bcfk-a^3f)}$, on prendroit $m=\frac{fg}{a}+\frac{bcfk}{a^3}-f$, & le radical proposé deviendroit $\sqrt[4]{a^3m}$, quantité facile à construire.

En général, on voit que toute quantité dans laquelle il n'entre que des radicaux du second degré, ou même du quatrieme, ou du huitieme, &c. peut toujours être construite par le moyen du cercle.

469. De-là il suit que toute équation du second degré peut être résolue par le moyen du cercle. En effet l'équation $xx-px=qq$, qui peut représenter toutes celles du second degré, donne $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp+qq)}$, quantité facile à construire par ce qui précede.

64. 470. Pour donner quelques exemples, proposons-nous de mener du point donné A hors des paralleles EB, CD la droite AK de maniere que la partie KI interceptée par ces paralleles soit égale à une droite donnée c.

Soit menée AF perpendiculaire sur les paralleles AB, CD, & soit $AF=a$, $FG=b$, $FK=x$. On aura $AK\sqrt{(a^2+x^2)}:AF(a)::IK(c):FG(b)$. D'où l'on tire $\frac{ac}{b}=\sqrt{(a^2+x^2)}$, & par consé-

quent $x = \frac{a}{b}\sqrt{(c^2-b^2)}$, ce qui donne cette construction. FIG. 64.

Du point G comme centre & d'un rayon égal à la droite donné c, soit décrit un arc de cercle, qui coupe en H la ligne FB, je dis que AK parallele à GH sera la ligne demandée.

Car $FG\ (b) : AF\ (a) :: FH\ (\sqrt{cc-bb}) : FK\ (x) = \frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$. Il est pourtant à remarquer que l'équation $\frac{ax}{b} = \sqrt{(a^2+x^2)}$, donne $x = -\frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$ aussi-bien que $x = \frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$.

Mais pour savoir ce que signifie cette valeur négative $-\frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$, il faut observer que l'arc de cercle décrit du centre G & du rayon $GH = c$, coupe la ligne FB en deux points M & H. D'où il suit que AK' parallele à MG n'est pas moins propre à résoudre le problême proposé que AK; c'est donc FK' égale & directement opposée à FK, qu'exprime la valeur négative $-\frac{a}{b}\sqrt{(c^2-b^2)}$. D'où l'on peut conclure en général, que *lorsque le résultat d'un calcul donne une valeur négative de l'inconnue, cela signifie qu'on doit prendre cette inconnue dans un sens opposé à celui où on l'avoit prise d'abord.*

471. Soit proposé maintenant de décrire un cercle qui passe par les deux points donnés A & B, & qui touche la droite CF donnée de position. 65.

Le problême se réduit à trouver le point M où le cercle touche la droite CF; car ce point étant trouvé, si on fait passer une circonférence de cercle par A, B, M, elle sera la circonférence cherchée.

Soit menée par les points A & B la droite ABF qui rencontre en F la droite CF, & soit divisée AB en deux également au point D; en nommant FM (x), FD (a), $AD = DB = b$, on aura $xx = BF \times AF = a^2 - b^2$. D'où $x = \sqrt{(a^2-b^2)}$, ce qui donne cette construction.

Sur le diametre DF soit décrit la demi-circonférence DGF dans laquelle si on inscrit la corde $DG = DB$, je dis que GF sera égale à FM, car $FG = \sqrt{(a^2-b^2)} = FM$. Or le point M étant déterminé, le problême est résolu.

FIG.

Des Figures ſemblables.

472. DEUX figures ſont ſemblables, lorſqu'ayant un égal nombre de côtés, tous les côtés de l'une ſont proportionels aux côtés homologues de l'autre, & que de plus tous les angles de l'une ſont reſpectivement égaux à ceux de l'autre.

D'où il faut conclure que tous les polygones réguliers d'un égal nombre de côtés ſont des figures ſemblables, & que par conſéquent les cercles ſont tous ſemblables entre eux, puiſqu'on peut les regarder comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés.

66. 473. Si deux figures A B C D E, *a b c d e* ſont ſemblables, le contour ou le périmetre de la premiere figure ſera au contour de la ſeconde, comme un côté quelconque A B pris dans la premiere figure eſt au côté homologue *a b* pris dans la ſeconde, ou comme un nombre quelconque de côtés A B + A E + D E pris dans la premiere, eſt au même nombre *a b* + *a e* + *d e* de côtés homologues pris dans l'autre.

Car A B : *a b* : : B C : *b c* : : D C : *d c* : : D E : *d e* &c; donc la ſomme des antécédents, ou le périmetre de la premiere figure eſt à la ſomme des conſéquents, ou au périmetre de la ſeconde, comme A B : *a b*, ou comme A B + A E + D E, &c : *a b* + *a e* + *d e*. &c.

67. De-là il ſuit que les contours de deux polygones réguliers A B D E F G, *a b d e f g* ſont entre-eux : : le côté A G : au côté homologue *a g* : : la portion B A G F du périmetre du premier polygone eſt à la portion homologue *b a g f* du ſecond. Or ſi C eſt le centre de ces polygones, à cauſe des triangles iſoſceles & ſemblables *a* C *g*, A C G, on aura A G : *a g* : : C G : C *g*. Donc A B D E F G : *a b d e f g* : : B A G F : *b a g f* : : C G : C *g*.

68. 474. *Les circonférences de deux cercles ſont donc entre elles comme leurs rayons* & comme deux arcs quelconques A M, B N compris entre deux rayons C A, C M.

Et puiſqu'on a d'ailleurs CM : CN :: AM : BN, on aura auſſi AMF : BND :: l'arc AM : l'arc BN :: la corde AM : la corde BN :: CM : CN. FIG.

Ainſi les circonférences AMF, BND contenant chacune 360 degrés, leurs arcs correſpondants AM, BN, contiennent autant de degrés l'un que l'autre. On voit donc bien que la meſure d'un angle en degrés eſt toujours la même, de quelque rayon que l'on décrive l'arc qui doit meſurer cet angle.

475. Si dans deux figures ſemblables ABCDE, *abcde* on mene les diagonales AD & AC, *ad* & *ac*, elles ſeront proportionelles entre-elles & aux côtés homologues AE, *ae*. Car les triangles ADE, *ade* ſont ſemblables, ayant 1°, un angle égal E, *e*; 2°, les côtés autour de cet angle proportionels. On a donc AD : *ad* :: AE : *ae*. On prouvera de même que AC : *ac* :: BC : *bc* :: AE : *ae* :: AD : *ad*. En général, *la propriété des figures ſemblables eſt d'avoir toutes leurs dimenſions homologues proportionelles.* 66.

Cela poſé, s'il s'agiſſoit de décrire un polygone ſemblable au polygone donné ABCDEF, & dont le côté homologue à AB fût donné, on prendroit ſur AB prolongé, s'il étoit néceſſaire, la ligne A *b* égale au côté homologue à AB donné par la ſuppoſition. On meneroit enſuite du point A les diagonales AC, AD, AE, & les paralleles *bc* à BC, *cd* à CD, *de* à DE, *ef* à EF formeroient le polygone demandé. 69.

Car, par la conſtruction, les angles des figures ABCDEF, *abcdef* ſont reſpectivement égaux. D'ailleurs leurs côtés ſont proportionels à cauſe des triangles ſemblables ABC, *abc*, & ACD, A*cd* &c. Donc les figures *abcdef*, ABCDEF ſont ſemblables.

SECONDE PARTIE

DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

476. ON appelle *Surface*, *Aire*, ou *Superficie* tout ce que l'on conçoit n'avoir que deux dimenſions de l'étendue, la longueur & la largeur.

Suppoſons, par exemple, que ce Livre ſoit partagé en deux moitiés, & que chacune de ces moitiés ſoit partagée en deux autres, & ainſi de ſuite. Il eſt clair que chaque feuillet peut ſe diviſer de même; & qu'après avoir épuiſé tous les procédés des Arts pour diviſer & ſoudiviſer un ſeul de ces feuillets, on conçoit encore poſſibles des diviſions ſans fin, d'où réſulteroient à chaque fois des feuillets de plus en plus minces, quoique toujours égaux en longueur & en largeur au premier.

Mais comme à l'image diſtincte des premieres diviſions ſuccédent des idées confuſes du nombre de ces feuillets lequel va toujours croiſſant, & de leur épaiſſeur qui diminue de plus en plus, tout ce que l'on retire de cette conſidération, eſt une idée bien imparfaite de ce que l'on appelle infiniment grand & infiniment petit. Il en réſulte cependant d'une maniere fort claire, 1°, qu'à force de diviſer & de ſoudiviſer, on approche de plus en plus du terme où le feuillet n'auroit aucune épaiſſeur: 2°, que pour atteindre ce terme, il faudroit un nombre vraiment infini de diviſions: 3°, que ce nombre eſt impoſſible, & que par conſéquent on n'arrivera jamais à ce terme, quoique l'on en approche de plus en plus.

477. On appelle *des Limites* ces ſortes de quantités vers leſquelles d'autres tendent ſans pouvoir jamais y atteindre. Ainſi on peut dire que *la ſurface eſt la limite du corps*, que la ligne eſt la limite de la ſurface, & que le point eſt la limite de la ligne.

On peut dire auſſi que la ſurface d'un corps eſt cette enveloppe extérieure dont il eſt revêtu, & ſur laquelle tombent nos regards. Pour en déterminer la grandeur, cherchons d'abord quelle eſt en général la meſure naturelle des ſurfaces, & nous verrons enſuite comment on évalue en particulier celles des différents polygones qui peuvent ſervir de faces aux corps. FIG.

478. Il faut 1°, que la meſure des ſurfaces ſoit elle-même une ſurface à laquelle on puiſſe rapporter celles que l'on veut évaluer. Cette ſurface primitive eſt en quelque ſorte la baſe de toutes ces évaluations, comme l'unité eſt la baſe de tous les calculs des nombres. Il faut 2°, que cette meſure ſoit la plus ſimple de toutes ; il faut donc que ſa longueur & ſa largeur ſoient égales, & que chacune de ces dimenſions ſoit repréſentée par l'unité. Or la largeur ſe meſure en prenant la diſtance des extrémités paralleles, & la meſure de cette diſtance eſt la perpendiculaire qui les joint (372) ; donc *la meſure la plus naturelle des ſurfaces eſt un quarré plus ou moins grand, que l'on prend toujours pour l'unité de ſurface.*

Une ſurface d'un pouce de long ſur un pouce de large, par exemple, eſt la meſure commune des ſurfaces eſtimées en pouces quarrés. Ainſi on dit qu'il y a 144 pouces quarrés dans une ſurface d'un pied de long ſur un pied de large, & qu'il y en a 5184 dans une toiſe quarrée.

479. C'eſt parce que la meſure commune des ſurfaces doit toujours être un quarré, que l'on nomme *Quadrature* l'évaluation d'une ſurface. Ainſi le problême ſi connu de *la quadrature du cercle, conſiſte à trouver un quarré égal* en ſurface à un cercle donné, c'eſt-à-dire qui renferme préciſément autant d'eſpace que ce cercle.

En général, lorſqu'on ſe propoſe de meſurer une ſurface, il faut chercher combien de fois elle contient le quarré que l'on prend alors pour l'unité. Or cette recherche eſt aiſée dans toutes les figures rectilignes, comme on va le voir.

Commençons par le quarré ABCD, autre que celui 70.

FIG. qui lui doit ſervir de meſure & que nous repréſentetons par *abcd*. Il eſt certain que ſur la baſe AB on peut mettre autant de quarrés égaux au quarré *abcd*, que cette baſe contient de fois le côté *ab*, ou l'unité de longueur. Donc AB étant la ſomme de ces unités, ſi on exprime par *s* la ſurface du petit quarré, on aura AB × *s* pour celle de tous les petits quarrés qui peuvent être mis ſur AB, & qui forment le rectangle ABFE. Mais n'eſt-il pas évident que la ſurface du quarré total ABCD contient autant de fois celle de ce rectangle, que la ligne AD ou AB contient AE ou *ad*, unité de largeur? Donc ABCD, ou AC (car on déſigne ſouvent les quarrés & les rectangles par deux lettres diagonalement oppoſées $= AB^2 \times s$, & comme $s = 1$, on a $AC = AB^2$: c'eſt-à-dire que *pour avoir la ſurface d'un quarré, il faut multiplier l'unité de ſurface par le quarré du nombre des unités ſimples contenues dans un de ſes côtés*, & non par le quarré d'un de ſes côtés.

Remarquez en effet que cette derniere expreſſion n'eſt pas exacte, puiſqu'on ne multiplie jamais une ligne par une autre. Mais comme elle eſt uſitée, nous nous en ſervirons dans le ſens que nous venons d'indiquer.

71. 480. Cela poſé, cherchons la meſure de la ſurface d'un rectangle quelconque ABCD.

Si on décrit ſur ſon plus grand côté AB le quarré ABEF, ce quarré contiendra autant de rectangles égaux à ABCD, que AF contient de fois AD. Il en contiendra donc un nombre exprimé par $\frac{AF}{AD}$, ou $\frac{AB}{AD}$; & ſi on appelle x la ſurface du rectangle, on aura $AB^2 = \frac{AB}{AD} x$; d'où $x = AB \times AD$; c'eſt-à-dire que *la ſurface d'un rectangle quelconque eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur.*

Par exemple, ſi un rectangle a 7 pouces de long, ſur 3 pouces de large, ſa ſurface contient 21 pouces quarrés.

Ce que nous disons des pouces quarrés peut s'appliquer à toute autre mesure semblable. FIG.

481. Il suit de ce que nous venons de prouver, 1°, que la surface du triangle rectangle ACB est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la base. Car ce triangle est la moitié du rectangle ABCD. 71.

2°, Que *la surface d'un triangle quelconque* ABC *est égale au produit de l'un quelconque* AC *de ses côtés par la moitié de la perpendiculaire menée de l'angle opposé* B *sur cette base prolongée, s'il est nécessaire.* 72.

Car le triangle $ABD = \frac{1}{2}BD \times AD$, & le triangle $CDB = \frac{1}{2}BD \times DC$. Donc $CDB \pm ABD$, ou la surface du triangle $ABC = \frac{1}{2}BD\,(DC \pm AD) = \frac{1}{2}BD \times AC$.

482. Donc *la surface d'un parallélogramme quelconque* ABDE *est égale au produit de la base* AE *par la distance des côtés paralleles* AE, BD, $= AE \times BC$. Car si on mene la diagonale BE, le triangle ABE sera égal au triangle BED. Donc la surface du parallélogramme ABDE est double de celle du triangle AEB. 73.

483. Pour mesurer la surface d'un trapeze quelconque ABCD, soit menée la diagonale AC; on aura $ABC = \frac{AE \times BC}{2} = \frac{BC \times CF}{2}$, & $ACD = AD \times \frac{1}{2}CF$. Donc $ABC + ACD = ABCD = \frac{1}{2}CF \times (BC + AD)$; c'est-à-dire que *la surface d'un trapeze quelconque est égale au produit de la demi-somme de ses bases par la perpendiculaire qui en mesure la distance.* 74.

484. Il est également facile de mesurer la surface d'un polygone quelconque régulier; car si du centre de ce polygone on imagine des rayons menés à tous ses angles, ces rayons diviseront le polygone en autant de triangles égaux & semblables qu'il a de côtés. Or la surface de l'un quelconque de ces triangles est égale au produit de la moitié du côté du polygone par le rayon du cercle inscrit. Donc *la surface d'un polygone régulier quelconque est égale à la moitié du périmetre, multipliée par le rayon du cercle inscrit.*

FIG. 67. Donc la ſurface d'une portion BCG de polygone régulier, compriſe entre deux rayons CB, CG & les côtés BA & AG, eſt égale à la portion $\frac{BA+AG}{2}$ du périmetre, multipliée par le rayon du cercle inſcrit.

Donc *la ſurface d'un cercle quelconque eſt égale au produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon*, & par conſéquent la ſurface d'un ſecteur quelconque, eſt égale au produit de ſon rayon, par la moitié de l'arc qui le termine.

Pour avoir la ſurface ou la quadrature d'un cercle, il faudroit donc connoître le rapport du rayon à la circonférence. Mais on n'a pu le déterminer que par approximation; & on a trouvé que le diametre d'un cercle eſt à ſa circonférence, à peu-près comme 7 à 22, ou comme 113 à 355, ou plus exactement, comme 1 à 3, 141592653589793 2 avec cent onze autres décimales, ce qui fait une approximation preſque infinie. *Voyez* l'Hiſtoire des Recherches ſur la Quadrature du Cercle, & l'Hiſtoire des Mathématiques; Ouvrages de M. Montucla, généralement eſtimés.

485. Soit π le nombre 3, 14159 &c; on aura $1 : \pi$ pour le rapport du diametre à la circonférence. Soit r le rayon d'un cercle quelconque, on aura $1 : \pi :: 2r : 2r\pi$ pour la circonférence de ce cercle. Sa ſurface ſera donc πr^2.

486. Soit propoſé maintenant de meſurer la ſurface d'un polygone quelconque irrégulier.

On le diviſera d'abord en triangles; on prendra enſuite la ſurface de chacun de ces triangles, & la ſomme de ces ſurfaces ſera évidemment celle du polygone propoſé. Mais s'il s'agiſſoit de trouver un ſeul triangle égal en
75. ſurface à un polygone donné, (au pentagone ABCDE, par exemple), on meneroit la diagonale CE pour retrancher l'angle D; enſuite par le point D on meneroit DG parallele à cette diagonale, & qui rencontre en G le côté AE prolongé. Cela poſé, ſi on mene CG, le

quadrilatere A B C G ſera égal en ſurface au pentagone A B C D E, puiſque le triangle CKD = le triangle EKG; ce qui ſe prouve par l'égalité des triangles C G E, C D E, dont les baſes & les hauteurs ſont reſpectivement égales, de maniere qu'en retranchant le triangle commun C K E, il reſte C K D = E K G. FIG. 75.

Si on mene à préſent la diagonale C A, & B F parallele à cette diagonale, on prouvera de même que le triangle F C G eſt égal en ſurface au quadrilatere B C G A, & par conſéquent au pentagone propoſé qui ſe trouvera par ce moyen réduit en un triangle de même ſurface.

Par cette méthode, on peut réduire un polygone quelconque en un triangle de même ſurface, d'où il ſuit qu'*on peut trouver la quadrature exacte de toutes les figures rectilignes.*

De la comparaiſon des Surfaces.

487. Si B repréſente la baſe & H la hauteur d'un triangle quelconque, ſa ſurface ſera $S=\frac{1}{2}BH$: de même, ſi on nomme b & h la baſe & la hauteur d'un autre triangle dont la ſurface eſt s, on aura $s=\frac{1}{2}bh$. Donc $S:s::BH:bh$, d'où il ſuit . . . . . .

I°. Que les ſurfaces de deux triangles quelconques ſont entre-elles en raiſon compoſée de leurs baſes & de leurs hauteurs.

II°. Que deux triangles qui ont la même baſe ou des baſes égales ſont entre-eux comme leurs hauteurs. Car alors $B=b$. Donc $S:s::H:h$.

III. Que deux triangles qui ont des hauteurs égales ſont comme leurs baſes, puiſque H étant égal à h, on a $S:s::B:b$.

IV. Que deux triangles ſont égaux en ſurface, lorſque leurs baſes & leurs hauteurs ſont en raiſon inverſe. Car ſi $B:b::h:H$, on a $bh=BH$, & par conſéquent $S=s$.

V°. Que *les ſurfaces de deux triangles ſemblables ſont comme les quarrés de leurs dimenſions homologues.* Car dans

FIG. ce cas $B : b :: H : h$; d'ailleurs $S : s :: BH : bh$. Donc $S : s :: B^2 : b^2 :: H^2 : h^2$, comme le quarré d'une dimenſion priſe dans l'un eſt au quarré de la dimenſion homologue de l'autre.

488. De-là il ſuit 1°, que la ſurface du triangle équilatéral circonſcrit eſt quadruple de celle du triangle équilatéral inſcrit. Car le côté de l'un eſt double du côté de l'autre (427).

2°, Que le quarré circonſcrit eſt double du quarré inſcrit. Car en appellant a le rayon du cercle, leurs côtés ſont $2a$, $a\sqrt{2}$. Or le quarré de $2a$ eſt double de celui de $a\sqrt{2}$.

76. 489. Si deux triangles BAC, bac ont chacun un angle égal A, a; je dis que leurs ſurfaces ſeront comme les produits des côtés qui entourent l'angle égal dans chacun. Ainſi on aura $BAC : bac :: AB \times AC : ab \times ac$.

Car ſi on mene les perpendiculaires BD, bd ſur les côtés AC, ac, on aura $BAC : bac :: BD \times AC : bd \times ac :: AC : ac \times \frac{bd}{BD}$.

Or à cauſe des triangles ſemblables ABD, abd, on a $\frac{bd}{BD} = \frac{ab}{AD}$. Donc $BAC : bac :: AC : \frac{ac \times ab}{AB} : AC \times AB : ac \times ab$.

77. Pour faire quelque application de cette propriété, propoſons-nous de mener du point donné B la droite BF ſur le triangle ACD, de maniere qu'il ſoit diviſé en deux parties AEF, $EFDC$ dont les ſurfaces ſoient dans le rapport de m à n.

Puiſque $AEF : EFDC :: m : n$, donc $AEF + EFDC$, ou $ACD : AEF : m + n : m$. Or $ACD : AEF :: AC \times AD : AE \times AF$. Donc $m + n : m :: AC \times AD : AE \times AF$. Cela poſé, ſoit mené BI parallele à AC, & ſoient nommées les connues BI (a), AI (c), AC (b), AD (d), & l'inconnue AF (x); à cauſe des triangles ſemblables AEF, BIF, on aura $FI\,(x + c) : BI\,(a) :: AF\,(x) : AE = \frac{ax}{x+c}$. Donc $m + n : m :: bd : \frac{ax^2}{x+c}$. D'où l'on tire $xx - \frac{bdmx}{a(m+n)} = \frac{bcdm}{a(m+n)}$. Donc $x = \frac{bdm \pm \sqrt{(b^2 d^2 m^2 + 4abdmc(m+n))}}{2a(m+n)}$. De ces deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, il n'y a que la poſitive $x = \frac{bdm + \sqrt{\ \&c}}{2a(m+n)}$ qui ſoit propre à réſoudre la queſtion propoſée.

Pour ſavoir ce que l'autre ſignifie, il faut obſerver que ſi AC, AD (b, d) étoient toutes deux négatives, c'eſt-à-dire devenoient AC', AD', cela ne changeroit rien du tout à l'équation trouvée ci-deſſus; d'où il ſuit que cette équation doit donner auſſi la ſolution du cas

où il s'agiroit de mener du point B la droite BE'F' qui diviſe le triangle AD'C' en deux parties dont le rapport ſoit $\frac{m}{n}$. C'eſt donc AF' que ſignifie la valeur négative trouvée ci-deſſus. Or AF' eſt directement oppoſée à AF. On voit donc ſe confirmer ce que nous avons déja dit des quantités négatives (470). FIG. 77.

Si le point donné B étoit ſur le côté AC comme en E, on auroit alors AI $(c) = 0$, & $AF = \frac{bdm}{a(m+n)}$; & ſi ce point étoit en dedans du triangle ACD, on auroit, en faiſant a négatif dans la formule trouvée ci-deſſus, la ſolution de ce cas.

490. *Lorſque deux figures ſont ſemblables, leurs ſurfaces ſont toujours proportionelles aux quarrés de leurs dimenſions homologues.*

Car ſoient A & B les deux dimenſions dont le produit donne la ſurface S de la premiere figure, & a, b, les deux dimenſions homologues dont le produit donne la ſurface s de la ſeconde. On aura $S : s :: AB : ab$. Mais par la nature des figures ſemblables on a, $A : a :: B : b$; donc $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$. Donc les ſurfaces des figures ſemblables ſont comme les quarrés de leurs dimenſions homologues.

491. De-là il ſuit 1°, que *les ſurfaces des cercles ſont comme les quarrés de leurs rayons, comme les quarrés de leurs diametres, comme les quarrés de leurs circonférences, & en général comme les quarrés de leurs dimenſions homologues.*

2°, Qu'une figure quelconque ALMNC conſtruite ſur l'hypoténuſe AC d'un triangle rectangle eſt égale à la ſomme des deux figures ſemblables ADFGB, BHIKC conſtruites ſur les deux autres cotés. 78.

Car $ALMNC : ADFGB : BHIKC :: AC^2 : AB^2 : BC^2$. Donc $ALMNC : ADFGB + BHIKC :: AC^2 : AB^2 + BC^2$. Or $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc $ALMNC = ADFGB + BHIKC$.

Donc ſi ſur l'hypoténuſe AB on décrit un demi-cercle ACB, il ſera égal en ſurface à la ſomme des demi-cercles ACD, CFB conſtruits ſur les deux autres côtés AC, CB. 79.

On aura donc $AECGB = ADC + CFB$, & en retranchant les parties communes $AECA + CGBC$, reſteront

FIG. les espaces curvilignes ADCEA + CFBGC égaux en surface au triangle ABC. Si AC étoit = CB, chaque espace seroit égal au triangle AGK, ou KCB. On nomme ces espaces *les Lunules d'Hyppocrate*, parce qu'un ancien Géomètre de ce nom, en trouva la quadrature.

492. Nous allons terminer cette matiere par la résolution de quelques problêmes.

I. *Etant données les deux figures semblables* ADFGB, BHIKC, *trouver une troisieme figure* ALMNC *égale à leur somme, & qui leur soit en même temps semblable.*

78. On disposera à angles droits les deux côtés homologues AB, BC, & AC sera le côté homologue du polygone demandé. Il sera donc facile de le décrire.

Donc pour trouver un cercle égal à la somme de deux autres cercles, il faut disposer les diametres ou les rayons de ceux-ci à angles droits, l'hypoténuse AC sera le diametre ou le rayon du cercle demandé.

II. *Trouver une figure* ADFGB *semblable à deux autres figures* ALMNC, BHIKC, *& qui soit égale à leur différence.*

De l'un quelconque AC des côtés de la plus grande figure comme diametre, on décrira un demi-cercle dans lequel on inscrira la corde BC égale au côté homologue à AC dans la seconde figure. Cela posé, je dis que AB sera le côté homologue du polygone demandé. Car $AB^2 = AC^2 - BC^2$. Il est donc facile de décrire un cercle égal à la différence de deux autres cercles donnés.

III. *Trouver une seule figure égale à la somme ou à la différence de tant de figures semblables qu'on voudra, & qui leur soit en même temps semblable.*

Soient A, B, D, &c les côtés homologues des figures qu'il faut ajouter; soient a, b, d, &c les côtés homologues des figures à soustraire; soit enfin x le côté homologue du polygone demandé, on aura $x^2 = A^2 + B^2 + D^2 + \&c \ldots - a^2 - b^2 - d^2 \ldots$ &c. quantité facile à construire (464). On peut donc trouver un seul cercle égal à la somme ou à la différence de tant de cercles qu'on voudra.

IV. *Trouver une figure semblable à une autre figure donnée & qui soit avec elle dans le rapport de* m *à* n.

Je nomme a un côté quelconque de la figure donnée, & x le côté homologue dans la figure cherchée. J'ai donc $a^2 : x^2 :: m : n$. D'où x

$= \sqrt{(\frac{n}{m}a^2)} = a\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn}$, quantité facile à construire. 71.

On peut donc trouver deux cercles qui soient entre eux :: $m : n$, quel que soit ce rapport, fût-il même incommensurable.

V. *Trouver la surface & les côtés d'un rectangle* ABCD *dont on ne connoît que le périmetre* (p), *& la diagonale* AC (a).

Soit $AB = x$, $AD = y$, on aura $x + y = \frac{1}{2}p$, & $x^2 + y^2 = a^2$. La premiere équation donne $xx + 2xy + yy = \frac{1}{4}pp$. D'où xy, ou la surface cherchée $= \frac{1}{8}pp - \frac{1}{2}a^2$, & $x = AB = \frac{1}{4}p + \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}p^2)}$, $y = AD = \frac{1}{4}p - \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}pp)}$.

VI. *Trouver la surface d'un triangle dont on ne connoît que les trois côtés.* 80.

Soit $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, la perpendiculaire $BD = x$, on aura $AD = \sqrt{(bb - xx)}$.... $DC = \sqrt{(cc - xx)}$. Donc $AD + DC = a = \sqrt{(bb - xx)} + \sqrt{(cc - xx)}$. D'où l'on tire $x = \frac{1}{2a}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}$ Donc $\frac{ax}{2}$, ou la surface demandée $(s) = \frac{1}{4}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{[(b^2 - a^2)a^2 + (2c^2 - b^2)b^2 + (2a^2 - c^2)c^2]} = \ldots \frac{1}{4}\sqrt{[(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))]} = \ldots \frac{1}{4}\sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)} = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}\sqrt{[(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)(a + b + c)]}$. Soit q la demi-somme des trois côtés, ou $q = \frac{a + b + c}{2}$, on aura $2q - 2a = b + c - a$, $2q - 2b = a + c - b$, $2q - 2c = a + b - c$. Donc la surface $s = \sqrt{(q \cdot q - a \cdot q - b \cdot q - c)}$.

Si CN est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC, en menant C'B, C'A, C'C & les perpendiculaires C'M, C'P, on aura le triangle $ABC' = C'N \times \frac{1}{2}AB$, $BC'C = \frac{1}{2}C'P \times BC = \frac{1}{2}C'N \times BC$, $AC'C = \frac{1}{2}CN \times AC$; donc la surface s du triangle $ABC = C'N \times \frac{1}{2}(a + b + c)$. Donc le rayon $C'N = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}}{a + b + c}$

$\sqrt{\left(\frac{q - a \cdot q - b \cdot q - c}{q}\right)}$.

Si le triangle ABC est rectangle en A ; on a $cc = a^2 + b^2$, & $C'N = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ab(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)}{(a + b + c)(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = q - c$. 81.

VII. *Etant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle, & le rapport de ses deux autres côtés, trouver sa surface.*

Soit $AC = a$; $BC : AB :: m : n$; $AB = x$, BC sera $\frac{mx}{n}$, & on aura $x^2 + \frac{mm}{n^2}x^2 = a^2$. D'où $x = \frac{a^2n^2}{m^2 + n^2}$, & $\frac{mx^2}{n}$, ou la sur-

Transposant l'un des radicaux dans le membre où il se trouve, en quarrant l'équation qui en résulte, $\frac{c^2 - x^2}{-2a} = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ ou $\frac{b^2 - x^2}{2a\sqrt{b^2 - x^2}} = a^2 - b^2 - a^2$, élevant au quarré on trouve $4a^2(b^2 - x^2) = (a^2 - b^2 - c^2)^2$ ou $4a^2x^2 = 4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - c^2)$ ou enfin $x = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - c^2)}$

FIG. face cherchée $= \frac{a^2 nm}{m^2+n^2}$. On a auſſi $AB = \sqrt{\frac{an}{(m^2+n^2)}}$, & $BC = \sqrt{\frac{am}{(m^2+n^2)}}$.

VIII. *Etant donnés le rapport des trois côtés d'un triangle quelconque, & leur ſomme, trouver la ſurface de ce triangle.*

80. Soit $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, le périmetre $= p = x+y+z$, le rapport des trois côtés $x : y : z :: a : b : c$. Donc $x+y+z$ ou $p : a+b+c :: x : a :: y : b :: z : c$; d'où l'on tire $\ldots x = \frac{ap}{a+b+c} \ldots y = \frac{bp}{a+b+c} \ldots y = \frac{cp}{a+b+c}$. Or les trois côtés étant connus, on a la ſurface.

IX. *Le périmetre d'un triangle rectangle étant donné, avec le rapport de l'hypoténuſe à la ſomme des deux autres côtés, déterminer la ſurface de ce triangle.*

81. Soit p le périmetre donné; $AC : AB + BC :: m : n$; $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$; on aura $x : y+z :: m : n$. Donc $x+y+z$, ou $p : x :: m+n : m$. Donc $x = \frac{mp}{m+n} \ldots y+z = \frac{np}{m+n} \ldots y^2 + 2yz + z^2 = \frac{n^2 p^2}{(m+n)^2}$; or $y^2 + z^2 = x^2 = \frac{m^2 p^2}{(m+n)^2}$. Donc la ſurface cherchée $\frac{1}{2} yz = \frac{1}{4} pp \left(\frac{n-m}{m+n} \right)$. Si on veut avoir les côtés du triangle, on trouvera que le plus petit $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n} \left(n - \sqrt{2m^2 - n^2} \right)$, & le plus grand $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n} \left(n + \sqrt{2m^2 - n^2} \right)$.

Des Surfaces planes.

ON appelle Surface plane celle dont tous les points ſont exactement de niveau. Telle ſeroit la ſurface d'un miroir parfaitement poli, s'il exiſtoit un miroir de cette eſpece.

493. Le plan eſt donc parmi les ſurfaces ce que la droite eſt parmi les lignes. Mais pour nous en former une idée plus diſtincte, concevons un triangle rectangle A B F, qui tourne autour de la perpendiculaire immobile A B : il
82. eſt clair que ſi dans ſa révolution la ligne B F laiſſe des traces

traces de ſon paſſage ; elles ſeront toutes dans un plan circulaire, pendant que les traces de l'oblique A F couvriront une ſurface convexe. FIG. 82.

494. Il réſulte de là, 1° ; que ſi une droite quelconque a deux points communs avec un plan, tous les autres points de cette droite doivent être dans le même plan ; & que par conſéquent ſi on prolonge tout à la fois ce plan & cette droite, ils reſteront toujours confondus.

495. 2°, Qu'une droite A B perpendiculaire à un plan eſt néceſſairement perpendiculaire à toutes les droites F B, G B, D B, N B, H B, L B qui étant dans le même plan paſſent par l'extrémité B de cette droite.

On ne peut donc mener d'un point donné A hors d'un plan, qu'une ſeule perpendiculaire A B ſur ce plan. Car ſi on en pouvoit mener une autre comme A F, l'angle A F B ſeroit droit ainſi que l'angle F B A ; on pourroit donc mener du même point A deux perpendiculaires ſur la même ligne F B, ce qui eſt impoſſible. On prouveroit de même que d'un point donné B dans un plan on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire à ce plan.

3°, Que la diſtance d'un point à un plan ſe meſure par la perpendiculaire menée de ce point ſur le plan.

4°, Que deux droites A B, M N perpendiculaires à un même plan ſont parallelés entre elles. Car alors les angles A B C, M N C ſont tous deux droits. On voit même que ſi ces droites étoient également inclinées & dans le même ſens ſur le plan P Q, elles ſeroient encore paralleles, puiſque les angles A B C, M N C ſeroient égaux.

496. Lorſque deux plans ſe coupent, il eſt clair que leur interſection n'a qu'une ſeule dimenſion qui eſt la longueur, puiſque les plans ſont cenſés n'avoir aucune épaiſſeur. Il eſt clair auſſi que leur interſection eſt toujours une ligne droite.

497. Il eſt donc évident que *trois points, non en ligne droite, déterminent la poſition d'un plan.*

On voit bien, en effet, qu'une infinité de plans paſ-

FIG. férents, comme HD, CG, peuvent avoir les deux points A & B communs entre eux; mais on voit en même temps qu'il n'y a qu'un seul de ces plans qui passant par les points A & B, puisse passer par le point déterminé C. Donc les trois points A, B, C déterminent la position du plan CG.

Donc 1°, trois points ne peuvent être communs à deux plans différents, si ces points ne sont pas en ligne droite.

498. 2°, Deux droites CA & AD qui se coupent, sont dans un même plan PQ. Car les trois points C, A, D déterminent la position des deux droites CA, AD. D'où il suit qu'un angle quelconque CAD détermine la position d'un plan.

82. 499. 3°, Si une droite AB est perpendiculaire à deux droites FB, GB dans leur point d'intersection B, elle sera perpendiculaire à leur plan PQ.

Car si on conçoit que FB tourne autour de la ligne immobile AB, elle décrira dans ce mouvement un plan perpendiculaire à AB. Or il est clair que ce plan est celui des deux droites FB, GB, puisque GB est perpendiculaire à AB.

83. 500. Supposons maintenant que deux plans DH & CG se coupent dans la ligne AB, & menons AC dans le plan CG, perpendiculaire à AB, & AD perpendiculaire à AB dans le plan DH; alors l'angle CAD sera la mesure de l'inclinaison des deux plans DH, CG. D'où l'on voit que les inclinaisons des plans les uns à l'égard des autres se mesurent comme celles des lignes droites; enforte que . . . . . .

1°, Un plan qui rencontre un autre plan fait avec lui deux angles dont la somme est de 180°.

2°, Dans l'intersection de deux plans les angles opposés au sommet sont égaux.

3°, Si un nombre quelconque de plans se coupent sur une même ligne, la somme de tous les angles qu'ils feront deux à deux, tant en-dessus qu'en-dessous de leur commune intersection, sera de 360°.

V

4°, Un plan qui coupe deux ou plusieurs plans paral- FIG.
leles fait avec eux des angles correspondants égaux, &c. &c.

501. Si un plan coupe deux ou plusieurs plans paralleles, les lignes droites qui naîtront de leurs intersections seront toutes paralleles. Car si elles ne l'étoient pas, elles se rencontreroient en les prolongeant. Les plans dans lesquels elles sont, se rencontreroient donc aussi. Ils ne seroient donc pas paralleles.

502. Si le plan CG est perpendiculaire au plan PQ, 83.
& si l'on mene d'un point quelconque B du plan CG la perpendiculaire BA sur la commune intersection CF, je dis que BA sera perpendiculaire au plan PQ.

Car si dans le plan PQ on mene DA perpendiculaire à CA, l'angle BAD sera droit à cause des plans perpendiculaires. Donc BA sera perpendiculaire aux deux droites CA & AD, & par conséquent (499) à leur plan PQ.

503. *Si deux plans* DH, CG *sont perpendiculaires à un troisieme plan* PQ, *leur intersection* BA *sera aussi perpendiculaire à ce troisieme plan.* Car BA est alors perpendiculaire aux deux droites CA, AD. Donc elle est perpendiculaire à leur plan PQ.

Des Lignes droites coupées par des Plans paralleles.

504. Si d'un même point A on mene à travers deux 84.
plans paralleles PQ, *pq* tant de droites que l'on voudra, A*d*D, A*f*F, &c, 1°, toutes ces droites seront coupées proportionellement; 2°, les figures DFGEH, *dfgeh* seront semblables.

Car si on fait passer un plan par les trois points A, D, F, ses intersections avec les plans paralleles PQ, *pq* seront (501) les droites paralleles DF, *df*. Donc les triangles ADF, A*df* seront semblables. On prouvera la même chose des triangles AFG & A*fg*, AEG & A*eg*, &c; d'où il suit que AD : A*d* :: DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: AG : A*g*, &c :: les perpendiculaires AB & A*b* menées du

même point A sur les deux plans q. Donc 1°, toutes les droites AD, AF, AG, &c sont coupées proportionellement par les plans PQ, pq.

2°, Puisque DF : df :: AF : Af :: FG : fg, &c, on a DF : df :: FG : fg :: EG : eg, &c : or si on mene DG, dg, on prouvera comme ci-dessus que les triangles ADG, Adg sont semblables. Donc AD : Ad :: DG : dg :: DF : df :: FG : fg ; les triangles DFG, dfg ont donc tous leurs côtés homologues proportionels, & sont par conséquent semblables. D'où il suit que les angles F, f sont égaux. On prouvera la même chose des angles G & g, E & e, &c. Donc tous les angles de la figure DFGEH sont respectivement égaux à ceux de la figure $dfgeh$. D'ailleurs tous leurs côtés homologues sont proportionels. Donc elles sont semblables.

505. De ce que l'angle F est égal à l'angle f, il suit que si deux angles DFG, dfg ont leurs côtés respectivement paralleles, ils seront égaux quoique situés dans différents plans, ce que nous avons déja démontré pour le cas où ces angles sont dans le même plan.

Si les lignes AdD, AfF, &c au lieu de partir d'un même point A étoient paralleles, il est clair que toutes les lignes dD, fF, gG, &c seroient égales entre elles, & les figures DFGEH, $dfgeh$ seroient égales & semblables.

De ce que les figures DFGEH, $dfgeh$ sont semblables, il suit que leurs surfaces sont entre elles :: DF^2 : df^2 :: AD^2 : Ad^2 :: le quarré BA^2 de la distance du point A au plan PQ est au quarré bA^2 de la distance du même point A au plan pq. Or le rapport de AB^2 à Ab^2 est constant pour un même point A. Donc quel que soit le nombre des droites AD, AF, &c, les surfaces des figures DFGEH, $dfgeh$ seront entre elles dans le rapport constant de AB^2 à Ab^2, & leurs périmetres seront aussi dans la raison constante de AB à Ab.

S'il y avoit un plus grand nombre de plans paralleles, ils auroient tous les mêmes propriétés.

FIG.

TROISIEME PARTIE

DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

506. On appelle *Solide* tout ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue. Or pour former un solide, on peut supposer que plusieurs plans soient tellement unis par leurs angles, qu'ils enferment de tout côté un certain espace; alors on aura un *Polyedre* dont les *faces* seront les plans qui concourent à le former, & dont les *angles solides* résulteront du concours des angles plans.

Si le polyedre n'a que quatre faces planes, on le nomme *Tetraedre*. S'il en a six, c'est un *Hexaedre*, &c; &c. Lorsque tous les angles d'un polyedre sont égaux, & que toutes ses faces sont des plans égaux & semblables, ce polyedre est régulier.

507. On mesure les angles solides en prenant la somme des angles plans qui les forment. L'angle solide B, par exemple, a pour mesure la somme des degrés des angles plans, ABC, CBD, DBE, EBA. 85.

Or il est aisé de voir qu'il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, & que la somme de deux quelconques de ces angles est toujours plus grande que le troisieme.

508. D'où il suit qu'*un angle solide est moindre que* 360°. Car soit la *pyramide quadrangulaire* BACDE, dont les faces sont les quatre triangles ABE, EBD, &c, & dont la base est le quadrilatere ACDE. Il est clair que les deux angles AEB + DEB sont plus grands que l'angle AED avec lequel ils forment l'angle solide E; donc leur supplément est moindre que celui de l'angle AED. Par la même raison, le supplément des deux angles EAB + CAB est moindre que celui de l'angle CAE, & ainsi de suite. Donc la somme des suppléments des

huit angles inférieurs des faces de la pyramide, laquelle ſomme eſt l'angle ſolide B, eſt moindre que la ſomme des ſuppléments des quatre angles de la baſe, qui eſt de 360°. L'angle ſolide eſt donc moindre que 360°.

509. Et par conſéquent, *il ne peut y avoir que cinq Polyedres réguliers, ſavoir, trois dont les faces ſoient des triangles équilatéraux; un dont les faces ſoient des quarrés, & un dont les faces ſoient des Pentagones réguliers.*

Car puiſqu'il faut au moins trois angles pour former un angle ſolide, & qu'un angle ſolide ne peut être de 360 degrés, il eſt clair qu'il n'y a que cinq cas où on puiſſe faire un angle ſolide avec des plans de Polygones réguliers. 1°, L'angle d'un triangle équilatéral étant de 60 degrés, trois de ces angles font un angle ſolide de 180 degrés; & par conſéquent quatre triangles de cette eſpece peuvent faire un *Tétraedre*. 2°, Quatre triangles équilatéraux joints enſemble, peuvent faire un angle ſolide de 240 degrés, & former un corps régulier à huit faces, appellé *Octaedre*. 3°, Cinq de ces triangles joints enſemble peuvent former un angle de 300°, & par conſéquent on en peut compoſer un corps régulier à 20 faces, appellé *Icoſaedre*; mais ſix triangles équilatéraux joints enſemble feroient 360°. 4°, Chaque angle d'un quarré valant 90°, trois de ces angles feront un angle ſolide de 270, & par conſéquent on en pourra compoſer un corps régulier à ſix faces, appellé *Hexaedre*; mais quatre de ces angles feroient 360°, ce qui ne peut faire un angle ſolide. 5°. Chaque angle du Pentagone régulier valant 108°, trois de ces angles joints enſemble pourront faire un angle ſolide de 324°; & on en pourra faire un corps régulier à douze faces, appellé *Dodécaedre*; mais ſi on joignoit quatre de ces angles, on auroit 432°, angle ſolide impoſſible. Enfin l'angle de l'hexagone régulier étant de 120°, ſi on en ajoute trois enſemble, la ſomme 360° montre qu'on ne peut faire d'angles ſolides, ni par conſéquent de corps régulier avec des hexagones, & à plus forte raiſon n'en pourra-t-on pas faire avec des *Heptagones*, des *Octogones*, &c; donc il ne peut y avoir que cinq corps réguliers.

510. Comme il faut au moins trois angles plans pour former un angle ſolide, & qu'alors même ces angles laiſſent un vuide à la baſe, il faut un autre plan pour le fermer. C'eſt pourquoi de tous les polyedres, le plus ſimple eſt la pyramide triangulaire, ou le tétraedre.

Si au lieu d'un triangle ou d'un quadrilatere, on ſuppoſe que la baſe d'une pyramide eſt un polygone d'un plus grand nombre de côtés, les faces de cette pyramide ſe multiplieront dans le même rapport, juſqu'à ce que la

baſe étant devenue un cercle, la pyramide alors devienne un *Cône*. FIG.

Si la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe paſſe par le centre de cette baſe, la pyramide eſt *droite*. Il en eſt de même pour le cône: on l'appelle *droit* ou *oblique*, ſelon que la perpendiculaire, menée de ſon ſommet paſſe ou ne paſſe point par le centre de ſa baſe. 86.

511. Autre maniere de concevoir la formation des ſolides. Si la baſe ADHC monte parallelement à elle-même le long de GD ou AB, la ſomme de tous les éléments égaux à cette baſe forme un ſolide que l'on appelle *Priſme*. Il eſt droit ou oblique, ſuivant que DG eſt perpendiculaire ou incliné ſur la baſe. 87.

Le priſme eſt donc un ſolide terminé par des baſes égales & paralleles, & par des faces qui ſont des parallélogrammes. Sa groſſeur eſt donc uniforme. On l'appelle priſme triangulaire, lorſque le polygone générateur eſt un triangle; priſme quadrangulaire, lorſqu'il a pour baſe un quadrilatere: & ſi ce quadrilatere eſt un parallélogramme, le priſme alors ſe nomme *Parallelepipede*. 91.

Ce ſera un parallelepipede rectangle, toutes les fois que la baſe ſera un rectangle, & que de plus la ligne le long de laquelle ſe fait le mouvement ſera perpendiculaire à cette baſe. 87.

Si la baſe étoit un quarré, dont le côté fût égal à la ligne de hauteur, le priſme engendré par ſon mouvement ſeroit un hexaedre régulier, que l'on appelle auſſi *cube*. Le cube eſt donc un priſme à ſix faces toutes égales & toutes quarrées. Un dez à jouer, par exemple, eſt un cube. 96.

Lorſque le polygone générateur eſt un cercle, le priſme devient rond, & on l'appelle *cylindre*. Il eſt droit ou oblique ſelon la poſition de la ligne de mouvement ou de ſes côtés par rapport à la baſe.

512. Troiſieme maniere de former des ſolides. Si autour d'une ligne immobile C A, on fait tourner une figure 90.

FIG. quelconque AFBC, elle engendrera un ſolide, appellé *ſolide de révolution.* Son *axe* eſt la ligne immobile CA.

Il ſuit de cette deſcription qu'un point quelconque B de cette figure trace dans ſon mouvement la circonférence d'un cercle dont le rayon BP eſt perpendiculaire à l'axe, & dont le centre eſt P : ce qui fait voir que *toutes les ſections faites dans un ſolide de révolution par des plans perpendiculaires à ſon axe ſont des cercles.*

88. Si le polygone générateur eſt un rectangle, il engendrera un cylindre droit. Si ce n'eſt qu'un triangle rec-
86. tangle, le ſolide de révolution ſera un cône droit. Si c'eſt la moitié d'un polygone d'un grand nombre de côtés, elle produira un *ſphéroïde.* Enfin le ſolide de révolution ſera une *ſphere*, ſi le demi-polygone qui l'engendre eſt un demi cercle.

513. *La Sphere eſt donc un ſolide tel que tous les points de ſa ſurface ſont également éloignés d'un point en dedans que l'on nomme centre.* D'où il ſuit que toute ligne droite qui paſſe par ſon centre, & qui eſt terminée de part & d'autre à ſa ſurface, eſt égale à ſon axe.

On peut donc prendre pour axe de la ſphere toute droite qui paſſe par ſon centre, & qui aboutit des deux côtés à ſa ſurface. Donc toutes les ſections faites dans une ſphere par des plans qui paſſent par ſon centre, ſont des cercles égaux.

514. En général, ſi on coupe une ſphere par un plan quelconque, la ſection ſera toujours un cercle. Car ſi du centre de la ſphere on mene un diametre perpendiculaire au plan coupant, on pourra regarder ce diametre comme l'axe, autour duquel la ſphere a été engendrée. Or dans ce cas la ſection eſt un cercle (512).

On appelle *grands cercles* d'une ſphere tous ceux dont les plans paſſent par ſon centre. On appelle *petits cercles* ceux dont les plans paſſent au-deſſus ou au-deſſous du centre, & il eſt évident que plus ces cercles en ſont éloignés, plus ils ſont petits.

FIG.

De la mesure des Surfaces des Solides.

515. Nous appellerons *surface latérale*, ou simplement surface d'un solide celle de ses faces, sans y comprendre celle des bases, & nous appellerons *surface totale* d'un solide celle de ses bases & de ses faces.

Un polyedre étant terminé par des faces planes, il est aisé d'en avoir la surface. C'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

516. La surface d'un prisme quelconque est égale à la longueur BC multipliée par le contour GIH de la section faite dans ce prisme par un plan perpendiculaire à BC. 91.

Car la surface du parallélogramme BCED = DE × GI = BC × GI... La surface du parallélogramme ABCF = BC × IH; enfin celle du parallélogramme AFDE = AF × GH = BC × GH. Donc la somme de tous ces parallélogrammes, ou la surface du prisme = BC × GIH.

517. De-là il suit que *la surface d'un prisme droit, & par conséquent celle d'un cylindre droit, est égale au produit du contour de sa base par sa hauteur*, ou par la distance de ses bases parallèles.

La surface du cylindre oblique ABCD est donc aussi égale à sa longueur AB multipliée par le contour GMIMG de la section faite par un plan perpendiculaire à AB. 89.

Or il est aisé de s'assurer que cette section est une ellipse; en effet par un point quelconque P de l'axe GI, faisons passer un plan parallele à la base du cylindre, son intersection avec la surface courbe sera un cercle, & son intersection avec le plan GMI sera la droite MPM perpendiculaire à l'axe GI. Cela posé, soit GP = x, PM = y, LP = z, GI = a, LK = BC = AD = b. On aura par la propriété du cercle, $yy = bz - zz$, & à cause des triangles semblables LPG, PKI, $z = \frac{bx}{a}$. Donc $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ équation à l'ellipse, dont le grand axe est b & dont le petit axe est a. *Voyez* les Sections coniques.

518. La surface d'une pyramide réguliere est égale à la moitié du périmetre du polygone qui lui sert de base, multipliée par la perpendiculaire menée de son sommet sur

l'un quelconque des côtés de la baſe, & que l'on nomme *Apothême*. Cela eſt trop évident pour avoir beſoin de démonſtration.

Il ſuit de là que la ſurface du cône droit eſt égale au produit de la demi-circonférence de ſa baſe par ſon apothême ou par la diſtance de ſon ſommet à l'un quelconque des points de ſa baſe.

92. 519. Suppoſons le cône droit ABC coupé par un plan DE parallele à ſa baſe AC, & propoſons-nous de meſurer la ſurface du *cône tronqué* ACED.

Soit $AC = a$, $DE = b$, EC reſte de l'apothême $BC = d$; $BE = x$, on aura $x + d : a :: x : b$; d'où $x = \frac{bd}{a-b}$. Soit exprimé par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, on aura $b\pi$ & $a\pi$, pour les circonférences des baſes DE & AC. Donc $BC \times \frac{a\pi}{2}$ & $BE \times \frac{b\pi}{2}$ feront les ſurfaces des cônes droits ABC, BDE; & par conſéquent leur différence, ou la ſurface du cône tronqué $= (x+d)\frac{a\pi}{2} - x \times \frac{b\pi}{2} = d \times \frac{\pi}{2}(a+b)$. Or $\frac{\pi}{2}(a+b)$ eſt la circonférence du cercle qui tient le milieu entre les baſes DE & AC. Donc *la ſurface du cône tronqué eſt égale au produit de ce qui reſte de l'apothême, par la circonférence moyenne proportionelle arithmétique entre celles des baſes ſupérieure & inférieure.*

93. 520. Imaginons maintenant que le demi-polygone régulier SAN tourne autour de l'axe SN qui paſſe par ſon centre C, & cherchons la ſurface du ſphéroïde que ce demi-polygone engendre par ſa révolution.

Il faut d'abord obſerver qu'il y a deux côtés dans ce polygone qui décrivent des cônes : ce ſont les côtés BS & IN. Le ſeul côté AE décrit un cylindre : tous les autres, comme BA & IE décrivent des cônes tronqués. Or il ſuit de ce qui précede que la ſurface de l'un quelconque de ces cônes tronqués eſt égale au produit du côté générateur

(AB, par exemple), par la circonférence du cercle que décrit le milieu M de ce côté. FIG. 93.

Cela posé, soit CM le rayon du cercle inscrit dans le polygone donné, & soient menées les perpendiculaires BQ, MP, AR, sur l'axe SN, & soit mené BD parallelement à QR; les triangles rectangles ABD, CPM sont semblables, puisqu'ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires. Donc AB : BD ou QR :: CM : PM :: la circonférence qui a pour rayon CM : est à la circonférence qui a pour rayon PM :: *circ* CM : *circ* PM. Donc AB × *circ* PM, ou la surface du cône tronqué décrit par AB = QR × *circ* CM.

Par un raisonnement semblable, appliqué aux solides décrits par les autres côtés du polygone, on prouve que la surface du sphéroïde est égale à (SQ + QR + RK + KL + LN) ou SN × *circ* CM. Donc *la surface d'un sphéroïde quelconque est égale au produit de son axe par la circonférence du cercle auquel il est circonscrit.*

Or la sphere peut être regardée comme un sphéroïde d'une infinité de côtés. Donc *la surface de la sphere est égale au produit de son axe par la circonférence de l'un quelconque de ses grands cercles.*

Et la surface d'une calotte sphérique *produite par la révolution du demi-segment* BCP *est égale à l'épaisseur* CP *de cette calotte, multipliée par la circonférence de l'un des grands cercles de la sphere.* 90.

521. Donc 1°, la surface de la sphere est quadruple de celle de l'un quelconque de ses grands cercles, puisqu'un grand cercle n'a pour surface que la moitié de l'axe multipliée par la demi-circonférence.

2°, La surface de la sphere est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit, puisqu'elles ont toutes deux pour mesure le produit de l'axe EK ou FA, par la circonférence d'un des grands cercles de la sphere, ou par la circonférence qui a pour diamètre AB. 94.

3°, La surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit : : 2 : 3. Car les deux bases du cylin-

FIG. dre ſont chacune égales à un grand cercle de la ſphere. Donc la ſurface de la ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit :: 1 : $\frac{1}{2}$ :: 2 : 3.

94. 522. Si on conçoit un *cône équilatéral* DIL circonſcrit à la ſphere, ſa ſurface totale ſera à celle de la ſphere :: 9 : 4.

Car ſoit S la ſurface d'un des grands cercles de la ſphere, & a ſon diamètre, on aura $IL = a\sqrt{3}$, & $AB^2 \cdot (a^2) : IL^2 \cdot (3a^2) :: S : 3S$. Or la ſurface du cône équilatéral eſt triple de celle de ſa baſe, puiſqu'elle eſt égale à $\frac{ID}{2} \times circ\ IL + \frac{IL}{4} \times circ\ IL = 3 \times \frac{1}{4} IL\ circ\ IL$. Cette ſurface eſt donc égale à 9 S. D'ailleurs la ſurface de la ſphere eſt 4 S. Donc &c.

Les ſurfaces totales de la ſphere, du cylindre circonſcrit, & du cône équilatéral circonſcrit, ſont donc :: 4 : 6 : 9. D'où il ſuit que la ſurface du cylindre circonſcrit eſt moyenne proportionelle entre celle de la ſphere & celle du cône équilatéral circonſcrit; on trouveroit de la même maniere que la ſurface de la ſphere eſt à celle du cylindre inſcrit, eſt à celle du cône équilatéral inſcrit :: 16 : 12 : 9. Donc la ſurface totale du cylindre inſcrit eſt auſſi moyenne proportionelle entre celle de la ſphere & celle du cône équilatéral inſcrit.

523. La comparaiſon des ſurfaces de deux ſolides quelconques eſt fort aiſée. Car appellant S & s ces ſurfaces, A & B les facteurs de la premiere, a & b les facteurs de la ſeconde, on aura toujours S : s :: AB : ab.

D'où il ſuit 1°, que ſi A = a, on aura S : s :: B : b. 2°, que ſi A : a :: b : B, on aura S = s. 3°, que ſi A : a :: B : b, on aura S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2. Ce dernier cas a lieu dans les ſolides *ſemblables*. On appelle ainſi ceux dont les dimenſions homologues ſont proportionelles. Les ſpheres, par exemple, ſont des ſolides ſemblables. Ainſi leurs ſurfaces ſont entre elles, comme les quarrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou des circonférences de leurs grands cercles, & en général, comme les quarrés de leurs dimenſions homologues.

De la meſure des Solides.

524. LA ſolidité d'un corps eſt la portion d'étendue compriſe entre ſes faces. Ainſi deux cylindres de même

groſſeur & de même hauteur ont une même ſolidité, de quelque matiere qu'on les ſuppoſe, l'un de plomb maſſif, par exemple, l'autre de liége. Il ne faut donc pas confondre le *poids* d'un corps avec ſa ſolidité. FIG.

525. On ſait 1°, que pour meſurer la longueur des lignes, on ſe ſert d'une meſure que l'on regarde comme l'unité, & que cette meſure eſt elle-même une ligne droite. 2°, Que pour meſurer les ſurfaces, on a recours auſſi à la plus ſimple d'entre elles, qui eſt le quarré, auquel on rapporte toutes les autres comme à leur unité. Donc pour meſurer les ſolidités, il n'y a qu'à voir quel eſt le ſolide le plus ſimple, afin de le prendre pour l'unité commune à tous.

Or le plus ſimple des ſolides eſt celui dont les trois dimenſions ſont égales, & dont chacune eſt égale à l'unité. C'eſt donc le cube qui eſt la meſure la plus naturelle des ſolidités. Auſſi dit-on indifféremment la *cubature* ou la ſolidité d'un corps.

La recherche de la ſolidité d'un corps ſe réduit donc à trouver le nombre de fois qu'un cube d'une grandeur déterminée, que l'on prend alors pour l'unité de ſolidité, eſt contenu dans ce corps. Si l'on veut, par exemple, eſtimer un ſolide en pieds cubes, on imaginera un autre ſolide plus petit, dont la longueur, la largeur, & l'épaiſſeur ſoient chacune d'un pied; ce ſera un pied cube, ou l'unité à laquelle il n'y aura plus qu'à rapporter le ſolide propoſé, pour ſavoir combien de fois il la contient.

526. Cela poſé, cherchons la ſolidité d'un cube autre que celui que l'on prend pour l'unité. 95. & 96.

Je ſuppoſe que le cube à meſurer ſoit ABCDF, & que celui que l'on veut prendre pour ſa meſure ſoit *abcdf*; il eſt clair 1°, que l'on pourra mettre ſur la baſe ABGD un nombre de ces petits cubes exprimé par $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB^2}{ab^2}$; 2°, qu'il y aura dans le grand cube autant de tranches compoſées d'un nombre $\frac{AB^2}{ab^2}$ de petits

FIG. cubes, qu'on pourra en mettre sur la hauteur AE; 3°, que le nombre de ces tranches sera $\frac{AE}{ae}$. Il y aura donc dans le cube ABCDF un nombre de petits cubes *abcdf*, représenté par $\frac{AB^2}{ab^2} \times \frac{AE}{ae} = \frac{AB^3}{ab^3}$; & puisque $ab = 1$, l'expression de la solidité du grand cube sera simplement AB^3.

Donc la mesure de la solidité d'un cube est le produit de l'unité de solidité par la troisieme puissance d'une quelconque de ses dimensions. *Un pied cube*, par exemple, *contient* 1728 *pouces cubes*; une *toise cube* = 216 *pieds cubes* = 216 × 1728 *pouces cubes*; &c.

Proposons-nous maintenant de mesurer la solidité d'un parallelepipede rectangle HDMPI.

96. Pour cet effet, je suppose que sur le plus grand côté DI de ce parallelepipede, on ait construit le cube ABCDF; il est clair 1°, que ce cube doit contenir le parallelepipede proposé, autant de fois que sa base contient celle du parallelepipede; 2°, que ce nombre de fois est exprimé par $\frac{ABCD}{HDMP} = \frac{DI^2}{HDMP}$; 3°, que la solidité du cube doit être égale à celle du parallelepipede, prise ce nombre de fois. Appellant donc x la solidité du parallelepipede, on aura $x \cdot \frac{DI^2}{HDMP} = DI^3$; d'où $x = DI \times HDMP = DI \times DH \times DM$ = le produit de la surface de sa base par sa hauteur.

527. Il suit de-là que *la solidité d'un prisme quelconque, droit ou oblique, est égale au produit de sa base, par la perpendiculaire abaissée d'un des points de la base supérieure sur la base inférieure, prolongée s'il est nécessaire.*

97. Car soit le prisme ABCDEF, droit ou oblique, il n'importe. On peut réduire sa base à celle d'un rectangle *abcd*, sur lequel on peut former un parallelepipede rectangle *abcdf* dont la hauteur soit égale à la hauteur GO du prisme. On peut aussi diviser ces deux solides

par des plans paralleles à leurs baſes, & former ainſi des ſections IKLMN, *iklm* qui ſeront toutes égales aux baſes & par conſéquent égales entre elles. Or ces ſections auront toujours la même propriété, à quelque point de hauteur qu'on les faſſe, & leur ſomme eſt égale dans les deux ſolides. Donc la ſolidité du priſme eſt égale à celle du parallelepipede; elle s'eſtime donc en multipliant la ſurface de ſa baſe par ſa hauteur. FIG.

Le cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés, le cylindre peut être regardé auſſi comme un priſme dont la baſe eſt un cercle; ainſi la meſure de la ſolidité d'un cylindre eſt toujours le produit de ſa baſe par ſa hauteur.

528. Soient à préſent deux pyramides SABCDE, *sabc*, dont les hauteurs SF, *sf* ſoient égales; ſi l'on coupe ces pyramides par un plan parallele à celui de leurs baſes, les ſections ſeront deux polygones IKLMN, *ikl* également éloignés des ſommets S, *s*. On aura donc (505) $SF^2 : SP^2 :: ABCDE : IKLMN :: sf^2 : sp^2 :: abc : ikl$; d'où l'on tire $ABCDE : abc :: IKLMN : ikl$; & par conſéquent la ſomme de tous les éléments IKLMN, ou la ſolidité de la premiere pyramide, eſt à la ſomme de tous les *ikl*, ou à la ſolidité de la ſeconde, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe *abc*. 98.

Cela poſé, ſoient deux pyramides d'une même hauteur *a*, & appellons X la ſolidité de la premiere, B ſa baſe; *x* la ſolidité de la ſeconde, *b* ſa baſe: nous aurons $X : x :: B : b$, & par conſéquent $X = \frac{B}{b} x$; ce qui fait voir que la ſolidité d'une ſeule pyramide une fois connue, on aura immédiatement celle de toutes les autres pyramides qui auront la même hauteur. Cherchons donc à connoître la ſolidité d'une pyramide de hauteur donnée.

529. Je me repréſente un cube comme formé par l'aſſemblage de ſix pyramides égales, qui toutes vont ſe réunir par leur ſommet au centre du cube, & qui ont chacune pour baſe une de ſes faces. La hauteur de ces

FIG. pyramides ſera donc égale à la moitié de la hauteur du cube ; de maniere que ſi la hauteur du cube eſt $2a$, j'aurai $8a^3$ pour l'expreſſion de ſa ſolidité, & par conſéquent $\frac{8a^3}{6}$, ou $\frac{4a^3}{3}$, pour l'expreſſion de la ſolidité x de chacune de ces pyramides. D'ailleurs leur baſe $b = 4a^2$; donc la formule $X = \frac{B}{b}x$, devient $X = \frac{1}{3}aB$; c'eſt-à-dire que *la ſolidité d'une pyramide quelconque eſt égale au tiers du produit de ſa baſe par ſa hauteur.*

Donc 1°, la pyramide eſt le tiers du priſme de même baſe & de même hauteur ; 2°, la ſolidité du cône eſt auſſi le tiers de celle du cylindre qui lui eſt circonſcrit.

92. 530. Pour trouver celle du cône tronqué ADEC, menons la perpendiculaire BF ſur ſes baſes, & ſuppoſons $AC = a$, $DE = b$, $GF = d$, le rapport du diamètre à la circonférence $= 1 : \pi$, & la partie $BG = x$. Nous aurons donc, $x : x + d :: b : a$. D'où $x = \frac{db}{a-b}$. Or les ſurfaces des cercles qui ont DE & AC pour diamètres, ſont exprimées par $\frac{b^2\pi}{4}$ & $\frac{a^2\pi}{4}$. Donc les ſolidités des cônes ABC & BDE ſont $(x+d)\frac{a^2\pi}{3.4}$ & $\frac{b^2\pi x}{3.4}$; & par conſéquent leur différence ou la ſolidité du cône tronqué $ACDE = \frac{\pi}{3.4}((a^2 - b^2)x + a^2d) = \frac{\pi d}{3.4}(a^2 + b^2 + ab)$, en mettant pour x ſa valeur $\frac{bd}{a-b}$.

531. Pour meſurer la ſolidité d'un polyedre, on le diviſera en pyramides dont on calculera ſéparément la ſolidité. Leur ſomme ſera celle du polyedre propoſé. Si ce polyedre eſt régulier, on multipliera le rayon de la ſphere à laquelle on peut le concevoir circonſcrit, par le tiers de ſa ſurface, & on aura ſa ſolidité. Car on peut concevoir que du centre de la ſphere inſcrite on ait mené à tous les angles du polyedre des droites qui le diviſent en autant de pyramides égales qu'il a de faces. Or la ſolidité

ſolidité de l'une quelconque de ces pyramides eſt égale au tiers de ſa baſe qui eſt une des faces du polyedre, multipliée par la perpendiculaire menée de ſon centre ſur cette face, c'eſt à-dire, par le rayon de la ſphere inſcrite. FIG.

532. A l'égard de la ſphere même, ſa ſolidité eſt égale au tiers de ſa ſurface multipliée par ſon rayon.

Car on peut concevoir la ſphere diviſée en un nombre infini de petites pyramides, qui ont toutes pour ſommet le centre même de cette ſphere, & pour baſe une portion infiniment petite de ſa ſurface. Or la ſolidité de l'une de ces pyramides eſt égale au produit du rayon par le tiers de la portion infiniment petite de la ſurface de la ſphere, qui lui ſert de baſe. Donc la ſomme de toutes ces petites pyramides, ou *la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſon rayon par le tiers de ſa ſurface.*

533. Soit s la ſurface d'un des grands cercles de la ſphere & a ſon rayon, ſa ſolidité ſera $\frac{4}{4}\ a\ s$. Or le cylindre circonſcrit à la ſphere a pour ſolidité $2\ a\ s$. Donc la ſolidité de la ſphere eſt à celle du cylindre circonſcrit $:: \frac{4}{4}\ a\ s : 2\ a\ s :: 2 : 3$. Archimede qui le premier découvrit ce rapport, fut frappé de ſon identité avec celui des ſurfaces des mêmes ſolides.

La ſurface de la baſe du cône équilatéral étant $3\ s$, & ſa hauteur $3\ a$, ſa ſolidité eſt $3\ a\ s$. Donc la ſphere eſt au cône équilatéral $:: 4 : 9$, rapport qui eſt encore le même que celui de leurs ſurfaces.

Si l'on conçoit un cône A E B qui ait même hauteur que le cylindre circonſcrit à la ſphere, la ſolidité de ce cône ſera le tiers de celle du cylindre. D'où il ſuit que le cylindre, la ſphere & le cône ſont alors $:: 3 : 2 : 1$. 94.

534. Suppoſons maintenant qu'un ſecteur circulaire BCD tourne autour du rayon DC; il décrira un ſecteur ſphérique BCDM: or pour meſurer la ſolidité de ce ſecteur, ſoit $BD = a$, $x = CP$, qui eſt l'épaiſſeur de la *Calotte* BCM, ſoit $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence. On aura $2\ a\ \pi$ pour la circonférence d'un des grands cercles de la ſphere, & $2\ a\ \pi\ x$ ſera la ſurface décrite par BC. Donc 90.

FIG. la ſolidité du ſecteur ſphérique B C D M $= \frac{2a^2\pi x}{3}$. D'où l'on voit que dans la même ſphere, les ſecteurs ſphériques ſont entre eux, comme les épaiſſeurs des calottes ſur leſquelles ils ſont appuyés.

535. A l'égard de la calotte décrite par le demi-ſegment B C P, ſa ſolidité eſt égale à celle du ſecteur ſphérique B C M P moins celle du cône droit décrit par le triangle B P D. Or il eſt aiſé de trouver que ce cône a pour ſolidité $\frac{\pi}{3}(2ax - xx)(a - x)$; donc une calotte ſphérique dont l'épaiſſeur eſt x, a pour expreſſion de ſa ſolidité $\frac{\pi}{3}[2a^3x - (2ax - xx)(a - x)] = \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$.

536. De cette derniere expreſſion on déduit facilement celle de la ſolidité de la portion ſphérique engendrée par la révolution du trapeze circulaire D P B F; car en nommant z ſon épaiſſeur D P, on a tout
90. de ſuite $\pi(aaz - \frac{1}{3}z^3)$ pour ſa ſolidité. On trouve de même qu'en nommant u l'épaiſſeur D Q, la portion ſphérique décrite par le trapeze D Q N F a pour expreſſion $\pi(aau - \frac{1}{3}u^3)$.

Il n'eſt donc pas difficile de connoître la ſolidité de la *Zone* engendrée par le trapeze Q P B N. Son expreſſion eſt $\pi(aa \times z - u + \frac{u^3 - z^3}{3})$. Or appellant g ſon épaiſſeur P Q, y ſon plus grand rayon, ou la plus grande ordonnée N Q, y' la plus petite B P, on a $z = u + g$; ce qui donne d'abord pour ſa ſolidité, $\pi g(aa - uu - gu - \frac{1}{3}gg)$; on a enſuite $yy = aa - uu$; d'où $yy + uu = aa = y'y' + uu + 2gu + gg$. Donc $gu = \frac{yy - y'y' - gg}{2}$; & par conſéquent la ſolidité d'une zone quelconque $= \pi g(\frac{yy + y'y' + gg}{2} - \frac{gg}{3}) = \frac{\pi g}{6}(3yy + 3y'y' + gg)$. Ainſi quand même on ne connoîtroit pas le rayon de la ſphere dont cette zone fait partie, on en détermineroit pas moins ſa ſolidité.

537. Maintenant pour comparer deux ſolides enſemble, appellons S la ſolidité du premier, & A, B, C, ſes trois facteurs; s la ſolidité du ſecond, a, b, c ſes facteurs. Nous aurons donc S : s :: A B C : a b c. D'où il ſuit 1°, que ſi A $= a$, S : s :: B C : b c. 2°, Que lorſque A :

$a : bc : BC$, on a $S = s.3°$, Que dans les ſolides ſemblables, $S : s : : A^3 : a^3 : : B^3 : b^3 : : C^3 : c^3$; enſorte, par exemple, que *les ſolidités des ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs dimenſions homologues quelconques.*

Il ſuit de là que les ſolidités des ſpheres ſont proportionelles aux cubes de leurs rayons, tandis que les ſurfaces des cercles ſont proportionelles aux quarrés des rayons, & que les circonférences ſuivent le rapport ſimple des rayons.

FIG.

APPLICATION DES PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGEBRE

AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE.

IL étoit naturel de chercher à réduire toutes les figures rectilignes au triangle, parce que le triangle eſt la plus ſimple de toutes ces figures. Auſſi voyons-nous que les anciens Géomètres avoient déja ramené l'arpentage à ce point de ſimplicité : ils partageoient en triangles les terreins qu'ils avoient à meſurer. De là vient le nom de *Trigonométrie* à la ſcience qui apprend à *réſoudre* les Triangles.

Quand ils ſont formés par des lignes droites, on l'appelle *Trigonométrie rectiligne*. Quand ces triangles ſont formés par des arcs de cercle, on l'appelle *Trigonométrie ſphérique*. L'une & l'autre *Trigonométrie* ſont d'une grande utilité : mais pour être en état d'en juger, il faut commencer par ſe rendre familière la théorie des *Sinus*.

Du Calcul des Sinus.

538. ON appelle *Sinus* d'un arc ou d'un angle, toute
99. ligne qui partant d'une des deux extrémités de cet arc ou de cet angle, tombe perpendiculairement ſur le rayon ou le diamètre qui paſſe par l'autre extrémité. Ainſi la perpendiculaire BD, menée de l'extrémité B de l'arc BA, ſur le rayon CA, qui paſſe par l'autre extrémité A, ſe nomme le *ſinus* de l'arc AB, ou de l'angle ACB que cet arc meſure.

539. Si EB eſt le complément de l'arc BA, ſon ſinus GB eſt le ſinus de complément, ou le *coſinus* de l'arc AB. Or il eſt clair que CD = BG, & que BD = GC.

540. La perpendiculaire AT menée par le point A ſur le rayon CA juſqu'à la rencontre du rayon CB prolongé, ſe nomme la *tangente* de l'arc AB, & CT en eſt la *ſécante*. De même la tangente EM de l'arc EB eſt la tangente de complément, ou la *cotangente* de l'arc AB, & CM en eſt la *coſécante*.

On nomme encore *ſinus verſe* & *coſinus verſe* les lignes AD, EG; mais on s'en ſert rarement.

Pour abréger, nous écrirons *ſin*, *coſ*, *tang*, *cot*, *ſec*, *coſec*, *ſin v*, *coſ v*, au lieu de ſinus, coſinus, tangente, cotangente, ſécante, coſécante, ſinus verſe & coſinus verſe.

541. Il ſuit de la définition des ſinus, que *le ſinus d'un arc quelconque eſt la moitié de la corde d'un arc double.* Car ſi on prolonge BD juſqu'en F, BD ſera la moitié de BF, corde du double de l'arc BA.

Et c'eſt de là, pour le dire en paſſant, que vient probablement la dénomination des ſinus: car autrefois les cordes d'un cercle s'appelloient *inſcriptæ*, & leurs moitiés, ou *ſemiſſes inſcriptæ*, ſe déſignoient par S. *ins.* On finit donc par prononcer *ſinus* dans un temps, où la plupart des mots ſe terminoient en *us.*

De ce que le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde qui ſoûtend un arc double, il ſuit évidemment que *le ſinus d'un arc de 30° eſt la moitié du rayon* (420).

542. La définition des ſinus fait voir avec la même clarté, que le ſinus d'un angle aigu quelconque, BCA eſt le même que celui de l'angle obtus *a* CB, qui lui ſert de ſupplément.

543. Quant au coſinus d'un angle obtus, il eſt toujours négatif. Il en eſt de même de ſa tangente, cotangente, ſécante, &c.

544. On voit bien que les ſinus croiſſent depuis 0°, auquel cas leur coſinus eſt égal au rayon, juſqu'à 90°.

FIG. Alors le ſinus devient égal au rayon, & le coſinus s'évanouit. Les ſinus croiſſent enſuite depuis 90° juſqu'à 180°, où ils deviennent nuls, pendant que leur coſinus devient égal au rayon pris négativement.

545. On voit également que les tangentes & les ſécantes croiſſent depuis 0, où la tangente eſt nulle, pendant que la ſécante eſt égale au rayon, juſqu'à 90° où la tangente & la ſécante deviennent égales, paralleles & par conſéquent infinies. La cotangente eſt alors nulle, & la coſécante égale au rayon.

Depuis 90° juſqu'à 180°, elles décroiſſent de plus en plus; mais elles ſont négatives. Lorſqu'elles ont atteint 180°, la tangente s'évanouit, & la ſécante devient égale au rayon pris négativement. Dans ce même point la cotangente & la coſécante deviennent égales & infinies négatives.

546. *La tangente de 45° eſt égale au rayon*, ainſi que
99. la cotangente. Car alors les triangles rectangles CEM, CTA deviennent égaux & iſoſceles.

547. Cela poſé, ſoit l'arc BA = A, le rayon CB = CA = 1 (ſuppoſition que nous ferons déſormais, afin de rendre le calcul plus facile), on aura, à cauſe des triangles rectangles & ſemblables CBD, CGB, CTA, CEM, les proportions & les équations ſuivantes.

I. $CD^2 + BD^2 = CB^2$; ou $\mathit{ſin}^2 A + \mathit{coſ}^2 A = 1 = \mathit{ſin}^2 B + \mathit{coſ}^2 B$ (B étant un autre arc quelconque). Donc $\mathit{ſin} A + \mathit{ſin} B : \mathit{coſ} B + \mathit{coſ} A :: \mathit{coſ} B - \mathit{coſ} A : \mathit{ſin} A - \mathit{ſin} B$.

II. $CT^2 - AT^2 = AC^2$ . . $\mathit{ſec}^2 A - \mathit{tang}^2 A = 1$.

III. $CE^2 = CM^2 - EM^2$ . . . $1 = \mathit{coſec}^2 A - \mathit{cot}^2 A = \mathit{ſec}^2 A - \mathit{tang}^2 A$.

IV. $CD : BD :: CA : AT$ . . . $\mathit{coſ} A : \mathit{ſin} A :: 1 : \mathit{tang} A$. Donc $\mathit{ſin} A = \mathit{coſ} A \times \mathit{tang} A$ . . . $\mathit{coſ} A = \frac{\mathit{ſin} A}{\mathit{tang} A}$ . . . $\mathit{tang} A = \frac{\mathit{ſin} A}{\mathit{coſ} A}$.

V. $CB : BD :: CT : AT$ . . . $1 : \mathit{ſin} A :: \mathit{ſec} A : \mathit{tang} A$. Donc $\mathit{ſec} A = \frac{\mathit{tang} A}{\mathit{ſin} A} = \frac{1}{\mathit{coſ} A}$.

VI. $CG : GB :: CE : EM$ . . . $\mathit{ſin} A : \mathit{coſ} A :: 1 :$

: $cot\ A = \frac{cof\ A}{fin\ A} = \frac{1}{tang\ A}$. Donc $cot\ A \times tang\ A = 1$. FIG. 100.

548. Soit proposé maintenant de déterminer le sinus & le cosinus de la somme de deux arcs donnés AB & BE.

Je nomme s le sinus BD de l'arc AB . . . c son cosinus CD . . . s' le sinus EG de l'arc CEB . . . c' son cosinus CG . . . . enfin x le cosinus cherché CF $= cof$ (AB + BE), & y le sinus EF $= fin$ (AB + BE).

Cela posé, à cause des triangles semblables CBD, CFH, EGH, on aura CD (c) : CF (x) :: CB (1) : CH $= \frac{x}{c}$ :: BD (s) : FH $= \frac{sx}{c}$.

Ensuite CD (c) : EG (s') :: BD (s) : GH ($c' - \frac{x}{c}$) :: CB (1) : EH ($y - \frac{sx}{c}$). Donc $s's = cc' - x$, & $s' = cy - sx$.

La premiere équation donne $x = cc' - ss'$, & substituant cette valeur dans la seconde, on a, (en faisant attention que $1 - s^2 = c^2$), $y = sc' + s'c$. Donc en général a & b étant deux arcs quelconques, on a

$Sin\ (a + b) = fin\ a\ cof\ b + fin\ b\ cof\ a$.

$Cos\ (a + b) = cof\ a\ cof\ b - fin\ a\ fin\ b$.

549. Soit $a + b = c$, on aura

$Sin\ c = fin\ a\ cof\ (c - a) + cof\ a\ fin\ (c - a)$.

$Cof\ c = cof\ a\ cof\ (c - a) - fin\ a\ fin\ (c - a)$.

Or en traitant $fin\ (c - a)$ & $cof\ (c - a)$ comme des inconnues, on trouve $fin\ (c - a) = fin\ c\ cof\ a - fin\ a\ cof\ c$ . . . . & $cof\ (c - a) = cof\ c\ cof\ a + fin\ a\ fin\ c$. Donc en général. . . . .

$Sin\ (a - b) = fin\ a\ cof\ b - fin\ b\ cof\ a$.

$Cof\ (a - b) = cof\ a\ cof\ b + fin\ a\ fin\ b$.

En faisant $a = b$, on a $fin\ 2a = 2\ fin\ a\ cof\ a$, & $cof\ 2a = cof^2\ a - fin^2\ a = 2\ cof^2\ a - 1$ (en mettant pour $fin^2\ a$, sa valeur $1 - cof^2\ a$). Il est donc bien facile d'avoir le sinus & le cosinus du double d'un arc dont on connoît déja le sinus & le cosinus.

On trouve avec la même facilité le sinus & le cosinus de la moitié de cet arc. Car si on fait $2a = c$, on aura $\sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$, & $\cos c + 1 = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c$. Donc $\cos \frac{1}{2} c = \sqrt{(\frac{1+\cos c}{2})}$, & $\frac{\sin c}{2 \cos \frac{1}{2} c}$, ou $\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sin c}{\sqrt{2(1+\cos c)}} = \sqrt{(\frac{1-\cos^2 c}{2(1+\cos c)})} = \sqrt{(\frac{1-\cos c}{2})}$.

Mais comme ces formules suppoſent que les sinus & cosinus sont déja connus, il faut, avant d'aller plus loin, apprendre à les connoître.

550. Et d'abord, il est clair que si on calcule les sinus de tous les arcs compris dans un quart de cercle, depuis l'arc de 1″ jusqu'à l'arc de 90°, on connoîtra tous les sinus, depuis celui de 1″, jusqu'à celui de 180° (542). Or depuis 180° jusqu'à 360°, les sinus sont les mêmes que depuis 0° jusqu'à 180, au signe près qui est négatif. Donc *le calcul des sinus se réduit à celui des sinus d'un quart de cercle.*

Il est clair ensuite que les cosinus peuvent aisément se déterminer par la formule .... $\cos a = \sqrt{(1 - \sin^2 a)}$. Occupons-nous donc seulement du calcul des sinus.

On sait (485) que le rayon étant 1, l'arc de 90° est représenté par 1,5707963267948966, &c; donc l'arc de 1″ est de 0,000004848 &c parties du rayon; & comme un arc aussi petit ne differe pas sensiblement de son sinus, on a pris 0,000004848 &c, pour sinus de l'arc de 1″. On a doublé, triplé cette fraction, & on a eu les sinus de 2″, de 3″, &c.

On auroit pu calculer le sinus de 2″, puis celui de 3″ &c, par les formules $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, & $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$: mais on a trouvé que la différence entre des arcs aussi petits & leurs sinus étoit trop insensible, pour ne pas prendre chacun de ces arcs au lieu de son sinus respectif.

En s'élevant ainsi des secondes jusqu'aux minutes, & en continuant le calcul depuis les minutes jusqu'aux degrés, par le moyen des deux formules précédentes, on

parvient au ſinus de 30°. Ce ſinus devant être égal à la moitié du rayon, on peut vérifier par là les calculs antérieurs; & on ſe trouve avoir tous les ſinus depuis celui d'une ſeconde juſqu'à celui de 30°. Mais pour ne pas trop groſſir le volume des Tables, on n'y fait entrer que les ſinus des minutes & des degrés.

551. Suppoſons maintenant que $a = 30°$, on aura $\mathit{ſin}\,(30° + b) = \mathit{ſin}\,30°\,\mathit{coſ}\,b + \mathit{coſ}\,30°\,\mathit{ſin}\,b$. Or $\mathit{ſin}\,30° = \frac{1}{2}$ .... & $\mathit{coſ}\,30° = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Donc $\mathit{ſin}\,(30° + b) = \frac{1}{2}\mathit{ſin}\,b\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,b$ .... & $\mathit{ſin}\,(30° - b) = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,b - \frac{1}{2}\mathit{ſin}\,b\sqrt{3}$. Donc $\mathit{ſin}\,(30° + b) = \mathit{ſin}\,(30° - b) + \mathit{ſin}\,b\sqrt{3}$. Il ſuit de là que connoiſſant tous les ſinus depuis 0° juſqu'à 30°, on a facilement tous ceux qui ſont depuis 30° juſqu'à 60°.

552. Cela poſé, ſoit $a = 60°$, on aura $\mathit{ſin}\,(60° + b) = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,b\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathit{ſin}\,b$ .... & $\mathit{ſin}\,(60° - b) = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,b\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathit{ſin}\,b$. Donc $\mathit{ſin}\,(60° + b) = \mathit{ſin}\,(60° - b) + \mathit{ſin}\,b$. Par exemple, $\mathit{ſin}\,66° = \mathit{ſin}\,54° + \mathit{ſin}\,6°$.

Connoiſſant donc les ſinus des arcs qui ſont entre 30° & 60°, on aura tout de ſuite ceux qui ſont depuis 60° juſqu'à 90°; ce qui complétera ce genre de calcul.

553. Reprenons les deux formules .... $\mathit{ſin}\,(a + b) = \mathit{ſin}\,a\,\mathit{coſ}\,b + \mathit{ſin}\,b\,\mathit{coſ}\,a$ .... $\mathit{ſin}\,(a - b) = \mathit{ſin}\,a\,\mathit{coſ}\,b - \mathit{ſin}\,b\,\mathit{coſ}\,a$, & ajoutons-les enſemble; nous aurons

$$\mathit{Sin}\,a\,\mathit{coſ}\,b = \tfrac{1}{2}\mathit{ſin}\,(a + b) + \tfrac{1}{2}\mathit{ſin}\,(a - b).$$

En ſouſtrayant la ſeconde de la premiere, nous trouverons ....

$$\mathit{Sin}\,b\,\mathit{coſ}\,a = \tfrac{1}{2}\mathit{ſin}\,(a + b) - \tfrac{1}{2}\mathit{ſin}\,(a - b)$$

Faiſant les mêmes opérations ſur les deux autres formules .... $\mathit{coſ}\,(a + b) = \mathit{coſ}\,a\,\mathit{coſ}\,b - \mathit{ſin}\,a\,\mathit{ſin}\,b$ .... $\mathit{coſ}\,(a - b) = \mathit{coſ}\,a\,\mathit{coſ}\,b + \mathit{ſin}\,a\,\mathit{ſin}\,b$,

on en déduira .. $\begin{matrix}\mathit{Coſ}\,a\,\mathit{coſ}\,b = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,(a + b) + \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,(a - b)\\ \mathit{Sin}\,a\,\mathit{ſin}\,b = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,(a - b) - \frac{1}{2}\mathit{coſ}\,(a + b)\end{matrix}$

Ces quatre dernieres formules ſont utiles quand on veut transformer des produits de ſinus en ſinus ſimples. Les quatre ſuivantes ſervent à ſubſtituer à des ſommes

ou à des différences de sinus, des produits d'autres sinus, afin que le calcul par logarithmes puisse s'y appliquer.

554. Soit $a+b=p \ldots a-b=q$, on aura $a=\frac{p+q}{2} \ldots b=\frac{p-q}{2}$. Donc ....

$$Sin\ p+sin\ q=2\,sin\,\frac{p+q}{2}\,cos\,\frac{p-q}{2}.$$

$$Sin\ p-sin\ q=2\,sin\,\frac{p-q}{2}\,cos\,\frac{p+q}{2}.$$

$$Cos\ p+cos\ q=2\,cos\,\frac{p+q}{2}\,cos\,\frac{p-q}{2}.$$

$$Cos\ q-cos\ p=2\,sin\,\frac{p+q}{2}\,sin\,\frac{p-q}{2}.$$

555. Supposons dans les deux premieres formules $p=90°$, & dans les deux dernieres $q=0$, nous aurons ....

$1+sin\ q=2\,sin\,(45°+\frac{1}{2}q)\,cos\,(45°-\frac{1}{2}q)=2\,sin^2\,(45°+\frac{1}{2}q)$.
$1-sin\ q=2\,sin\,(45°-\frac{1}{2}q)\,cos\,(45°+\frac{1}{2}q)=2\,sin^2\,(45°-\frac{1}{2}q)$.
$=2\,cos^2\,(45°+\frac{1}{2}q)=cos\,v.\,q.$
$1+cos\,p=2\,cos^2\,\frac{1}{2}p.$
$1-cos\,p=2\,sin^2\,\frac{1}{2}p=sin\,v.\,p.$

556. Divisons maintenant les formules du n° 554 les unes par les autres, nous aurons .....

$$\frac{sin\,p+sin\,q}{sin\,p-sin\,q}=\frac{sin\,\frac{p+q}{2}}{cos\,\frac{p+q}{2}}\times\frac{cos\,\frac{p-q}{2}}{sin\,\frac{p-q}{2}}=tang\,\frac{p+q}{2}\,cot\,\frac{p-q}{2}=\frac{tang\,\frac{p+q}{2}}{tang\,\frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{sin\,p+sin\,q}{cos\,p+cos\,q}=tang\,\frac{p+q}{2}. \qquad \frac{sin\,p-sin\,q}{cos\,p+cos\,q}=tang\,\frac{p-q}{2}.$$

$$\frac{sin\,p+sin\,q}{cos\,q-cos\,p}=cot\,\frac{p-q}{2}. \qquad \frac{sin\,p-sin\,q}{cos\,q-cos\,p}=cot\,\frac{p+q}{2}.$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

557. En divisant de même les unes par les autres, quelques-unes des formules du n° 555, on trouve . . . . .

$$\frac{1+\sin q}{1-\sin q} = \frac{\sin^2(45°+\frac{1}{2}q)}{\sin^2(45°-\frac{1}{2}q)} = \frac{\sin^2(45°+\frac{1}{2}q)}{\cos^2(45°+\frac{1}{2}q)} = \tang^2(45°+\tfrac{1}{2}q).$$

$$\frac{1+\cos p}{1-\cos p} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}p}{\sin^2\frac{1}{2}p} = \cot^2\tfrac{1}{2}p.$$

$$\frac{1+\sin q}{1+\cos p} = \frac{\sin^2(45°+\frac{1}{2}q)}{\cos^2\frac{1}{2}p}.$$

$$\frac{1-\sin q}{1-\cos q} = \frac{\cos v.\, q}{\sin v.\, q} = \frac{\sin^2(45°-\frac{1}{2}q)}{\sin^2\frac{1}{2}q}.$$

558. Reprenons encore une fois les valeurs de $\sin(a+b)\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, nous en déduirons . . . . .

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\sin a\cos b - \sin b\cos a} = \frac{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b} + \frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}}{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b} - \frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}} =$$

$$\frac{\frac{\cos b}{\sin b} + \frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\cot b + \cot a}{\cot b - \cot a} = \frac{\frac{1}{\tang b} + \frac{1}{\tang a}}{\frac{1}{\tang b} - \frac{1}{\tang a}} = \frac{\tang a + \tang b}{\tang a - \tang b}.$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b + \sin a\sin b} = \frac{\frac{\cos b}{\sin b} + \frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b} + 1} = \frac{\cot b + \cot a}{1+\cot b\cot a} =$$

$$\frac{\tang a + \tang b}{1+\tang a\tang b}.$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b - \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\cot b - \cot a}{\cot b\cot a - 1} = \frac{\tang a - \tang b}{1-\tang a\tang b}.$$

$\frac{cof(a+b)}{cof(a-b)} = \frac{cof\,a\,cof\,b - fin\,a\,fin\,b}{cof\,a\,cof\,b + fin\,a\,fin\,b} = \frac{cot\,b - tang\,a}{cot\,b + tang\,a} = \frac{1 - tang\,a\,tang\,b}{1 + tang\,a\,tang\,b} =$
$\frac{cot\,a\,cot\,b - 1}{cot\,a + tang\,b}$.

$\frac{fin(a+b)}{cof(a+b)} = tang(a+b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b} = \frac{cot\,a + cot\,b}{cot\,a\,cot\,b - 1}$.

Donc $cot(a+b) = \frac{1}{tang(a+b)} = \frac{1 - tang\,a\,tang\,b}{tang\,a + tang\,b} =$
$\frac{cot\,a\,cot\,b - 1}{cot\,a + cot\,b}$.

$\frac{fin(a-b)}{cof(a-b)} = tang(a-b) = \frac{tang\,a - tang\,b}{1 + tang\,a\,tang\,b} = \frac{cot\,b - cot\,a}{cot\,b\,cot\,a + 1}$.

Donc $cot(a-b) = \frac{1 + tang\,a\,tang\,b}{tang\,a - tang\,b} = \frac{cot\,b\,cot\,a + 1}{cot\,b - cot\,a}$.

559. Soit $a = 45°$; on aura $tang(45° + b) = \frac{1 + tang\,b}{1 - tang\,b} = \frac{cot\,b + 1}{cot\,b - 1}$, & $tang(45° - b) = \frac{1 - tang\,b}{1 + tang\,b} =$
$cot(45° + b) = \frac{cot\,b - 1}{cot\,b + 1}$.

Si l'on fait $a = b = \frac{1}{2}c$, on aura $tang\,2a = \frac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a}$, ou $tang\,c = \frac{2\,tang\frac{1}{2}c}{1 - tang^2\frac{1}{2}c}$, & $cot\,2a = \frac{1 - tang^2 a}{2\,tang\,a} =$
$\frac{1}{2}cot\,a - \frac{1}{2}tang\,a$. Donc $cot\,c = \frac{1}{2}cot\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}tang\frac{1}{2}c$, & $cot\frac{1}{2}c = 2\,cot\,c + tang\frac{1}{2}c$. Or (549) $tang\frac{1}{2}c =$
$\sqrt{\left(\frac{1 - cof\,c}{1 + cof\,c}\right)} = \frac{1 - cof\,c}{fin\,c}$.

560. Puiſque $sec\,a = \frac{1}{cof\,a}$, & $cofec\,a = \frac{1}{fin\,a}$, on a . . . .

$Sec(a+b) = \frac{1}{cof\,a\,cof\,b - fin\,a\,fin\,b} = \frac{\frac{1}{cof\,a\,cof\,b}}{1 - \frac{fin\,a\,fin\,b}{cof\,a\,cof\,b}} = \frac{sec\,a\,sec\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b} =$
$\frac{cofec\,a\,cofec\,b}{cot\,a\,cot\,b - 1}$.

$$Sec\,(a-b) = \frac{sec\,a\,sec\,b}{1 + tang\,a\,tang\,b}.$$

$$Cosec\,(a+b) = \frac{cosec\,a\,cosec\,b}{cot\,b + cot\,a}.$$

$$Cosec\,(a-b) = \frac{cosec\,a\,cosec\,b}{cot\,b - cot\,a}.$$

561. Soit $a = b$, on aura $cosec\,2a = \frac{cosec^2 a}{2\,cot\,a} = \frac{1 + cot^2 a}{2\,cot\,a} = \frac{cot\,a + tang\,a}{2}$. Donc $cosec\,a = \frac{cot\,\frac{1}{2}a + tang\,\frac{1}{2}a}{2}$. Or $cot\,\frac{1}{2}a = 2\,cot\,a + tang\,\frac{1}{2}a$ (559). Donc $cosec\,a = cot\,a + tang\,\frac{1}{2}a = \frac{cot\,\frac{1}{2}a + tang\,\frac{1}{2}a}{2} = cot\,\frac{1}{2}a - cot\,a$, en mettant pour $tang\,\frac{1}{2}a$ sa valeur $cot\,\frac{1}{2}a - 2\,cot\,a$)

On a auſſi $sec\,2a = \frac{sec^2 a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang^2 a}{1 - tang^2 a} = \frac{(1 + tang\,a)^2}{1 - tang^2 a} - \frac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang\,a}{1 - tang\,a} - \frac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a}$. Mais $\frac{1 + tang\,a}{1 - tang\,a} = tang\,(45° + a)$, & $\frac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a} = tang\,2a$.

Donc $sec\,2a = tang\,(45° + a) - tang\,2a$, & $sec\,a = tang\,(45° + \frac{1}{2}a) - tang\,a = cot\,(45° - \frac{1}{2}a) - tang\,a$.

De ce que $sec\,a = \frac{1}{cos\,a}$, & que $cosec\,a = \frac{1}{sin\,a}$, on a $sec\,a = tang\,a\,cosec\,a$; & en ſubſtituant toutes les valeurs de $cosec\,a$ trouvées ci-deſſus, on aura $sec\,a = \frac{tang\,a}{2}(cot\,\frac{1}{2}a + tang\,\frac{1}{2}a) = tang\,a\,(cot\,a + tang\,\frac{1}{2}a) = 1 + tang\,a\,tang\,\frac{1}{2}a = tang\,a\,(cot\,\frac{1}{2}a - cot\,a) = tang\,a\,cot\,\frac{1}{2}a - 1 = \frac{tang\,a}{tang\,\frac{1}{2}a} - 1$.

Au reſte toutes ces formules peuvent être variées d'une infinité de manieres, en les ajoutant, ſouſtrayant, diviſant, &c. Mais il eſt inutile d'inſiſter ſur une matiere auſſi facile; voyez l'Introduction à l'analyſe des Infinis par M. Euler.

Du Calcul des Tables de Sinus par les Séries.

Il eſt arrivé pour les Tables des Sinus, ce qui étoit déja arrivé pour les Tables des Logarithmes. Les premiers Calculateurs avoient fini depuis long temps leur travail, lorſqu'on imagina des moyens de le ſimplifier. Ces moyens cependant n'en ſont pas moins ingénieux, comme on peut en juger par celui que Jean Bernoulli propoſe dans le IIe Volume de ſes Ouvrages. En voici à peu-près l'analyſe.

562. Si l'on remonte à la valeur de *tang* $(a+b)$, on en déduira facilement *tang* $(A+B+C) = \frac{tang(A+B)+tang\,C}{1-tang\,C\,tang(A+B)}$. Soient donc a, b, c les tangentes reſpectives des arcs A, B, C; on aura *tang* $(A+B+C) = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$. Pareillement ſi a, b, c, d ſont les tangentes reſpectives de quatre arcs A, B, C, D, on aura

tang $(A+B+C+D) = \frac{a+b+c+d-abc-abd-acd-bcd}{1-ab-ac-ad-bc-bd-cd+abcd}$.

D'où il ſuit, en général, que ſi l'on a un nombre quelconque d'arcs A, B, C, D, &c, on aura en nommant s la ſomme de leurs tangentes, s^{II} leurs produits deux à deux, s^{III} leurs produits trois à trois, &c) . . . . . .

Tang $(A+B+C+D+\&c) = \frac{s-s^{III}+s^{V}-s^{VII}+\&c}{1-s^{II}+s^{IV}-s^{VI}+\&c}$.

Suppoſons pour un moment que tous les arcs A, B, C, &c ſoient égaux; ſi l'on nomme n leur nombre, *tang* A la tangente de l'un quelconque de ces arcs, on aura (313)

$s^{II} = \frac{n.n-1}{2}\,tang^2\,A \ldots s^{III} = \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,tang^3\,A \ldots$

$s^{IV} = \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,tang^4\,A$, &c.

On a donc généralement 2

$$Tang\, n\,A = \frac{n\,tang\,A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}tang^3A + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}tang^5A - \&c}{1 - \frac{n.n-1}{2}tang^2A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}tang^4A - \&c.} =$$

$$\frac{n\frac{sin\,A}{cos\,A} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\frac{sin^3A}{cos^3A} + \&c}{1 - \frac{n.n-1}{2}\cdot\frac{sin^2A}{cos^2A} + \&c} \quad \text{.....} =$$

$$\frac{n\,cos^{n-1}A\,sin\,A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}cos^{n-3}A\,sin^3A + \&c}{cos^nA - \frac{n.n-1}{2}cos^{n-2}A\,sin^2A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}cos^{n-4}A\,sin^4A - \&c.}$$

Soit N le numérateur de cette dernière quantité, soit D le dénominateur ; on aura, en faisant le calcul .....

$$N^2 + D^2 = cos^{2n}A + n\,cos^{2n-2}A\,sin^2A + \frac{n.n-1}{2}\,cos^{2n-4}A\,sin^4A + \ldots sin^{2n}A = (cos^2A + sin^2A)^n = 1.$$

Mais puisque d'un côté on a $N^2 + D^2 = 1$, & que de l'autre on a $\frac{N^2}{D^2} = tang^2n\,A = \frac{sin^2n\,A}{cos^2n\,A}$, il est clair que $N = sin\,n\,A$, & que $D = cos\,n\,A$; on a donc en général ....

$$Sin\,n\,A = n\,cos^{n-1}A\,sin\,A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}cos^{n-3}A\,sin^3A + \ldots$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}cos^{n-5}A\,sin^5A - \&c.$$

$$Cos\,n\,A = cos^nA - \frac{n.n-1}{2}cos^{n-2}A\,sin^2A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}$$

$$cos^{n-4}A\,sin^4A - \&c.$$

Supposons maintenant que l'arc A soit infiniment petit, ensorte qu'il faille que n soit infini pour que l'arc n A soit d'une grandeur finie a, on aura, 1°. . . $sin\,A = A$, parce que l'arc infiniment petit ne diffère pas de son sinus.

On aura, 2°. . . . $cos\,A = 1$, parce que le cosinus d'un arc infiniment petit est égal au rayon. On aura, 3° .... $n - 1 = n = n - 2 = n - 3$ &c, parce que n est infini ; on aura enfin . . . $A = \frac{a}{n}$. Ces valeurs étant substi-

tuées dans les formules précédentes donnent . . . . .

$$Sin\ a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$

$$Cos\ a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

$$\frac{sin\ a}{cos\ a} = tang\ a = \frac{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.}{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.}$$

$$\frac{cos\ a}{sin\ a} = cot\ a = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \&c.}{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.}$$

563. Soit maintenant l'arc a une partie quelconque $\frac{1}{m}$ de 90°; comme l'arc de 90° = 1,5707963267948966, &c. . . . on aura, en appellant c ce nombre . . . . . .

$$Sin\frac{90^\circ}{m} = \frac{c}{m} - \frac{c^3}{2.3.m^3} + \frac{c^5}{2.3.4.5.m^5} - \frac{c^7}{2.3.4.5.6.7.m^7} + \frac{c^9}{2.3\ldots9.m^9} - \&c. =$$

TERMES POSITIFS.		TERMES NÉGATIFS.	
$\frac{1}{m}$.	1,5707963267948966	$\frac{1}{m^3}$.	0,6459640975062462
$\frac{1}{m^5}$.	0,0796926262461675	$\frac{1}{m^7}$.	0,0046817541353187
$\frac{1}{m^9}$.	0,0001604411847873	$\frac{1}{m^{11}}$.	0,0000035988432355
$\frac{1}{m^{13}}$.	0,0000000569217290	$\frac{1}{m^{15}}$.	0,0000000006688019
$\frac{1}{m^{17}}$.	0,0000000000060662	$\frac{1}{m^{19}}$.	0,0000000000000430
&c.		&c.	

On aura de même la valeur d'un cosinus quelconque par la formule suivante . . . . . .

$$cos\frac{90^\circ}{m} = 1 - \frac{c^2}{2m^2} + \frac{c^4}{2.3.4m^4} - \frac{c^6}{2.3.4.5.6m^6} + \&c.$$

qui en substituant les valeurs des puissances de c, donne

TERMES POSITIFS.	TERMES NEGATIFS.
$1 + \frac{1}{m^4}$. 0,253669507901048	$\frac{1}{m^2}$. 1,233700550136169
$\frac{1}{m^8}$. 0,000919260274839	$\frac{1}{m^6}$. 0,020863480763352
$\frac{1}{m^{12}}$. 0,000000471087477	$\frac{1}{m^{10}}$. 0,000025202042373
$\frac{1}{m^{16}}$. 0,000000000065659	$\frac{1}{m^{14}}$. 0,000000006386603
$\frac{1}{m^{20}}$. 0,000000000000003	$\frac{1}{m^{18}}$. 0,000000000000529
$\frac{1}{m^{24}}$. 0,000000000000000	$\frac{1}{m^{22}}$. 0,000000000000000
&c.	&c.

564. Il en eſt de même pour *tang* $\frac{90^\circ}{m}$, & pour *cot* $\frac{90^\circ}{m}$. On peut donc par le moyen de ces ſéries calculer les ſinus & les tangentes de tous les arcs; il n'y a qu'à ſubſtituer les valeurs convenables de m. Par exemple, pour calculer le ſinus de l'arc de 30°, on fera $m = 3$, & on aura...

Sin 30° = 0,523 598 775 598 299
+ 0,000 327 953 194 428
+ 0,000 000 008 151 256
+ 0,000 000 000 000 036
+ 0,523 926 736 944 019
— 0,023 924 596 203 935
— 0,000 002 140 719 769
— 0,000 000 000 020 315
— 0,023 926 736 944 019

Donc *ſin* 30° = 0, 5; comme on le ſait d'ailleurs (541).

Au reſte, comme il ſuffit de calculer les ſinus juſqu'à 30° pour avoir tous les autres, la fraction $\frac{1}{m}$ ſera toujours plus petite que $\frac{1}{3}$: enſorte que la ſérie égale à *ſin*

$\frac{9^{\circ}}{m}$ ſera très-convergente. Veut-on, par exemple, avoir le ſinus de 9°? On fera $m = 10$, & on trouvera auſſitôt . . . . $\mathit{fin}\ 9^{\circ} = 0{,}15643446504023 1$.

Si on propoſoit de trouver le ſinus d'un arc d'un certain nombre de degrés, avec des minutes, des ſecondes, &c; il eſt clair qu'on pourroit le trouver par la même méthode.

565. Les ſinus que l'on a par ce calcul conviennent à un cercle dont le rayon = 1, & par conſéquent pour avoir ceux qui conviendroient à un cercle dont le rayon ſeroit a, il faudroit multiplier les premieres par a.

Dans les Tables ordinaires, on ſuppoſe que le rayon = 10 000 000 000, & pour faciliter le calcul, on y a mis les logarithmes des ſinus, coſinus, tangentes, cotangentes, depuis 1′ juſqu'à 90°, en exceptant ceux des arcs où il entre des ſecondes, parce qu'il eſt facile d'en trouver les ſinus, coſinus, &c, comme on peut le voir dans les Tables déja citées (290).

566. Quant aux ſécantes & coſécantes, on n'en a point fait de Tables particulieres, parce que leur uſage eſt peu fréquent, & qu'il eſt aiſé d'ailleurs de les calculer par le moyen des formules $\mathit{ſec}\ a = \frac{1}{\mathit{coſ}\ a}$, & $\mathit{coſec}\ a = \frac{1}{\mathit{ſin}\ a}$, qui deviennent pour le rayon R des Tables, $\mathit{ſec}\ a = \frac{R^2}{\mathit{coſ}\ a}$, & $\mathit{coſec}\ a = \frac{R^2}{\mathit{ſin}\ a}$; d'où l'on tire $\mathit{Log.}\ \mathit{ſec}\ a = 2\ L\ R - L\ \mathit{coſ}\ a = 20.0000000 - L\ \mathit{coſ}\ a$, & $L\ \mathit{coſec}\ a = 20.0000000 - L\ \mathit{ſin}\ a$.

567. Après avoir réſolu généralement ce problême: *étant donné un arc, trouver ſon ſinus, ſon coſinus, ſa tangente*, &c, il nous reſte à donner la ſolution du problême inverſe: *étant donné le ſinus, ou le coſinus, la tangente ou la cotangente d'un arc, trouver la longueur de cet arc.*

Si l'on donne le coſinus ou la cotangente, on a immédiatement le ſinus & la tangente. Ainſi le problême ſe réduit à trouver la longueur d'un arc dont on donne le ſinus ou la tangente.

Or 1°, ſi l'on remonte à la valeur de $\mathit{ſin}\ a$, on en déduira par la

méthode inverse des séries (284), $a = \sin a + \frac{\sin^3 a}{2\cdot 3} + \frac{3\sin^5 a}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot \sin^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \sin^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$ + &c.

2°. Si l'on nomme t la tangente de l'arc a, on aura (562) $t = \frac{a - \frac{a^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \&c}{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c}$, ou $t = a + \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^3}{2\cdot 3} - \frac{a^4 t}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c$. Soit $a = A\,t + B\,t^3 + C\,t^5 + \&c$, on aura en substituant & déterminant les inconnues A, B, C, &c, $A = 1$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{5}$, &c. D'où $a = tang\,a - \frac{tang^3 a}{3} + \frac{tang^5 a}{5} - \frac{tang^7 a}{7} + \&c$.

568. Ces deux séries donnent donc la solution du problème proposé. Appliquons-les maintenant à la recherche du rapport du diametre à la circonférence.

Si on fait $\sin a = \frac{1}{2}$, on aura la longueur de l'arc de 30° $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \&c$. Cette quantité multipliée par 6 donneroit la demi-circonférence, & par conséquent le rapport cherché; mais comme cette série, toute convergente qu'elle est, est assez longue à calculer, il vaut mieux se servir de la seconde qui donne, en supposant l'arc a de 45° ..... $a = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c$. Et parce que la marche de celle-ci est encore trop lente, on a imaginé un moyen plus expéditif pour avoir la longueur de ce même arc de 45°.

569. Ce moyen consiste à décomposer l'arc de 45° en deux autres arcs que nous appellerons a & b, & à chercher séparément leur longueur. Or dans cette supposition, $tang(a+b) = 1 = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b}$. Donc $tang\,a = \frac{1 - tang\,b}{1 + tang\,b}$. Soit $tang\,b = \frac{1}{3}$, on aura $tang\,a = \frac{1}{2}$. La somme des arcs a & b, ou le quart de la demi-circonférence sera donc .....

$$\frac{\pi}{4} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \&c \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} - \&c \end{array}\right\} = 0{,}78539816339744831 \&c.$$

d'où l'on tire $\pi = 3,14159265358979332$ &c; & le rapport du diametre à la circonférence, comme on l'a donné (484).

570. Avant de terminer cette matiere, nous remarquerons que les formules déja trouvées pour les valeurs de *tang* nA, *sin* nA, &c. peuvent servir à trouver les sinus, cosinus, tangentes, cotangentes des arcs multiples. Car faisant *sin* $a = s$, *cos* $a = c$, *tang* $a = t$, on aura la Table suivante.....

$\sin a = s$	$\cos a = c.$
$\sin 2a = 2sc.$	$\cos 2a = c^2 - s^2.$
$\sin 3a = 3sc^2 - s^3.$	$\cos 3a = c^3 - 3cs^2.$
$\sin 4a = 4sc^3 - 4cs^3.$	$\cos 4a = c^4 - 6c^2s^2 + s^4.$
$\sin 5a = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5.$	$\cos 5a = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4.$
&c.	&c.

$\text{tang } a = t.$	$\cot a = \frac{1}{t}.$
$\text{tang } 2a = \frac{2t}{1-tt}.$	$\cot 2a = \frac{1-tt}{2t}.$
$\text{tang } 3a = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$	$\cot 3a = \frac{1-3tt}{3t-t^3}.$
$\text{tang } 4a = \frac{4t-4t^3}{1-6tt+t^4}.$	$\cot 4a = \frac{1-6tt+t^4}{4t-4t^3}.$
$\text{tang } 5a = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}.$	$\cot 5a = \frac{1-10t^2+5t^4}{5t-10t^3+t^5}.$
&c.	&c.

571. On peut auſſi par le moyen des mêmes formules trouver les équations qui ſervent à diviſer un arc ou un angle quelconque en un nombre donné de parties égales, Car alors *ſin* (nA) eſt connu, & on cherche *ſin* A. Soit donc *ſin* (nA) $= b$, *ſin* A $= x$, & *cos* A $= z$; on aura cette équation à réſoudre .... $b = nz^{n-1}x - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} z^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} z^{n-5}x^5 -$ &c. Ainſi en donnant à n les valeurs ſucceſſives 2, 3, 4, 5, &c, les équations ſuivantes ſerviront à diviſer un arc en autant de parties égales.

$b = 2z x = 2x\sqrt{(1 - xx)}$ ..... pour 2 parties.
$b = 3z^2 x - x^3 = 3x - 4x^3$ 3
$b = 4z^3 x - 4z x^3 = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-xx)}$ 4
$b = 5z^4 x - 10z^2 x^3 + x^5 = 5x - 20x^3 + 16x^5$ 5
&c.

572. Pour faire quelque application de ces principes, nous allons donner la méthode de réſoudre par approximation toute équation du troiſieme degré dans le cas irréductible.

Selon ce que nous venons de voir, ſi a eſt un arc dont le ſinus $= b$, on aura $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, ou x, en réſolvant cette équation $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}b = 0$, & lorſque le rayon du cercle, au lieu d'être $= 1$, ſera $= r$, on aura $x^3 - \frac{3}{4}r^2 x + \frac{1}{4}br^2 = 0$.

Obſervons maintenant que les arcs $180° - a$, $-(180° + a)$ ont le même ſinus que l'arc a, enſorte que pour les diviſer en trois parties égales, on a la même équation, $x^3 - \frac{3}{4}r^2 x + \frac{1}{4}br^2 = 0$, à réſoudre; d'où il ſuit que les trois racines de cette équation, ſont $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $\mathit{ſin}\ \frac{180° - a}{3}$, $-\mathit{ſin}\ \frac{180° + a}{3}$, ou $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $\mathit{ſin}\ (60° - \frac{1}{3}a)$, $-\mathit{ſin}\ (60° + \frac{1}{3}a)$.

Cela poſé, ſoit l'équation à réſoudre $x^3 - px + q = 0$, (ſi elle étoit $x^3 - px - q = 0$, il ſeroit facile de la ramener à la forme précédente, en faiſant $x = -y$); en comparant cette équation à $x^3 - \frac{3}{4}r^2 x + \frac{1}{4}br^2 = 0$, on a $\frac{3}{4}r^2 = p$, $\frac{1}{4}br^2 = q$, d'où l'on tire $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $b = \frac{3q}{p}$. Donc ſi l'on décrit un cercle dont le rayon ſoit $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, l'arc de ce cercle qui aura pour ſinus $\frac{3q}{p}$, étant nommé a, on aura $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $\mathit{ſin}\ (60° - \frac{1}{3}a)$, $-\mathit{ſin}\ (60° + \frac{1}{3}a)$, pour les trois valeurs de x. Mais tout ſinus doit être plus petit que le rayon; il faut donc que $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ ſurpaſſe $\frac{3q}{p}$, ou que $\frac{1}{27}p^3$ ſoit plus grand que $\frac{1}{4}q^2$. D'où il ſuit que *toutes les équations du troiſieme degré dans le cas irréductible ſont réſolubles par cette méthode.*

573. Repréſentons par R le rayon des Tables, & nous aurons $\frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ pour le ſinus tabulaire de l'arc a, ou $\mathit{ſin}\ a = \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$. Or a étant connu, $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $\mathit{ſin}\ (60° + \frac{1}{3}a)$, $-\mathit{ſin}\ (60° + \frac{1}{3}a)$ le ſeront auſſi, & par conſéquent les trois racines de la propoſée, ſeront (en ramenant ces ſinus à ceux qui conviennent au rayon $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$), $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\mathit{ſin}\ (60° - \frac{1}{3}a)$, $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\mathit{ſin}\ (60° + \frac{1}{3}a)$.

Ex. I. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ qui donne $p = 3$, $q = 1$; d'où

$\sin a = \frac{1}{2}R$, & $a = 30°$. Les trois valeurs de x ſont donc $x = \frac{2\sin 10°}{R} = 0,3472964$, $x = \frac{2\sin 50°}{R} = 1,5320888$, $x = -\frac{2\sin 70°}{R} = -1,8793852$.

Ex. II. Soit $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, on aura $p = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $\sin a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Donc $a = 60°$, & les trois valeurs de x ſont $x = \frac{2\sin 20°}{R\sqrt{3}} = 0,3949313$; $x = \frac{2\sin 40°}{R\sqrt{3}} = 0,7422127$; $x = -\frac{2\sin 80°}{R\sqrt{3}} = -1,1371158$.

Ex. III. Soit encore l'équation $x^3 - 5x + 3 = 0$, qui donne $p = 5$, $q = 3$, $\sin a = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$, & $L\sin a = LR + \frac{5}{2}L3 - L2 - \frac{3}{2}L5 = 9.8433188 = L\sin 44°11'52''$, donc $a = 44°11'52''$, & les trois valeurs de l'inconnue ſont, $x = \frac{2\sqrt{5}\sin(14°43'57'')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{2\sqrt{5}\sin(45°16'3'')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{-2\sqrt{5}\sin(74°43'57'')}{R\sqrt{3}}$. En faiſant le calcul on trouvera . . . $x = 0.656625$, $x = 1.834238$, $x = -2.490863$.

REM. Quoiqu'il y ait une infinité d'autres arcs dont les ſinus ſont les mêmes que celui de l'arc a, ils ſont tels cependant que les ſinus de leurs tiers peuvent ſe ramener à l'une de ces trois formes, $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin(60° - \frac{1}{3}a)$, $-\sin(60° + \frac{1}{3}a)$. Ainſi l'équation du troiſieme degré, réſolue par cette méthode, n'aura jamais que trois racines, comme cela doit être.

Réſolution des Triangles Rectilignes.

574. TOUT triangle rectiligne peut être inſcrit dans un cercle, & dans ce cas chaque côté de ce triangle ſera la corde d'un arc double de celui qui meſure l'angle oppoſé, c'eſt-à-dire, le double du ſinus de cet angle meſuré dans ce cercle : donc les côtés du triangle ſeront entre eux comme les ſinus des angles oppoſés, meſurés dans ce même cercle, & par conſéquent comme les ſinus des mêmes angles meſurés dans le cercle qui a pour rayon celui des Tables. On a donc cette propoſition dont l'uſage eſt ſi fréquent dans la pratique de la Trigonométrie...

Dans tout triangle les ſinus des angles ſont proportionels aux côtés oppoſés à ces mêmes angles. 101.

575. Donc 1°, dans tout triangle rectangle BAC, le ſinus de l'angle droit A, ou le rayon, eſt à l'hypoténuſe BC : : *ſin* C : AB : : *ſin* B : AC.

2°, Puiſque dans tous les triangles rectangles, le ſinus d'un angle aigu C, eſt le coſinus de l'autre angle aigu B, on a donc *ſin* C = *coſ* B, & réciproquement. Donc au lieu de la propoſition *ſin* B : *ſin* C : : AC : AB, on pourra toujours ſubſtituer celle-ci.

ſin B : *coſ* B : : AC : AB.

Mais on a d'ailleurs (546) *ſin* B : *coſ* B : : *tang* B : R; donc AC : AB : : *tang* B : R : : *cot* C : R.

Il n'en faut pas davantage pour réſoudre le triangle rectangle ABC, quand outre l'angle droit A on connoît deux de ces cinq choſes, B, C, AB, AC, BC; pourvu cependant que ce ne ſoient pas les deux angles. Car alors on ne pourroit connoître que le rapport des trois côtés. Voyez la Table ſuivante.

FIG. 100.

TABLE pour la Réſolution des Triangles Rectangles.

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
AB, AC	BC	$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$.
	B	AB : AC :: R : *tang* B.
	C	AC : AB :: R : *tang* C.
AB, BC	AC	$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$.
	B	BC : AB :: R : *cof* B.
	C	BC : AB :: R : *ſin* C.
AC, BC	AB	$AB = \sqrt{(BC^2 - AC^2)}$.
	B	BC : AC :: R : *ſin* B.
	C	BC : AC :: R : *cof* C.
AB, B	AC	R : *tang* B :: AB : AC.
	BC	*cof* B : R :: AB : BC.
AC, B	AB	R : *cot* B :: AC : AB.
	BC	*ſin* B : R :: AC : BC.
AB, C	AC	R : *cot* C :: AB : AC.
	BC	*ſin* C : R :: AB : BC.
AC, C	AB	R : *tang* C :: AC : AB.
	BC	*cof* C : R :: AC : BC.
BC, B	AB	R : *cof* B :: BC : AB.
	AC	R : *ſin* B :: BC : AC.
BC, C	AB	R : *ſin* C :: BC : AB.
	AC	R : *cof* C :: BC : AC.

Quant aux triangles *obliquangles*, ou qui n'ont pas d'angle droit, leur ſolution ſe réduit à celle des problêmes ſuivants.

576. I. Etant donnés deux angles quelconques B, A, & un côté BC, trouver les deux autres côtés BA, AC. FIG. 102.

Faites la proportion *sin* A : BC : : *sin* B : AC = $\frac{BC \times \sin B}{\sin A}$: : *sin* C : AB : : *sin* (A + B) : AB = $\frac{BC.\sin(A+B)}{\sin A}$.

Si BA eût été le côté donné, on auroit eu *sin* (A + B) : BA : : *sin* B : AC : : *sin* A : BC.

Supposons par exemple A = 88°, B = 36°, & BC de 56 toises, on trouvera Log. AB = L 56 + L *sin* 56° — L *sin* 88° = 1,667027; d'où AB = 46', 454, on trouvera de même AC = 32', 936.

577. II. Etant donnés deux côtés & un angle, trouver l'autre côté & les deux autres angles, sachant d'ailleurs de quelle espece ils sont ...

Ou l'angle donné est opposé à l'un des côtés connus, ou il est compris entre ces mêmes côtés, ce qui fait deux cas différents.

I. Cas. Soient donnés les côtés AB & AC avec l'angle B, on aura d'abord l'angle C par cette proportion .... AC : *sin* B : : AB ; *sin* C ; ce qui fera connoître le troisieme angle A. On aura donc ensuite le côté BC par la proportion ... *sin* B : AC : : *sin* A : BC.

Mais pour trouver immédiatement le côté BC, soit menée la perpendiculaire AD sur le côté BC, & soit nommé AB *(a)*, AC *(b)*, *sin* B *(s)*, *cos* B *(c)* on aura R : AB *(a)* : : *sin* B *(s)* : AD = $\frac{as}{R}$: : *cos* B *(c)* : BD = $\frac{ac}{R}$. Donc DC = $\sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(bb - \frac{a^2 s^2}{R^2})}$, & DC + BD = BC = $\frac{ac}{R} + \sqrt{(bb - \frac{a^2 c^2}{R^2})}$.

578. II. Cas. On donne l'angle A & les deux côtés AB, AC qui comprennent cet angle ; il s'agit de trouver les deux autres angles B & C, & le troisieme côté BC.

Donc AC + AB : AC — AB : : *sin* B + *sin* C : *sin* B — *sin* C .... Or (556) $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{tang\ \frac{1}{2}(B+C)}{tang\ \frac{1}{2}(B-C)}$. Donc AC + AB : AC — AB : : *tang* $\frac{1}{2}$ (B + C) : *tang* $\frac{1}{2}$

FIG. (B — C). Mais puiſque B + C = 180° — A ; on a donc $tang \frac{1}{2}(B+C) = tang(90° - \frac{1}{2}A) = cot \frac{1}{2}A$; AC + AB : AC — AB :: $cot \frac{1}{2}A : tang \frac{1}{2}(B-C)$.

Et par conſéquent connoiſſant B — C & B + C, il ſera facile d'avoir les angles B & C, & on aura *ſin* B : AC :: *ſin* A : BC, ce qui fera connoître le troiſieme côté BC.

102. On peut encore réſoudre ce problême de la maniere ſuivante. Soit menée la perpendiculaire BF ſur le côté AC, & ſoit AB = a, AC = b, *ſin* A = s, *cof* A = c, on aura $R : a :: s : BF = \frac{as}{R} :: c : AF = \frac{ac}{R}$. Donc $FC = b - \frac{ac}{R}$. Or dans le triangle rectangle BFC, on a $FC\ (b - \frac{ac}{R}) : BF\ (\frac{as}{R}) :: R : tang\ C = \frac{aRs}{bR - ac}$. De même $tang\ B = \frac{bRs}{aR - bc}$.

Si l'angle A eſt obtus, c devient négatif, & on a $tang\ C = \frac{aRs}{bR + ac}$, & $tang\ B = \frac{bRs}{aR + bc}$.

Le triangle rectangle BFC donne $BC = \sqrt{[\frac{a^2s^2}{R^2} + (b - \frac{ac}{R})^2]} = \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2abc}{R})}$, ou $\sqrt{(a^2 + b^2 + \frac{2abc}{R})}$, ſi l'angle A eſt obtus.

579. De la proportion .... AC + AB : AC — AB :: $tang \frac{1}{2}(B+C) : tang \frac{1}{2}(B-C)$, il ſuit que *dans tout triangle la ſomme de deux côtés quelconques eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles oppoſés à ces côtés eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

Soit donc AC = a, AB = d, l'angle B = b, l'angle C = c; on aura $tang \frac{1}{2}(b+c) : tang \frac{1}{2}(b-c) :: a + d : a - d :: R : \frac{a-d}{a+d}R :: R : \frac{\frac{a}{d}R - R}{\frac{a}{d} + 1}$.

Donc ſi $\frac{aR}{d}$ repréſente la tangente d'un arc quelconque u, on

aura $R : \frac{R\ tang\ u - R\ R}{tang\ u + R}$, ou $R : tang\ (u - 45°) :: tang\ \frac{1}{2}(b+c) : tang\ \frac{1}{2}(b-c)$. D'où il suit que si on fait cette proportion.... le plus petit côté AB est au plus grand AC :: R : la tangente d'un arc quelconque u, & si on ôte 45° de cet angle, le rayon sera à la tangente du reste :: $tang\ \frac{1}{2}(b+c) : tang\ \frac{1}{2}(b-c)$. FIG.

580. III. Etant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver ses trois angles.

Soit BC $= a$... AB $= b$..., AC $= d$... R $= 1$; on aura $cos\ B = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}$. Donc $1 - cos\ B = \frac{d^2 - a^2 + 2ab - b^2}{2ab} = \frac{d^2 - (a-b)^2}{2ab} = 2\ sin^2\ \frac{1}{2}B$; d'où on peut tirer cette proportion...

$$ab : \frac{d - a + b}{2} \times \frac{d + a - b}{2} :: R^2 : sin^2\ \frac{1}{2}B,$$

laquelle, en appellant q le demi-périmetre, devient

$$ab : (q-a)(q-b) :: R^2 : sin^2\ \frac{1}{2}B.$$

Et c'est par-là que l'on calcule ordinairement la valeur d'un angle par les trois côtés.

On peut la calculer aussi par la formule $cos\ B = \frac{R}{2ab}(a^2 + b^2 - d^2)$, qui donne . . . . . .

$$2ab : a^2 + b^2 - d^2 :: R : cos\ B.$$

C'est-à-dire que pour trouver un angle quelconque dans un triangle dont on connoît les trois côtés, il faut d'abord faire la somme des quarrés des deux côtés qui comprennent l'angle que l'on cherche, & retrancher de cette somme le quarré du troisieme côté: cela vous donnera un reste. Il faut ensuite faire cette proportion... Le double du rectangle des côtés qui comprennent l'angle cherché est à ce reste, comme le rayon est au cosinus de l'angle cherché.

Si l'angle B est obtus, on aura $cos\ B = \frac{R}{2ab}(d^2 - a^2 - b^2)$. Supposons, par exemple, $a = 25$ Toises... $b = 36$... $d = 40$, nous aurons $a^2 + b^2 - d^2 = 321$... $2ab = 50 \times 36$. Donc $50 \times 36 : 321$, ou $6 : 1,07 ::$ R : cos B & L cos B $= 10.0000000 + L\,1,07 - L\,6 = 9.251233$. Donc l'angle B est de 79° 43′ 38″.

581. On auroit pu trouver la même formule d'une autre maniere. Soit F le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, & FG son rayon, en gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, faisant de plus $q =$ la moitié du périmetre $a + b + d$, on aura (492) BG $= q - d$, & le rayon FG $= \sqrt{\left(\frac{q-a \cdot q-b \cdot q-d}{q}\right)}$. Or dans le triangle rectangle BFG, 103.

on a BG : FG : : R $tang$ FBG = $tang \frac{1}{2}$ B, ou BG^2 : FG^2 : : R^2 : $tang^2 \frac{1}{2}$ B : : $(q-d)^2 . q : q-a . q-b . q-d$ ou $q . q-d : q-a . q-b$: : R^2 : $tang^2 \frac{1}{2}$ B ; formule qui donneroit l'angle B. Mais comme elle eſt moins ſimple que la ſuivante, nous ne nous y arrêterons pas.

Si l'on ſubſtitue à la place de q, ſa valeur $\frac{a+b+d}{2}$, on aura $(a+b)^2 - d^2 : d^2 - (a-b)^2 : : R^2 : tang^2 \frac{1}{2}$ B. Donc $(a+b)^2 - (a-b)^2$, ou $4ab : a^2 + 2ab + bb - dd : : R^2 + tang^2 \frac{1}{2}$ B : R^2 : : $sec^2 \frac{1}{2}$ B : R^2 : : R^2 : $cos^2 \frac{1}{2}$ B : : R^2 : $\frac{R \times (R + cos B)}{2}$: : 2R : R + cos B, ou $2ab : a^2 + 2ab + bb - dd$: : R : R + cos B. Donc $2ab$: $a^2 + b^2 - d^2$: : R : cos B $= \frac{R}{2ab} (a^2 + b^2 - d^2)$, comme ci-deſſus.

582. Tels ſont les principes de la Trigonométrie. On peut les appliquer à pluſieurs autres problêmes ſur les triangles : mais pour ne pas multiplier les exemples, nous n'en ferons qu'une ſeule application.

Etant donné l'un des angles aigus d'un triangle rectangle avec ſa ſurface, trouver ſes trois côtés.

Soit a l'angle donné, x le côté oppoſé, y l'autre côté, s la ſurface du triangle ; on aura $xy = 2s$, & $x : y : :$ $\sin a : \cos a$. Donc $xy = \frac{y^2 \sin a}{\cos a} = 2s$, & $y = \sqrt{(\frac{2s \cos a}{\sin a})} = \sqrt{(\frac{2s \cot a}{R})} \ldots . x = \sqrt{(\frac{2s \sin a}{\cos a})} = \sqrt{(\frac{2s\, tang\, a}{R})}$; donc l'hypoténuſe $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(\frac{2sR^2}{\cos a \sin a})} = 2\sqrt{(\frac{Rs}{\sin 2a})}$.

FIG.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

583. IMAGINEZ que le demi-cercle PA*p* faſſe une révolution autour de ſon diamètre P*p*; & engendre en tournant, la ſphère APA*p*; il eſt clair que le rayon AC décrira un grand cercle, pendant que les lignes *bd*, *ef* en décriront de plus ou moins petits, ſuivant qu'elles ſeront plus ou moins éloignées du rayon AC. 104.

584. Tout autre demi-grand cercle égal au premier, le demi-cercle APA, par exemple, eût engendré la même ſphère, dans ſa révolution autour du diamètre AA. Donc puiſqu'il y a une infinité de diamètres égaux, autour deſquels la révolution peut également ſe faire, il eſt clair qu'il y a une infinité de grands cercles dans chaque ſphère, & qu'ils ſont tous égaux.

Il y en a auſſi une infinité de petits : mais leur inégalité eſt cauſe que l'on ne s'en ſert point dans la Trigonométrie ſphérique.

585. On appelle ainſi la ſcience qui apprend à réſoudre les triangles formés ſur la ſurface d'une ſphère par trois de ſes grands cercles.

Prenez une boule quelconque, tracez-y trois arcs de cercles dont les plans paſſent par ſon centre (513); ces arcs, par leur rencontre, formeront un triangle ſphérique. Ils en ſeront les côtés.

Chacun de ces arcs appartient donc à un cercle qui a pour centre le centre même de la boule, & à travers duquel on peut ſuppoſer que paſſe perpendiculairement un des diamètres de cette boule.

586. Un diamètre ainſi perpendiculaire au plan d'un grand cercle, s'appelle l'*Axe* de ce cercle. Les deux extrémités de l'axe s'appellent les *Pôles* de ce même cercle. D'où il ſuit que les points P, *p* ſont les pôles du cercle ACA.

Chaque grand cercle de la ſphere a donc ſes deux pôles particuliers, puiſque deux grands cercles ne ſauroient avoir le même axe.

587. Et puiſque l'axe d'un cercle doit toujours être perpendiculaire à ſon plan, & paſſer par ſon centre, il eſt évident 1°, qu'il y forme autant d'angles droits qu'il y a de rayons dans le plan de ce cercle.

2°, Que les arcs qui meſurent ces angles ſont tous de 90°, & par conſéquent égaux, puiſqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Leurs cordes ſont donc égales.

Or ces cordes meſurent les diſtances du pôle de ce cercle aux divers points de ſa circonférence. Donc le pôle d'un cercle quelconque eſt également éloigné de tous les points de ſa circonférence.

588. Ainſi on peut dire que le pôle d'un cercle eſt un point de la ſurface de la ſphere, éloigné de 90° de chaque point de la circonférence de ce cercle : ou, ce qui revient au même, *l'arc compris entre*

FIG. *le pôle d'un cercle & chaque point de ſa circonférence eſt toujours de* 90°.

Il eſt donc bien facile de tracer ſur la ſurface d'une ſphere le cercle dont un des deux pôles eſt connu, & réciproquement de trouver les pôles d'un cercle donné. On a des compas ſphériques avec leſquels on réſout très-facilement ce double problême.

589. Puiſque tous les grands cercles de la ſphere ont un centre commun, la ligne de leur interſection eſt néceſſairement un diametre de la ſphere, lequel eſt en même-temps diamètre de tous ces cercles. Or tout diamètre coupe ſon cercle en deux parties égales; donc deux ou pluſieurs grands cercles ſe coupent en parties égales.

Et par conſéquent, 1° ſi deux arcs de grands cercles ſe ſont déja coupés une fois, ils ne ſe couperont plus qu'à 180° de diſtance du premier point de leur interſection.

Il n'eſt donc pas poſſible d'enfermer entre deux arcs ſeulement la moindre portion d'une ſurface ſphérique, à moins qu'ils ne ſoient chacun de 180°.

Au reſte quel que ſoit le nombre de leurs degrés, ils formeront ſur la ſurface de la ſphere un angle dont il importe de connoître la meſure. Nous allons la chercher.

105. 590. Soient les deux arcs AB & AD que je ſuppoſe de 90° chacun, & qui par leur rencontre en A forment l'angle ſphérique BAD.

Il eſt clair 1°, que les rayons BC & DC ſont l'un & l'autre perpendiculaires ſur AC.

2°, Que ces deux rayons ont entre eux la même inclinaiſon que les plans circulaires ACB & ACD auxquels ils appartiennent.

3°. Que la meſure de cette inclinaiſon eſt l'arc ABD, puiſque l'angle BCD a ſon ſommet au centre.

591. Donc *la meſure d'un angle ſphérique quelconque eſt l'arc de grand cercle compris entre ſes côtés, à* 90° *de diſtance du ſommet de cet angle.*

En général, ſi du ſommet d'un angle ſphérique, pris pour pôle, on décrit un arc de grand cercle, la portion de cet arc, compriſe entre les côtés de l'angle, ſera toujours ſa meſure.

Ce n'eſt pas qu'il ne fût également poſſible de le meſurer par des arcs de petits cercles: car on voit bien que l'angle *b c d*, par exemple, formé par les ſinus des arcs *Ab* & *Ad*, eſt égal à l'angle BCD, & que par conſéquent l'arc *b d* qui lui ſert de meſure eſt du même nombre de degrés que l'arc BD. Mais pour l'uniformité, on a mieux aimé prendre les valeurs des angles ſphériques, ſur les grands cercles décrits de leurs ſommets comme pôles.

592. Les angles ſphériques ſont donc toujours égaux à ceux que forment, à 90° de diſtance de leur ſommet, les ſinus des arcs qu'ils ont pour côtés. Or tout angle formé par deux ſinus doit avoir moins de 180°; dont *tout angle ſphérique a moins de* 180°.

593. De ce que les angles ſphériques ſont égaux à ceux que forment

FIG.

ts ſinus de leurs côtés, il ſuit évidemment 1°, que lorſqu'un arc de grand cercle tombe ſur un autre, les deux angles qui en réſultent ſont égaux à deux angles droits.

2°, Que ſi on prolonge ces deux arcs au-delà de leur point d'interſection, les angles oppoſés au ſommet ſont égaux, comme ceux de leurs ſinus prolongés de même.

3°, Que la ſomme des angles formés autour du point d'interſection eſt de 360°.

594. Suppoſons maintenant que les trois cercles dont les côtés d'un triangle ſphérique ſont partie, ſoient décrits en entier, il eſt clair qu'ils formeront ſur l'autre hémiſphere un triangle parfaitement égal au premier. Il eſt clair auſſi qu'en menant les cordes reſpectives de tous les arcs qui forment ces deux triangles ſphériques, il en réſultera deux triangles rectilignes parfaitement égaux en tout, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous du centre de la ſphere.

Mais on ſait que dans un triangle rectiligne quelconque *abc*, la ſomme de deux côtés eſt plus grande que le troiſieme côté. Donc la ſomme de deux arcs, dans tout triangle ſphérique A B C, eſt plus grande que le troiſieme arc. 106.

On ſait auſſi que la ligne droite eſt la plus courte de celles que l'on peut mener d'un point à un autre point. Donc l'arc de grand cercle qui paſſe par deux points de la ſurface de la ſphere, eſt le plus court que l'on puiſſe mener entre ces deux points. Il en meſure donc la diſtance ſphérique.

595. Nous avons dit (589) qu'il n'étoit pas poſſible d'enfermer de tout côté aucune portion de ſurface ſphérique entre deux arcs ſeulement, à moins qu'ils ne fuſſent chacun de 180°. Donc tout triangle ſphérique CAB réſulte de l'interſection de deux arcs coupés par un troiſieme, avant que ces deux arcs ſe réuniſſent. Or ils ne peuvent ſe réunir qu'à 180° de diſtance de leur premier point de rencontre, donc *chaque côté d'un triangle ſphérique quelconque doit avoir moins de* 180°. 107.

596. Si on prolonge les deux arcs CA & CB du triangle CAB juſqu'à leur réunion en D, il eſt évident que AB ſera plus petit que la ſomme des prolongements AD & DB. Or cette ſomme ajoutée aux deux arcs prolongés CA & CB, n'eſt que de 360°. Donc *la ſomme des côtés d'un triangle ſphérique eſt toujours moindre que* 360°.

597. Quant à la ſomme de ſes angles, il évident qu'elle ne peut jamais être de ſix angles droits, puiſque chaque angle doit avoir moins de 180°. Elle a donc une *limite en plus*, qui eſt 540° : mais n'aura-t-elle pas auſſi une *limite en moins* ? C'eſt ce que nous allons chercher.

598. Des trois angles A, B, C pris ſucceſſivement pour pôles, ſoient décrits les arcs EF, DF, & DE qui par leur rencontre forment le triangle extérieur FDE.

Cette conſtruction nous fait voir 1°, que le point A eſt éloigné de 90° de tous les points de l'arc EF ; 2°, que le point B eſt pareillement à 90° de tous les points de l'arc DF : donc F eſt pôle de l'arc AB.

On prouve de même que les points E & D ſont reſpectivement les pôles des arcs CA & CB.

Cela poſé, ſoient prolongés ces deux arcs CA & CB juſqu'à la rencontre de l'arc DE : on aura EG = 90°, ainſi que DH ; donc EG + DH, ou ce qui revient au même, EG + DG + GH, ou bien encore, ED + GH = 180°. L'arc ED eſt donc le ſupplément de l'arc GH ; & par conſéquent, de l'angle C dont GH eſt la meſure (591).

On prouveroit de la même maniere que les arcs EF & DF ſont les ſuppléments reſpectifs des angles A & B.

Prolongeons maintenant l'arc GC juſqu'à la rencontre de l'arc EF ; nous verrons que GI ſera la meſure de l'angle E, & que la partie AC en ſera le ſupplément, puiſque GC + AI ou GI + AC = 180°. L'arc AB ſera de même le ſupplément de l'angle F, & l'arc BC ſera le ſupplément de l'angle D ; d'où nous pouvons généralement conclure que *ſi des trois angles d'un triangle ſphérique quelconque, pris pour pôles, on décrit trois arcs dont la rencontre forme un nouveau triangle ſphérique, les angles & les côtés de ce dernier triangle ſeront réciproquement les ſuppléments des côtés & des angles qui leur ſont oppoſés dans le premier.*

Ainſi l'angle E du triangle extérieur + l'arc AC qui lui eſt oppoſé dans le triangle intérieur, ont 180° pour meſure : & réciproquement l'arc DE du triangle extérieur + l'angle C qui lui eſt oppoſé dans le triangle intérieur, ont auſſi pour meſure 180°, &c.

599. Ce triangle extérieur DEF s'appelle *le Triangle ſupplémentaire* du triangle ABC. On en fait un grand uſage dans la Trigonométrie ſphérique ; & nous allons nous-mêmes l'appliquer à la recherche de la limite en moins, pour la valeur des trois angles A, B, C.

Ces trois angles ont pour ſuppléments reſpectifs les trois côtés du triangle ſupplémentaire. Ils forment donc avec eux la valeur de ſix angles droits. Or la ſomme de ces trois côtés eſt toujours moindre que quatre angles droits (596). Donc la ſomme des trois angles A, B, C eſt néceſſairement plus grande que 180°.

600. Il réſulte de là 1°, que *la ſomme des angles d'un triangle ſphérique peut varier depuis* 180° *juſqu'à* 540, *excluſivement.* Et que par conſéquent il n'eſt pas poſſible de déduire la valeur du troiſieme angle, de celles des deux autres, comme cela ſe pratique pour les triangles rectilignes.

Il réſulte 2°, que les trois angles d'un triangle ſphérique peuvent être droits, ou même obtus, & à plus forte raiſon aigus, pourvu que dans ce dernier cas, leur ſomme ſurpaſſe au moins 180°.

601. S'il falloit juger du rapport de deux triangles ſphériques dont les trois angles ſeroient reſpectivement égaux, on auroit recours à leurs triangles ſupplémentaires, & on diroit : Les côtés de ces derniers triangles ne peuvent qu'être égaux, chacun à chacun, puiſqu'ils ſont les ſuppléments reſpectifs d'angles égaux. Or cette égalité des trois côtés entraîne celle des trois angles (404). Les deux triangles ſupplémentaires

taires ſont donc parfaitement égaux : leurs angles ont donc des ſuppléments égaux. Mais ces ſuppléments ſont les côtés mêmes des triangles propoſés. Donc *deux triangles ſphériques ſont égaux, toutes les fois que leurs trois angles ſont reſpectivement égaux.* FIG.

C'eſt une propriété remarquable des triangles ſphériques ; elle n'a pas lieu, comme on le ſait, dans les triangles rectilignes, dont on ne peut jamais, en pareil cas, conclure autre choſe que la ſimilitude.

D'ailleurs l'égalité entre deux triangles ſphériques a lieu encore, ſoit lorſque deux côtés reſpectivement égaux forment un angle égal dans chaque triangle, ſoit lorſque deux angles de l'un, égaux à deux angles de l'autre, ſont formés ſur un côté égal. Il eſt aiſé de le démontrer de la même maniere que pour les triangles rectilignes.

602. Soit maintenant le triangle ſphérique CAB, dont je ſuppoſe que les côtés CA & CB ſont égaux. Je voudrois ſavoir ſi les angles oppoſés à ces côtés ſont égaux ? 109.

Je prends CD = CE, & je mene les arcs BD & AE ; ce qui me donne d'abord deux triangles CAE, CBD parfaitement égaux. L'arc AE eſt donc égal à l'arc BD ; d'où je conclus l'égalité de deux autres triangles, ſavoir ABE & ABD. L'angle A & l'angle B ſont donc égaux ; & par conſéquent, *dans tout triangle ſphérique, les côtés égaux ſont oppoſés à des angles égaux.*

La propoſition inverſe ſe démontre par le triangle ſupplémentaire. 110.

603. Si on vouloit prouver que dans un triangle ſphérique ABC, un plus grand angle eſt toujours oppoſé à un plus grand côté, on pourroit dire .... Soit A plus grand que B ; je puis mener un arc DA qui faſſe l'angle DAB égal à l'angle B : j'aurai donc un triangle iſoſcele ABD. L'arc BCD ſera donc égal à AD + DC : mais AD + DC eſt viſiblement plus grand que AC ; donc l'arc BC oppoſé à l'angle A, eſt plus grand que l'arc AC oppoſé à l'angle B.

Au moyen du triangle ſupplémentaire, la propoſition inverſe n'a aucune difficulté.

604. Soit maintenant le triangle ſphérique ABC que l'on ſuppoſe rectangle en A : il peut arriver que l'angle B ſoit oppoſé à un arc qui ait moins de 90°, tel que l'arc AC, ou qui ſoit de 90°, tel que AD, ou qui ait plus de 90°, comme l'arc AE. On demande de quelle eſpece ſera l'angle B dans ces trois cas ? Sera-t-il aigu, droit, ou obtus ? 111.

Puiſque l'arc AD eſt de 90°, & que de plus il eſt perpendiculaire ſur l'arc AB, on ne peut douter que le point D ne ſoit le pôle de AB ; donc en abaiſſant de ce point l'arc DB, on aura un angle droit DBA. L'angle CBA ſera donc aigu, & l'angle EBA ſera obtus. L'angle B eſt donc de même eſpece que le côté qui lui eſt oppoſé. Il en eſt de même de l'angle C.

605. Pour diſtinguer ces angles de celui que l'on a ſuppoſé droit, on les appelle *les angles obliques.* On peut donc dire que *dans tout triangle ſphérique rectangle, chacun des angles obliques eſt de même eſpece que le côté qui lui eſt oppoſé.*

FIG. Cette dénomination d'angles obliques n'empêche pourtant pas qu'ils ne puiſſent être droits auſſi-bien que l'angle A. Ils peuvent même être
111. obtus; mais on eſt convenu de les déſigner ainſi, pour abréger le diſcours; & on appelle hypothénuſe, le côté oppoſé à celui des angles droits que l'on conſidere comme tel. Ainſi BC eſt l'hypothénuſe du triangle BAC.

606. Comme les deux côtés de l'angle droit peuvent être de même eſpece, ou d'eſpece différente, il eſt bon de ſavoir d'avance de quelle eſpece doit être l'hypothénuſe dans chacun de ces deux cas.

Suppoſons donc d'abord que AC & AB aient chacun moins de 90°; l'angle ACB ſera donc aigu, & par conſéquent ſon ſupplément BCD ſera obtus. Le côté BD oppoſé à ce ſupplément, dans le triangle DBC, ſera donc plus grand que le côté BC oppoſé à l'angle CDB (603), lequel doit être aigu par la même raiſon que l'angle ACB.. Or le côté BD n'eſt que de 90°; donc l'hypothénuſe BC doit alors avoir moins de 90°.

112. Suppoſons enſuite que AC & AB aient plus de 90° chacun, & menons un arc BD qui coupe l'arc AC de maniére que AD ſoit de 90°. Cet arc BD ſera auſſi de 90°. Mais l'angle C eſt obtus; l'angle ADB l'eſt de même; ſon ſupplément BDC eſt donc aigu; & comme tel, il doit être oppoſé, dans le triangle BCD, à un côté moindre que celui qui eſt oppoſé à l'angle C... L'hypothénuſe BC eſt donc alors moindre que BD; c'eſt-à-dire, qu'elle a, dans ce ſecond cas comme dans le premier, moins de 90°.

Reſte à ſavoir, ce qu'elle aura dans la ſuppoſition que les deux côtés de l'angle droit aient l'un plus de 90°, & l'autre moins.

113. Soit, par exemple, AB plus grand que le quart de cercle AD; ſoit AC plus petit que AD: on aura l'arc CD de 90°, & l'angle CDA ſera aigu; CDB ſera donc obtus; & par conſéquent l'arc BC qui lui eſt oppoſé, ſera plus grand que CD. Il aura donc plus de 90°.

607. Il ſuit de là que *ſi les deux côtés de l'angle droit d'un triangle ſphérique rectangle ſont de même eſpece, l'hypothénuſe a moins de 90°, & que toutes les fois qu'ils ſont de différente eſpece, l'hypothénuſe a plus de* 90°.

Et comme les angles obliques ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés, on voit bien qu'ils peuvent également ſervir à faire connoître de quelle eſpece eſt l'hypothénuſe.

608. Comme auſſi l'hypothénuſe peut ſervir, à ſon tour, à déterminer de quelle eſpece ſont les côtés de l'angle droit & les angles obliques. Car, par exemple, ſi l'hypothénuſe & un des côtés ſont de même eſpece, l'autre côté a moins de 90°; & toutes les fois que l'hypothénuſe & un des côtés ſont de différente eſpece, l'autre côté a plus de 90°.

Obſervez cependant que dans le cas où un des côtés de l'angle droit ſeroit de 90°, l'hypothénuſe auroit auſſi 90°; & qu'il peut arriver alors que l'autre côté ſoit de 90° comme le premier. Dans ce cas-là, les trois angles ſont droits, cela eſt évident. Il peut arriver auſſi que cet autre

côté ait plus ou moins de 90°. Nous allons expliquer la maniere de ré- 113.
soudre les triangles sphériques dans ces différents cas.

609. On sait par la Trigonométrie rectiligne que les sinus des angles sont proportionels aux côtés opposés à ces mêmes angles. Mais comme dans les triangles sphériques, les côtés sont des arcs de cercle, cette proportion ne peut avoir lieu. Il faut donc tâcher d'en substituer une autre qui convienne à ces sortes de triangles.

Principes & Proportions pour la résolution des Triangles sphériques.

610. Je suppose que le triangle A B C soit rectangle en A, & que 114.
les côtés B A & B C soient prolongés, jusqu'à ce qu'ils aient 90°, l'un en H, l'autre en F.

L'arc F H sera la mesure de l'angle B; F G en sera le sinus; F E, ou H E, ou B E sera le rayon de la sphere; C D le sinus de l'hypothénuse B C, & C I le sinus de l'arc perpendiculaire C A.

Or en menant la ligne D I, on voit que le triangle C D I, rectangle en I, est semblable au triangle F G E, rectangle en G: on a donc...,

F E : C D : : F G : C I.

c'est-à-dire, que le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'arc opposé C A. On prouveroit de même que le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'arc opposé A B. On a donc généralement ce premier principe de solution...

611. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté qui lui est opposé.*

612. Si le triangle A B C est obliquangle, on aura, en abaissant un 115.
arc perpendiculaire C D, les deux proportions suivantes:

R : *sin* A C : : *sin* A : *sin* C D. &

R : *sin* B C : : *sin* B : *sin* C D. 116.

Donc *sin* A : *sin* B : : *sin* B C : *sin* A C; & par conséquent, *dans un triangle sphérique quelconque, les sinus des angles sont proportionels aux sinus des côtés opposés.*

613. Soit maintenant le triangle A B C, rectangle en A, dont les côtés B C & A C soient prolongés jusqu'à 90°, l'un en D, l'autre en E: si on mene l'arc D E, on aura le triangle C D E, rectangle en E, dont les quatre parties C E, C D, D E & D, seront les complémens respectifs des quatre B C, A C, B & A B du triangle A B C: (la démonstration en est facile.) De-là vient le nom de *triangles complémentaires* pour les triangles ainsi formés. Or dans le triangle complémentaire C D E, on a

FIG.

$$R : \sin CD :: \sin D : \sin CE;$$

ou bien . . . . . $R : \cos AC :: \cos AB : \cos BC.$

Donc, *dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un des côtés de l'angle droit, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypothénuse.*

Et par conséquent, *si un triangle sphérique obliquangle est partagé en deux triangles rectangles par un arc perpendiculaire sur la base, on aura toujours les cosinus des segments de la base, proportionels aux cosinus des deux côtés adjacents.*

115. En sorte que dans le triangle ABC, par exemple, après avoir décrit l'arc perpendiculaire CD, on auroit

$$\cos AC : \cos BC :: \cos AD : \cos BD;$$

Or cette proportion en donne une autre, que voici : $\cos AC + \cos BC : \cos BC - \cos AC :: \cos AD + \cos BD : \cos BD - \cos AD.$ De celle-là on peut en tirer une troisieme qui est *(556)*.

$$\cot \frac{AC+BC}{2} : \tang \frac{BC-AC}{2} :: \cot \frac{AD+BD}{2} : \tang \frac{BD-AD}{2}.$$

Mais $AD + DB = AB$, toutes les fois que l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle; on a donc alors, par la substitution des tangentes aux corangentes, une derniere proportion qui est d'un fréquent usage, & que l'on peut énoncer de la maniere suivante.

614. *Dans tout triangle sphérique obliquangle, sur la base duquel on a abaissé un arc perpendiculaire qui tombe en dedans du triangle, la tangente de la demi-base est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés, comme la tangente de la demi-différence de ces côtés est à la tangente de la demi-différence des segments de la base.*

116. Remarquez que si l'arc tomboit en dehors, on auroit $AD - BD = AB$; & qu'il faudroit simplement substituer alors la tangente de la demi-somme des segments à la tangente de leur demi-différence.

117. 615. Revenons maintenant au triangle complémentaire CDE, qui donne

$$R : \sin CD :: \sin C : \sin DE.$$

Donc . . . $R : \cos AC :: \sin C : \cos B;$

C'est-à-dire, que *dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un des côtés de l'angle droit, comme le sinus de l'angle oblique opposé à l'autre côté, est au cosinus de l'autre angle oblique.*

115. & 616. Et par conséquent, *si on abaisse un arc perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle, les sinus des angles du sommet seront proportionels aux cosinus des angles de la base.*

116. Dans le triangle obliquangle ACB, on a donc

$$\sin ACD : \sin BCD :: \cos A : \cos B.$$

118. 617. Soit à présent le triangle ABC rectangle en A, & soient me-

nées les tangentes BP & BQ ; celle-ci pour l'hypothénuſe BC, la premiere pour le côté BA. Si nous menons les ſécantes EP & EQ, dont les extrémités ſoient jointes par la ligne PQ, nous aurons les triangles PEQ & BPQ dont les plans ſeront perpendiculaires à celui de la baſe BAE. Leur interſection PQ ſera donc perpendiculaire au même plan (503), & le triangle BPQ, rectangle en P, ſera ſemblable au triangle GFE. Ainſi nous aurons FIG.

$$FE : GE :: BQ : BP.$$

ou . . . $R : cof B :: tang BC : tang AB.$

On prouveroit de même que

$$R : cof C :: tang BC : tang AC.$$

Donc, *dans tout triangle ſphérique rectangle le rayon eſt au coſinus d'un des angles obliques, comme la tangente de l'hypothénuſe eſt à la tangente du côté oppoſé à l'autre angle.*

618. Si le triangle ABC eſt obliquangle, on pourra abaiſſer ſur ſa baſe l'arc perpendiculaire CD ; ce qui donnera, 115.

$$R : cof ACD :: tang AC : tang CD.$$ &

$$R : cof BCD :: tang BC : tang CD.$$ 116.

D'où l'on tirera,

$$cof ACD : cof BCD :: tang BC : tang AC.$$

C'eſt-à-dire qu'*en abaiſſant un arc perpendiculaire ſur la baſe d'un triangle ſphérique obliquangle, on a toujours les coſinus des angles au ſommet réciproquement proportionels aux tangentes des côtés adjacents.*

619. Et comme dans le triangle complémentaire CDE, on a

$$R : cof D :: tang CD : tang DE,$$ 117.

il eſt évident que l'on a auſſi,

$$R : ſin AB :: cot AC : cot B :: tang B : tang AC.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, le rayon eſt au ſinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique oppoſé à l'autre côté, eſt à la tangente de ce dernier côté.*

620. Le même triangle CDE donne

$$R : ſin CE :: tang C : tang DE ;$$

donc . . . $R : cof BC :: tang C : cot B.$

D'où il ſuit que *dans tout triangle ſphérique rectangle, le rayon eſt au coſinus de l'hypothénuſe, comme la tangente d'un des angles obliques, eſt à la cotangente de l'autre angle.*

FIG.

Application des Principes & des Proportions qui précèdent.

621. Au moyen des propoſitions que nous venons de démontrer, il n'y a point de triangle ſphérique que l'on ne puiſſe réſoudre très-facilement, pourvu que l'on connoiſſe trois de ſes parties. Commençons par les triangles rectangles.

Et d'abord, remarquons que l'angle droit étant toujours donné, il ſuffit de connoître deux des autres cinq parties qui concourent à former ces triangles.

Remarquons enſuite que toutes les combinaiſons différentes d'un nombre m de quantités priſes deux-à-deux, ſont généralement exprimées par $\frac{m \cdot m-1}{2}$ (313). Il eſt donc évident 1°, qu'à cet égard, la réſolution des triangles ſphériques rectangles offre dix de ces combinaiſons. Mais comme pour chaque combinaiſon, on a trois quantités à déterminer, il eſt évident 2°, que toutes les variétés poſſibles de la réſolution des triangles ſphériques rectangles, ſont au nombre de trente.

119. On les a renfermées toutes dans la Table ſuivante, où l'on ſuppoſe que l'angle droit eſt en A, & que les deux autres angles ſont indifféremment déſignés par B & par C.

622. La conſtruction de cette Table eſt uniquement fondée ſur deux proportions déja connues. Nous allons les remettre ici ſous les yeux du Lecteur.

I. Dans tout triangle ſphérique rectangle, le rayon eſt au ſinus de l'hypothénuſe, comme le ſinus d'un des angles obliques, eſt au ſinus du côté qui lui eſt oppoſé (611).

II. Dans tout triangle ſphérique rectangle, le rayon eſt au ſinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique oppoſé à l'autre côté, eſt à la tangente de ce dernier côté (619).

Tantôt on applique immédiatement ces proportions au triangle ABC, tantôt il faut avoir recours à l'un des deux triangles complémentaires CDE, BFG, pour tranſporter enſuite les réſultats au triangle ABC, comme on le verra dans quelques exemples.

TABLE pour la résolution de tous les cas possibles dans un Triangle sphérique ABC, *rectangle en* A. FIG. 119.

Etant donnés	Trouver	PROPORTIONS.
BC & B	AC AB C	R : *sin* BC : : *sin* B : *sin* AC. R : *cos* B : : *tang* BC : *tang* AB. R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* C.
BC & C	AB AC B	R : *sin* BC : : *sin* C : *sin* AB. R : *cos* C : : *tang* BC : *tang* AC. R : *cos* BC : : *tang* C : *cot* B.
AC & C	AB BC B	R : *sin* AC : : *tang* C : *tang* AB. R : *cos* C : : *cot* AC : *cot* BC. R : *cos* AC : : *sin* C : *cos* B.
AC & B	AB BC C	*tang* B : *tang* AC : : R : *sin* AB. *sin* B : *sin* AC : : R : *sin* BC. *cos* AC : *cos* B : : R : *sin* C.
AC & BC	AB B C	*cos* AC : *cos* BC : : R : *cos* AB. *sin* BC : *sin* AC : : R : *sin* B. *tang* BC : *tang* AC : : R : *cos* C.
AB & C	AC BC B	*tang* C : *tang* AB : : R : *sin* AC. *sin* C : *sin* AB : : R : *sin* BC. *cos* AB : *cos* C : : R : *sin* B.
AB & B	AC BC C	R : *sin* AB : : *tang* B : *tang* AC. R : *cos* B : : *cot* AB : *cot* BC. R : *sin* B : : *cos* AB : *cos* C.
AB & AC	BC B C	R : *cos* AB : : *cos* AC : *cos* BC. R : *sin* AB : : *cot* AC : *cot* B. R : *sin* AC : : *cot* AB : *cot* C.
AB & BC	AC B C	*cos* AB : *cos* BC : : R : *cos* AC. R : *tang* AB : : *cot* BC : *cos* B. *sin* BC : *sin* AB : : R : *sin* C.
B & C	AB AC BC	*sin* B : *cos* C : : R : *cos* AB. *sin* C : *cos* B : : R : *cos* AC. R : *cot* B : : *cot* C : *cos* BC.

FIG. 119. *Suite de la Table pour la réſolution de tous les cas poſſibles dans un Triangle ſphérique* A B C, *rectangle en* A.

Ce que l'on cherche, doit avoir moins de 90°.
Si B a moins de 90°. Si B C & B ſont de même eſpece. Si B C & B ſont de même eſpece.
Si C a moins de 90°. Si B C & C ſont de même eſpece. Si B C & C ſont de même eſpece.
Si C a moins de 90°. Si A C & C ſont de même eſpece. Si A C a moins de 90°.
Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux.
Si B C & A C ſont de même eſpece. Si A C a moins de 90°. Si A C & B C ſont de même eſpece.
Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux.
Si B a moins de 90°. Si A B & B ſont de même eſpece. Si A B a moins de 90°.
Si A B & A C ſont de même eſpece. Si A C a moins de 90°. Si A B a moins de 90°.
Si B C & A B ſont de même eſpece. Si B C & A B ſont de même eſpece. Si A B a moins de 90°.
Si C a moins de 90°. Si B a moins de 90°. Si B & C ſont de même eſpece.

Pour en faciliter l'intelligence, ſoit l'hypothénuſe BC de 81° 13', & l'angle B de 37° 19'; on demande le côté AC oppoſé à cet angle B. FIG. 119.

Vous voyez que pour réſoudre ce cas-là, il faut faire la premiere proportion de la Table, & dire . . . . . puiſque R : *ſin* BC : : *ſin* B : *ſin* AC, on a donc

Log ſin BC de 81° 13'	9,994877.
Log ſin B de 37° 19'	9,782630.
Somme	19,777507.
Log du Rayon	10.
Reſte	9,777507.

Donc AC eſt de 36° 48', ou de 143° 12' qui en eſt le ſupplément: mais pour ſe décider ſur le choix de la valeur convenable, il faut ſe rappeller que le côté AC doit être de la même eſpece que l'angle B qui lui eſt oppoſé (604). Au reſte, pour rappeller au Calculateur les conditions d'où dépend le réſultat qu'il cherche, on les a inſérées dans la derniere colonne de la Table.

623. Si en ſuppoſant la même hypothénuſe BC, & le même angle B, on eût demandé le côté adjacent AB, il eut été facile de chercher d'abord le côté AC comme ci-deſſus, & d'appliquer enſuite la proportion . . . . . .

tang B : *tang* AC : : R : *ſin* AB.

Mais ce procédé eût introduit deux analogies dans un calcul qui peut être terminé par une ſeule. Car dans le triangle complémentaire CDE, on a . . R : *ſin* DE : : *tang* D : *tang* CE; donc en tranſportant cette proportion dans le triangle ABC, elle deviendra . . . R : *coſ* B : : *cot* AB; *cot* BC, ou ſi l'on aime mieux,

R : *coſ* B : *tang* BC : *tang* AB.

On aura donc la valeur de AB par Logarithmes, en diſant . . .

Log *coſ* B	37° 19' =	9,900529
Log *tang* BC . . .	81 13 =	10,811042
Log *tang* AB	=	10,711571

Ce dernier Logarithme répond à 79°, ou à 101°: mais comme BC & B ſont de même eſpece, il faut s'arrêter à la premiere valeur. Le côté AB eſt donc de 79°, ou plutôt en calculant juſqu'aux ſecondes, il eſt de 79° 0' 20".

Enfin pour trouver l'angle C, on ſe fût ſervi du triangle CDE, dans lequel on a . . . . . *ſin* CE; R : : *tang* DE : *tang* C; d'où on tire par la ſubſtitution,

eoſ BC : R : : *cot* B : *tang* C.
ou . . . R : *coſ* BC : : *tang* B : *cot* C.

On a donc la valeur de l'angle C par logarithmes, en faiſant

FIG. 119.

Log *cos* BC . . . . 81° 13′ = 9.183834
Log *tang* B . . . . 37 19 = 9.882101
Log *cot* C . . . . . = 9.065935

Ce qui donne 83° 22′, & non 96° 38′, puiſque BC & B ſont de même eſpece.

624. Si au lieu de connoître l'hypothénuſe, on eût connu le côté adjacent AB, avec le même angle B, & que l'on eût cherché le côté oppoſé AC, il eût fallu alors employer la proportion ſuivante :

R : *ſin* AB :: *tang* B : *tang* AC

qui donne . . . . Log *ſin* AB . . 79° = 9.991947
Log *tang* B . . . 37.19′ = 9.882101
Log *tang* AC . . . . . = 9.874048

D'où on eût conclu que la valeur de A eſt de 36° 48′, comme nous l'avons déja trouvé.

625. Cherchons maintenant l'hypothénuſe BC, en ſuppoſant connues les deux mêmes quantités AB & R.

Ni la premiere, ni la ſeconde des proportions énoncées ci-deſſus (622) ne peut être appliquée immédiatement au triangle ABC : mais dans le triangle complémentaire CDE, on connoît D & DE ; on a donc ... R : *ſin* DE : : *tang* D : *tang* CE ; & en ſubſtituant, on trouve.

R : *cos* B : : *cot* AB : *cot* BC.

Log *cos* B . . . 37° 19′ = 9.900529.
Log *cot* AB . . . 79° = 9.288652.
Log *cot* BC . . . . . = 9.189181.

Donc BC eſt de 81° 13′, puiſque B & AB ſont de même eſpece.

Pour avoir la valeur de l'angle C, dans la même ſuppoſition, on aura recours à l'autre triangle complémentaire BFG, dans lequel R : *ſin* BF : : *ſin* B : FG, ce qui donne, en ſubſtituant,

R : *cos* AB : : *ſin* B : *cos* C

Log *cos* AB . . . 79° = 9.280599.
Log *ſin* B . . . . 37° 19′ = 9.782630.
Log *cos* C . . . . . = 9.063229.

L'angle C eſt donc de 83° 22′, ou ſi on veut pouſſer l'exactitude juſqu'aux ſecondes, de 83° 21′ 33″. Cette petite différence vient de ce que le côté AB eſt ſuppoſé ici de 79°, au lieu que nous avons déja trouvé 79° 0′ 20″ pour ſa valeur.

626. Après avoir déterminé, dans deux cas différents, les trois parties inconnues du triangle rectangle ABC, il nous reſte à examiner les cas où cette détermination eſt impoſſible.

Et d'abord, ſi on ſuppoſe connus le côté AB & l'angle oppoſé C, il

est clair que l'on ne peut connoître de quelle espece est l'hypothénuse : car alors la premiere proportion donne FIG. 119.

$$\textit{sin}\ C : \textit{sin}\ AB :: R : \textit{sin}\ BC.$$

Mais ce dernier sinus appartenant indifféremment à une hypothénuse moindre que 90°, ou à son supplément, il faudroit savoir de quelle espece sont les deux angles obliques, pour se déterminer dans le choix. Faute de cette connoissance, le cas est douteux : aussi est-il marqué comme tel, dans la quatrieme colonne de la Table.

On éprouve le même embarras, quand il s'agit de trouver la valeur du côté AC, les mêmes choses étant données. En effet, par la seconde proportion (622) on a

$$\textit{tang}\ C : \textit{tang}\ AB :: R : \textit{sin}\ AC;$$

mais rien n'indique, dans ce cas-là, de quelle espece est le côté AC.

Même difficulté pour l'angle B, dont la valeur se déduit de la premiere proportion (622), appliquée d'abord au triangle BFG, & transportée ensuite au triangle ABC.

Car on a, dans le triangle BFG,

$$\textit{sin}\ BF : R :: \textit{sin}\ FG : \textit{sin}\ B;$$

ce qui donne, dans le triangle ABC,

$$\textit{cos}\ AB : R :: \textit{cos}\ C : \textit{sin}\ B,$$

sans que l'on puisse savoir de quelle espece est l'angle B.

Voilà donc un premier cas dont les variétés offrent trois solutions ambiguës. Un autre cas parfaitement semblable, celui où l'on suppose connus le côté AC & l'angle opposé B, en offre trois autres. En général, toutes les fois que dans un triangle sphérique rectangle on ne connoîtra qu'un des angles obliques, & le côté qui lui est opposé, la valeur des trois autres parties ne pourra être déterminée.

627. Il y a donc six solutions imparfaites, parmi les trente Problêmes qu'offre à résoudre tout triangle sphérique rectangle. Au reste, on pourroit réduire à seize ces trente questions, en supprimant celles qui sont absolument semblables : mais on est bien aise de trouver dans une Table, la proportion dont on a besoin, sans qu'il y ait aucun changement à faire. Passons maintenant à la résolution des triangles obliquangles.

Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

628. Elle est susceptible d'autant de variétés qu'il y a de combinaisons différentes entre les six parties d'un triangle, prises quatre à quatre. Or il y a quinze de ces combinaisons (313), & chacune a trois cas différents. Il y a donc 45 problêmes à résoudre, pour les triangles obliquangles. Mais comme la résolution des uns entraîne souvent celle des autres, on les a réduits aux douze suivants.

FIG. 120.

PROBLEME I.

629. Dans un triangle sphérique obliquangle A B C, étant donnés deux angles, B & A, & le côté opposé à l'angle A, trouver le côté A C opposé à l'autre angle.

Soit { A = 61° 25'. / B = 82 36. / BC = 59 40. Faites la propor. } co. Log *sin* A = 0.056445. / Log *sin* B = 9.996368. / Log *sin* BC = 9.936062.

sin A : *sin* B : : *sin* BC : *sin* AC. Log *sin* AC = 9.988875.

Le calcul donnera 77° 5', ou 102° 55', sans que l'on puisse se décider entre ces deux résultats, à moins que l'on ne sache d'ailleurs de quelle espece doit être le côté cherché.

II.

630. Etant donnés deux angles A & B, avec le côté BC opposé à l'angle A, trouver le troisieme angle.

115. & 116. Abaissez un arc perpendiculaire CD, & vous aurez dans le triangle BCD *(620)*

R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* BCD.

Puis *(616)* *cos* B : *cos* A : : *sin* BCD : *sin* ACD.

Ajoutant donc ces deux angles, ou soustrayant l'un de l'autre, suivant que les angles donnés A & B sont de même ou de différente espece, vous aurez l'angle cherché C.

Soit A = 61° 25' . . . B = 82° 36' . . . BC = 59° 40', & vous aurez

I°	II°
Log *cos* BC = 9.703317.	*co* Log *cos* B = 0.890099.
Log *tang* B = 10.886467.	Log *cos* A = 9.679824.
Log *cot* BCD = 10.589784.	Log *sin* BCD = 9.396150.
L'angle BCD est donc de 14° 25' *(608)*	Log *sin* ACD = 9.966073.

L'angle ACD est donc de 67° 39', ou de 112° 21' ; ce qui donne 82° 4', ou 126° 46', pour l'angle cherché ABC, sans qu'il y ait moyen de déterminer par les quantités connues la valeur qui doit être préférée.

III.

631. Etant donnés deux angles A & B avec le côté opposé BC, comme dans le problême précédent, trouver le côté AB compris entre ces deux angles.

L'arc perpendiculaire CD forme deux triangles rectangles ACD & DCB, dont le dernier donne *(617)*

R : *cof* B : : *tang* BC : *tang* BD. 115.

D'ailleurs on a (615) *tang* A : *tang* B : : *fin* BD : *fin* AD. &

On aura donc AB = AD ± DB, ſelon que les angles donnés 116.
ſeront de même ou de différente eſpece.

I°		II°	
Log *cof* B	= 9.109901.	*co* Log *tang* A	= − 1.736269.
Log *tang* BC	= 10.232745.	Log *tang* B	= 10.886467.
Log *tang* BD	= 9.342646.	Log *fin* BD	= 9.332478.
BD eſt donc de	12° 25′	Log *fin* AD	= 9.955214.

Le côté AD eſt donc de 64° 25′, ou de 115° 35′; & comme dans cet exemple, les angles A & B ſont de même eſpece, il faut ajouter les deux ſegments BD & AD; par conſéquent le côté AB doit être de 76° 50′, ou de 128°.

IV.

632. Etant donnés deux angles A & C, avec le côté ſur lequel ces angles ſont formés, trouver le troiſieme angle B.

On a d'abord (620) . . . R : *cof* AC : : *tang* A : *cot* ACD.

On a enſuite (616) . . . *fin* ACD : *fin* BCD : : *cof* A : *cof* B.

L'angle BCD ſe trouve en ſouſtrayant ACD de ACB, lorſque l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle : mais toutes les fois que cet arc tombe en dehors, il faut ſouſtraire l'angle ACB de l'angle ACD, pour avoir BCD.

V.

633. Etant donnés, comme ci-deſſus, les deux angles A & C, avec le côté compris AC, trouver l'un des deux autres côtés, BC par exemple.

R : *cof* AC : : *tang* A : *cot* ACD.

(618) *cof* BCD : *cof* ACD : : *tang* AC : *tang* BC.

VI.

634. On ſuppoſe connus deux côtés quelconques, AC & BC par 120.
exemple, avec un des angles oppoſés à ces côtés, tel que l'angle A, trouver l'angle B oppoſé à l'autre côté.

Ce problême ſe réſout par la proporrion ſi connue . . . .

fin BC : *fin* AC : : *fin* A : *fin* B.

Et ſi on donne aux côtés connus & à l'angle A, les mêmes valeurs que ci-deſſus ; on trouvera celle de l'angle B, par le calcul ſuivant,

FIG.

$$\begin{aligned} co\,\text{Log}\,sin\,BC \ldots 59^\circ\ 40' &= 0.063938. \\ \text{Log}\,sin\,AC \ldots 77\ \ 5 &= 9.988869. \\ \text{Log}\,sin\,A \ldots . 61\ 25 &= 9.943555. \\ \text{Log}\,sin\,B \ldots \ldots \ldots &= 9.996362. \end{aligned}$$

L'angle B eſt donc de 82° 36', comme nous l'avons ſuppoſé ; ou de 97° 24' comme nous aurions pû le ſuppoſer auſſi.

Ce problême rentre évidemment dans le premier, ils ne diffèrent entre eux que par une inverſion de termes, dans la proportion qui les réſout l'un & l'autre.

VII.

635. Les mêmes choſes étant données, on demande le troiſieme
115. côté AB

$$R : cos\,A :: tang\,AC : tang\,AD.$$

&

$$cos\,AC : cos\,BC :: cos\,AD : cos\,BD.$$

116.

Par la premiere de ces deux proportions on connoît AD, par la ſeconde on connoît BD: ainſi on aura $AB = AD \pm BD$, ſuivant la poſition de l'arc perpendiculaire.

108. Si on eût rapporté au triangle ſupplémentaire les quantités connues dans le triangle ABC, on eût eu ſimplement à réſoudre ce problême (629) ... Connoître le troiſieme angle, quand on connoît les deux autres & un des côtés qui leur ſont oppoſés. Car ce problême une fois réſolu, on eût trouvé la valeur du côté cherché AB, en prenant le ſupplément de ce troiſieme angle.

VIII.

636. Dans la même hypothèſe, trouver l'angle C, compris entre
115 les deux côtés connus AC & BC.

&

$$R : cos\,AC :: tang\,A : cot\,ACD.$$

116.

$$tang\,BC : tang\,AC :: cos\,ACD : cos\,BCD;$$

d'où l'on tire $ACB = ACD \pm BCD$, ſuivant que les côtés AC & BC ſont de même ou de différente eſpece.

Le triangle ſupplémentaire eſt également propre à réſoudre ce problême, en le rappellant au troiſieme.

IX.

637. Etant donnés deux côtés AC & AB, avec l'angle A compris entre ces côtés, trouver l'autre côté BC.

$$R : cos\,A :: tang\,AC : tang\,AD.$$

$$cos\,AD : cos\,BD :: cos\,AC : cos\,BC.$$

FIG.

X.

638. Les mêmes choſes étant connues, trouver l'un des deux autres angles, l'angle B, par exemple.

$$R : cof\,A :: tang\,AC : tang\,AD.$$
$$fin\,BD : fin\,AD :: tang\,A : tang\,B.$$

XI.

639. Si les trois côtés ſont connus, comment trouver un des trois angles, A, par exemple? ..... On ſait (613) que 115.

$$tang\,\frac{AB}{2} : tang\,\frac{AC+BC}{2} :: tang\,\frac{AC-BC}{2} : tang\,\frac{AD-DB}{2}.$$

Cette premiere proportion fera connoître le ſegment AD, & la proportion qui ſuit, donnera l'angle A;

$$tang\,AC : tang\,AD :: R : cof\,A.$$

Reprenant donc les mêmes valeurs que ci-devant, on aura 1°;

co Log tang ½ (AB)	38° 25′ =	0.100692.
Log tang ½ (AC+BC) ..	68 22½ =	10.401838.
Log tang ½ (AC—BC) ..	8 42½ =	9.185174.
Log tang ½ (AD—DB)	=	9.687704.

La demi-différence des deux ſegments eſt donc de 25° 59′ qui étant ajoutés à la demi-baſe, 38° 25′ donnent 64° 24′ pour le plus grand ſegment AD. Cela poſé, on aura 2°.

co. Log tang AC ... 77° 5′	= - 1.360474.
Log tang AD ... 64 24	= 10.319556.
Log R	= 10.
Log cof A	= 9.680030.

Ce Logarithme répond à 61° 24′. L'angle A eſt donc de 61° 24′. Nous avons pourtant ſuppoſé ailleurs (629) qu'il étoit de 61° 25′. D'où peut donc provenir cette petite différence?

Elle provient des quantités négligées dans l'évaluation des logarithmes: car ſi on eût calculé juſqu'aux ſecondes, on eût trouvé pour la demi-différence des ſegments, 25° 58′ 30″, qui étant ajoutés à 38° 25′, euſſent donné pour la valeur de AD, 64° 23′ 30″. Or le logarithme de *tang* 64° 23′ 30″ eſt 10.319394, lequel ſubſtitué à 10.319556, donne pour réſultat 9.679868, qui répond à 61° 25′.

640. Ce dernier problême peut ſe réſoudre par une ſeule proportion, que l'on trouve démontrée dans pluſieurs Traités de Trigonométrie, & dont il eſt facile de calculer les termes par logarithmes. Nous ne ferons que l'énoncer.

FIG. Le produit des ſinus des côtés AB & AC qui comprennent l'angle cherché A, eſt au produit des ſinus de ce qui reſte de la demi-ſomme des trois côtés, quand on en a ſouſtrait ſéparément ces mêmes côtés AB & AC, comme le quarré du rayon, eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché.

XII.

121. 641. Etant donnés les trois angles, trouver un côté, AC, par exemple. Ce problême, réſolu par le triangle ſupplémentaire, ne différeroit pas du problême précédent : mais on peut auſſi le réſoudre par les deux proportions ſuivantes, en ſuppoſant que l'arc CF coupe en deux parties égales l'angle ACB.

$$\textit{cot}\ \tfrac{1}{2}(A+B) : \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}(B-A) :: \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}C : \textit{tang}\ DCE.$$
$$\textit{tang}\ A : \textit{cot}\ ACD :: R : \textit{cof}\ AC.$$

La premiere donne la valeur de l'angle DCE, qui étant ajouté à l'angle ACE fera connoître l'angle ACD : or celui-ci une fois connu, on trouve bien vîte le côté cherché AC par la ſeconde proportion.

Soit donc $A = 61° 25' \ldots B = 82° 36' \ldots C = 82° 4'$, nous aurons.

co Log *cot* $\frac{1}{2}(A+B)$ . .	72° 0′ 30″	= 0.488439.
Log *tang* $\frac{1}{2}(B-A)$ . .	10 35 30	= 9.271829.
Log *tang* $\frac{1}{2}C$	41 2	= 9.939673.
Log *tang* DCE		= 9.699941.

Ainſi l'angle formé par l'arc perpendiculaire & par celui qui coupe l'angle C en deux parties égales, doit être dans ce cas, de 26° 36′ 59″. Ajoutant donc cette valeur à la moitié de l'angle C, on aura 67° 38′ 59″ pour la valeur de l'angle ACD; & la ſeconde proportion donnera

co Log *tang* A . . . 61° 25′.	= − 1.736269.
Log *cot* ACD. 67° 38′ 59″	= 9.614006.
Log R	= 10.
Log *cof* AC	= 9.350275.

Le côté AC ſera donc de 77° 3′ 18″.

Nous l'avions déja trouvé de 77° 5′ dans la réſolution du premier problême, mais cette différence ne provient que des quantités négligées dans l'évaluation des logarithmes.

642. A cette double ſolution on pourroit en ajouter une troiſieme, déduite de la proportion ſuivante.

Le produit des ſinus des angles A & C eſt au produit des coſinus des deux reſtes que l'on trouve après avoir ſouſtrait ſéparément chacun de ces deux angles, de la demi-ſomme des trois angles, comme le quarré du rayon eſt au quarré du coſinus du demi-côté AC.

643.

643. Et cette proportion peut également s'appliquer aux triangles rectilignes, parce qu'en supposant les triangles sphériques bien petits, leurs côtés sont des arcs insensibles que l'on peut regarder comme des sinus ou des tangentes des angles opposés. Telle est donc l'analogie de la Trigonométrie sphérique avec la Trigonométrie rectiligne, que la plûpart des formules de la premiere peuvent être appliquées à la seconde, par une simple substitution des côtés, aux sinus ou aux tangentes de ces mêmes côtés. FIG.

Vous observerez cependant que les formules où il entre des cosinus & des cotangentes, ne sont pas susceptibles de cette application; & vous savez bien pourquoi.

644. La théorie que nous venons d'exposer, embrasse généralement tous les cas des triangles sphériques. Mais le nombre des proportions à retenir, & celui des précautions qu'il faut prendre suivant les divers cas, n'étant pas réduits au degré de simplicité que l'on pourroit désirer, plusieurs Géomètres ont travaillé successivement à cette réduction.

Nepper, que l'invention des logarithmes a rendu si célèbre, n'a pas été le moins heureux dans cette recherche. Deux seules proportions lui suffisoient pour résoudre presque tous les problêmes de trigonométrie sphérique. On peut voir l'énoncé de ces propositions dans son Ouvrage: il y a cependant une multiplicité de *parties adjacentes*, & de *parties séparées*, qui jointes à ce qu'il appelle *la partie moyenne*, entraînent quelque confusion.

D'autres Géomètres ont réduit toute cette théorie à des formules purement analytiques; mais quand même on donneroit la préférence à ces méthodes, on auroit bien de la peine à se passer entiérement de celle des anciens Géomètres, à cause de la clarté qu'y répandent les figures dont on se sert.

Quelques applications de la Trigonométrie sphérique.

645. Etant donnée la déclinaison d'un astre, trouver son amplitude & son arc diurne pour un lieu dont la latitude est connue.

La solution de ce problême suppose quelques notions d'Astronomie: ainsi tout Lecteur qui n'aura pas déja ces notions, peut passer au Chapitre suivant.

Soit HZO la moitié du Méridien du lieu proposé... HAO la moitié de son Horizon .... EAQ la moitié de l'Equateur .... Z le Zénith... P le Pôle Boréal... A le vrai point d'Est... MN ou EC la déclinaison de l'astre dont il s'agit... C M *c* une partie du parallele que cet astre doit parcourir... PMN un quart de cercle horaire. 122.

Cela posé, on aura l'arc AM pour l'amplitude ortive, l'arc MC ou NE pour l'arc semi-diurne, & on connoîtra dans le triangle rectan-

FIG. gle AMN, le côté MN, l'angle N & l'angle oblique MAN, qui eſt le complément de la latitude donnée.

Ainſi pour connoître AM on fera la proportion ſuivante.

$$\textit{ſin}\ \text{MAN} : \textit{ſin}\ \text{MN} :: \text{R} : \textit{ſin}\ \text{AM};$$

& pour avoir AN, on fera cette autre proportion.

$$\textit{tang}\ \text{MAN} : \textit{tang}\ \text{MN} :: \text{R} : \textit{ſin}\ \text{AN}.$$

Appellant donc la latitude L & la déclinaiſon D, on aura,

$$\textit{ſin}\ \text{AM} = \frac{\textit{ſin}\ \text{D}}{\textit{coſ}\ \text{L}} \ldots \textit{ſin}\ \text{AN} = \frac{\textit{tang}\ \text{D}}{\textit{tang}\ (90° - \text{L})} = \textit{tang}\ \text{D}\ \textit{tang}\ \text{L}.$$

Ce qui donnera pour l'amplitude cherchée deux ſolutions, dont la plus petite ſera la ſeule convenable. On aura auſſi la valeur de AN, qui étant convertie en temps, à raiſon de 15° par heure, fera connoître ce qu'il faut ajouter au quart AE de l'équateur, c'eſt-à-dire, à ſix heures, pour avoir la moitié du temps que cet aſtre doit paſſer ſur l'horizon.

122. Si par hazard on demandoit l'arc ſemi-diurne d'un aſtre dont la déclinaiſon fût auſtrale, il faudroit alors ſouſtraire AN de AE, après les avoir réduits en temps.

EXEMPLE I.

La latitude de Paris eſt de 48° 50′, & on demande quel doit être, par rapport à cette ville, l'arc ſemi-diurne d'une étoile placée à 25° de déclinaiſon auſtrale ?

Log *tang* D	25°	= 9.668673.
Log *tang* L.	48 50	= 10.058287.
Log *ſin* AN		= 9.726960.

Ce qui donne 32° 13′ 40″ pour l'arc AN. Cet arc réduit en temps vaut 2 h 8′ 55″, qu'il faut ſouſtraire de ſix heures, pour avoir l'arc ſemi-diurne de 3 h 51′ 5″; d'où on conclud qu'une étoile placée à 25° de déclinaiſon auſtrale, reſte ſur l'horizon de Paris pendant 7 h 42′ 10″. On trouveroit que ſon amplitude eſt de 39° 56′ 36″, vers le pôle antarctique.

EXEMPLE II.

Quel eſt le plus long jour de l'année pour l'horiſon de Paris, & combien ce jour dure-t-il ? Le plus long jour eſt évidemment celui où le Soleil parcourt le Tropique du Cancer, & comme alors ſa déclinaiſon eſt de 23° 28′ 20″, on a

Log *tang* D . . .	23° 28′ 20″	= 9.637726.
Log *tang* L . . .	48 50	= 10.058287.
Log *sin* AN		= 9.696013.

Ce dernier logarithme répond dans les Tables à 29° 46′ 33″; ce qui fait 1 h 59′ 6″. Donc l'arc semi-diurne du Solstice d'Été est de 7 h 59′ 6″; & par conséquent le plus long jour de l'année pour l'horizon de Paris seroit de 15 h 58′ 12″, si la réfraction n'influoit pas dans sa durée. De quelle quantité y influe-t-elle ? c'est ce que nous allons examiner dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

On sait que la réfraction fait paroître à l'horizon tous les astres qui sont réellement 32′ 20″ au-dessous, en comptant ces 32′ 20″ sur un vertical. Le Soleil paroît donc se lever, avant qu'il ait atteint l'horizon, & le soir on le voit encore, quoique déja au-dessous de ce cercle. Il en résulte par conséquent une augmentation quelconque dans la durée du jour. De combien est-elle ?

Soit D *m d* un demi-cercle tracé parallélement à l'horizon, à 32′ 20″ d'intervalle : il est clair qu'aussitôt que le Soleil est parvenu à ce parallele en *m*, la réfraction l'élévera de 32′ 20″ = *m r*, & le fera paroître sur l'horizon au point *r*. Alors son amplitude apparente sera A *r* c'est-à-dire, que son amplitude vraie sera augmentée de la quantité M *r*, en vertu de la réfraction. 122.

D'ailleurs, puisque le Soleil paroît être à l'horizon, dès qu'il est en *m*, l'arc semi-diurne est représenté par E *n*; ainsi le prolongement du jour est exprimé par N *n*, qu'il s'agit de calculer.

Comme le triangle M *r m* est très-petit, on peut le résoudre par la Trigonométrie rectiligne, qui donne $M m = \frac{m r}{cos\, PMO}$. Or *cos* PMO = *cos* PO. *Sin* MPO = *cos* L. *Sin ang. hor*; donc $M m = \frac{m r}{cos\, L.\ sin\ ang.\ hor.}$

On a d'ailleurs la proportion suivante ;

$$M m : N n :: sin\, PM : 1 :: cos\, D : 1.$$

Donc $N n = \frac{M m}{cos\, D} = \frac{m r}{cos\, D. Cos\, L. Sin\, ang. hor.}$; formule qui fait connoître immédiatement l'effet de la réfraction sur l'heure du lever & du coucher d'un astre quelconque, vu d'une latitude quelconque.

Si nous prenons, par exemple, le Soleil dans le Tropique du Cancer à 23° 28′ 20″ de déclinaison, vu à la latitude de Paris, & si nous faisons *m r* = 32′ 20″ = 1940″, nous aurons N *n* = 3702″.

FIG.

REMARQUE.

Si on imagine le petit arc vertical *m r* prolongé jusqu'au Zénith Z, & si on mene le quart P *m n* d'un cercle horaire, on aura un triangle sphérique Z P *m*, dans lequel on connoîtra le côté Z P, complément de la latitude, le côté P *m*, complément de la déclinaison, & le côté Z *m* qui eſt de 90° 32′ 20″.

D'où il ſuit qu'en réſolvant ce triangle par le Problême XI, on pourra connoître immédiatement l'angle Z P *m*, dont la meſure eſt l'arc ſemi-diurne E *n*. On pourra connoître auſſi l'angle P Z *m* dont la meſure eſt l'arc *r* O, complément de l'amplitude apparente A *r*, ce qui menera à une ſolution plus directe du problême propoſé.

EXEMPLE IV.

Etant données la longitude & la latitude de deux Villes, trouver leur plus courte diſtance.

Pour la connoître, il faut meſurer l'arc de grand cercle qui paſſe par les deux lieux propoſés; car on ſait que ſur la ſurface d'une ſphére le plus court chemin d'un point à un autre, eſt l'arc de grand cercle qui paſſe par ces deux points.

123. Cela poſé, ſoit P le pôle .... E Q une portion de l'équateur .... P C Q & P B E deux quarts de cercle qui paſſent l'un par le point C & l'autre par le point B, que je ſuppoſe être les points donnés. Soit enfin B C l'arc de grand cercle qui meſure leur diſtance. On connoîtra dans le triangle ſphérique P B C, les deux côtés P B & P C, compléments reſpectifs des latitudes données; & l'angle P dont la meſure eſt l'arc E Q, différence des longitudes. Ainſi on connoîtra B C par le problême IX.

Soit, par exemple, la latitude C Q de 48° 50′ 10″, comme elle l'eſt pour Paris, & ſoit B E = 43° 7′ 24″, comme elle l'eſt pour Toulon. Ces deux Villes différent en longitude de 3° 36′ 35″ : ainſi l'angle C P B, ou ce qui eſt la même choſe, l'angle E P Q eſt de 3° 36′ 35″.

Si on fait le calcul, on trouvera B C = 6° 14′ 15″, ce qui donne pour la diſtance de Paris à Toulon, ſans avoir égard à la ſinuoſité des chemins, 178 lieues de 2000 toiſes chacune, en ſuppoſant que le degré moyen du Méridien en France eſt de 57060 toiſes.

EXEMPLE V.

Etant données l'aſcenſion droite & la déclinaiſon d'un aſtre, déterminer ſa latitude & ſa longitude.

124. Soit P le pôle de l'équateur A B C; ſoit N le pôle de l'écliptique E B D; ſoit P M Q le cercle de déclinaiſon, & N M R le cercle de latitude qui paſſent l'un & l'autre par l'aſtre que je ſuppoſe en M.

Le problême ſe réduit à trouver B R & M R, étant donnés B Q &

QM : or dans le triangle PMN, on connoît PM complément de MQ, l'angle MPN complément de BQ, & le côté PN qui eſt égal à l'obliquité de l'écliptique. Il eſt donc bien facile de connoître le troiſieme côté MN qui a pour complément la latitude de l'aſtre, & l'angle PNM qui après avoir ſouſtrait 90°, donne la longitude cherchée. FIG.

EXEMPLE VI.

Connoiſſant la latitude d'un lieu donné & la déclinaiſon d'un aſtre, avec une hauteur de cet aſtre, obſervée à un inſtant quelconque, trouver ſon Azimut, ſa diſtance au Méridien, & l'heure qu'il étoit au moment de l'obſervation.

Soit K le lieu de l'aſtre, quand on obſerve dans ſon parallele CMc; ſoit ZKF un vertical, PK un cercle horaire. On aura KF pour la hauteur obſervée, & ZK pour complément. PK ſera le complément de la déclinaiſon, ZP ſera le complément de la hauteur du pôle. Ainſi on connoîtra les trois côtés du triangle ZPK; & par conſéquent on pourra déterminer l'angle KZP, dont le ſupplément HF ſera l'Azimut de l'aſtre, & l'angle ZPK qui meſure la diſtance de l'aſtre au Méridien, ou le temps qu'il emploiera à y parvenir, s'il n'y eſt pas déja paſſé. On aura donc par ce calcul & par celui de l'aſcenſion droite du Soleil, le temps du paſſage de l'aſtre par le Méridien, & par conſéquent l'heure vraie de l'obſervation. 122.

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES.

646. ON appelle en général *Sections coniques* les ſections faites dans un cône par un plan.

Le cercle, par exemple, eſt une ſection conique, parce qu'en coupant un cône droit par un plan parallele à ſa baſe, la ſection eſt un cercle.

Le triangle eſt auſſi une Section conique, puiſqu'en coupant un cône par le ſommet, la ſection eſt triangulaire.

Mais on a donné ſpécialement le nom de Sections coniques à trois autres Sections du cône, dont nous allons faire connoître l'origine & les propriétés, après avoir indiqué la maniere de les traiter analytiquement.

Notions préliminaires ſur l'uſage de l'Algebre dans la deſcription des Courbes.

DESCARTES ayant imaginé d'appliquer l'Algebre à la Géométrie, on ne tarda pas à ſentir l'utilité dont ces ſortes d'applications pouvoient être. Les Géomètres qui ſont venus après lui, ont tellement profité de cette découverte, qu'elle eſt devenue à jamais célebre par ſa grande fécondité. Ses principaux uſages conſiſtent dans des recherches ſur la théorie des courbes, dont l'étude eſt indiſpenſable quand on veut approfondir les ſciences Phyſico-Mathématiques.

647. L'objet de cette théorie eſt d'exprimer par des équations les loix ſuivant leſquelles on ſuppoſe que des courbes données ont été décrites; & réciproquement, de diriger l'Analyſte, ſoit dans la deſcription des courbes dont il a les équations, ſoit dans la recherche des propriétés de ces mêmes courbes.

Pour cela, on rapporte chaque point de la courbe que l'on veut tracer, à deux droites, dont l'une s'appelle *la Ligne* ou *l'Axe des abſciſſes*, l'autre *la Ligne* ou l'*Axe des ordonnées*. On cherche enſuite

le rapport qui ſe trouve entre les abſciſſes & les ordonnées, & l'expreſſion analytique de ce rapport donne l'équation de la courbe. FIG.

C'eſt ainſi, par exemple, que $yy = 2ax - xx$ exprimant le rapport conſtant d'égalité entre le quarré de chaque ordonnée du cercle, & le rectangle de ſes abſciſſes, on a dit (444) que cette équation appartenoit au cercle.

648. Afin d'abréger, on eſt convenu d'appeller *fonction d'une quantité* toute expreſſion algébrique où cette quantité entre. Ainſi on dit, par exemple, que l'équation au cercle exprime l'égalité conſtante d'une fonction de chaque ordonnée (c'eſt ſon quarré) avec une fonction de chaque abſciſſe correſpondante (c'eſt ſon produit par le reſte du diametre).

On appelle en général *Coordonnées* les abſciſſes, & les ordonnées correſpondantes d'une courbe; & comme la longueur de ces lignes varie à chaque inſtant, on les nomme *variables* ou *indéterminées*, par oppoſition aux quantités *conſtantes* ou *déterminées*.

Le point d'où l'on commence à compter les abſciſſes, s'appelle *l'origine des abſciſſes*. On eſt le maître de la ſuppoſer où l'on veut, avant de chercher l'équation des coordonnées: mais ſa poſition une fois déterminée, il faut la ſuppoſer toujours la même dans les détails du même calcul. Ordinairement on met l'origine des abſciſſes au ſommet, ou au centre de la courbe.

Et comme en partant de leur origine, on peut les prendre de deux côtés oppoſés, on eſt convenu de déſigner les unes par le ſigne +, & les autres par le ſigne —; de maniere qu'une abſciſſe eſt cenſée *poſitive*, lorſqu'elle eſt ſur la partie de l'axe que l'on regarde comme poſitive. Le choix de cette partie eſt abſolument arbitraire: mais quand il eſt une fois fait, on doit s'y tenir.

649. Les ordonnées peuvent être perpendiculaires ou obliques ſur la ligne des abſciſſes, pourvu qu'elles ſoient paralleles entre elles. Communément on les ſuppoſe perpendiculaires, & on en diſtingue de poſitives & de négatives, ſuivant qu'elles ſont d'un côté ou de l'autre de l'axe des abſciſſes. Quelquefois cependant elles partent d'un point fixe: on en verra des exemples dans la ſuite.

Cela poſé, décrivons la courbe qui a pour équation $yy = 2ax - xx$. On ſait déja que c'eſt la circonférence d'un cercle dont le diametre eſt $2a$; mais quand même on ne le ſauroit pas, la conſtruction de cette équation le feroit bientôt connoître.

Soit donc déſignée par a une quantité conſtante que je ſuppoſe $= 5$, & ſoit menée une droite indéfinie BD, ſur laquelle je prends AD $= 10 = 2a$, que je diviſe en dix parties égales AP, PP &c. Soit A l'origine des abſciſſes, BD leur axe; AD la direction des poſitives; AB ſera donc celle des négatives, ſi la courbe cherchée en a. Soit menée enſuite au point A la perpendiculaire indéfinie EF, que je prends pour l'axe des ordonnées, & dont je ſuppoſe que la partie poſitive eſt AE. Soit enfin AP $= x$, & PM $= y$. 125.

FIG. Il eſt clair par l'équation même, $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$, que lorſque $x = 0$, on a $y = 0$; donc la courbe a le point A de commun avec la ligne des abſciſſes. Si on fait $x = 1$, y devient ± 3; ſi $x = 2$, y devient ± 4; enſorte que les valeurs correſpondantes de x & de y ſont.....

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
$y = 0, \pm 3, \pm 4, \pm \sqrt{21}, \pm \sqrt{24}, \pm 5, \pm \sqrt{24}, \pm \sqrt{21}, \pm 4, \pm 3, 0$

125. Or ces valeurs de y déterminent la longueur d'autant d'ordonnées, dont les extrémités M ſont des points de la courbe que l'on cherche; & parce que ces valeurs ſont tout-à-la fois poſitives & négatives, il eſt clair qu'en menant du point A deux *branches* égales, dont l'une paſſe par les points M qui ſont au-deſſus de l'axe des abſciſſes, & l'autre par les points correſpondants qui ſont au-deſſous, on aura la courbe demandée.

Quant à ſa deſcription, elle ſera d'autant plus exacte, que l'on multipliera davantage les diviſions de la ligne AD. C'eſt ainſi que l'on peut décrire une courbe en rapportant chacun de ſes points M à deux lignes BD, EF données de poſition: car ſi l'on acheve le parallélogramme APMN, dont on connoît les deux côtés AP ou NM, & PM, l'interſection de ces deux dernieres lignes donnera le point M de la courbe. On appelle ce parallélogramme, *le parallélogramme des coordonnées*.

Les valeurs de y croiſſant ici de plus en plus juſqu'à un certain terme qui eſt 5, & décroiſſant enſuite dans le même rapport juſqu'à zéro, on doit conclure 1°, qu'il y a une ordonnée PM plus grande que toutes les autres; c'eſt ce que l'on appelle le *Maximum* de l'ordonnée. (La recherche des *Maximum* & des *Minimum* eſt une des plus curieuſes de l'analyſe; nous en donnerons quelques exemples dans la ſuite).

On doit conclure 2°, que la courbe qui a pour équation $yy = 2ax - xx$, eſt une courbe *rentrante & fermée*. Elle ne s'étend pas au-delà du point A; car alors ſes abſciſſes étant négatives, les valeurs de y ſeroient *imaginaires*, ce qui indique qu'il ne peut y avoir aucune de ſes branches au-delà de l'origine des abſciſſes. Cherchons maintenant quelques-unes de ſes propriétés.

650. Du milieu C de la ligne AD, je mene des droites CM, & j'ai autant de triangles rectangles CPM, dans leſquels $CM^2 = PM^2 + CP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; donc puiſque $y^2 = 2ax - x^2$, on aura toujours $CM = a$; c'eſt-à-dire que tous les points M ſont à égale diſtance du centre C, propriété diſtinctive de la circonférence du cercle.

D'ailleurs l'équation $y^2 = 2ax - xx$, donne $x : y :: y : 2a - x$, ou :: AP : PM : PD; donc chaque perpendiculaire PM eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegments du diametre AD, autre propriété du cercle.

Menant enſuite une corde AM, on aura $AM^2 = 2ax$; donc x :

AM : : AM : 2 a; ce qui fait voir que dans la courbe demandée toutes les cordes menées du point A à un des points M ſont moyennes proportionelles entre le diametre AD & le ſegment correſpondant AP, ce qui convient encore au cercle. FIG.

Si l'on mene la corde MD, on aura $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, propriété du triangle rectangle. Donc tous les angles AMD ſont droits, comme ils doivent l'être dans le cercle.

Inſcrivant le quadrilatere AMDM', on trouvera de même que $AM \times M'D + AM' \times MD = AD \times MM'$ (450). Et ainſi des autres propriétés.

651. Soit propoſé maintenant de décrire la courbe dont l'équation aux coordonnées eſt $y^2 = ax$.

On voit d'abord que cette courbe doit couper la ligne des abſciſſes à leur origine, puiſqu'en ſuppoſant $x = 0$, on a auſſi $y = 0$; on voit enſuite qu'elle doit avoir deux branches égales, l'une poſitive, l'autre négative. Ces branches s'étendront à l'infini en s'écartant de leur axe, à meſure que l'on ſuppoſera des valeurs plus grandes pour x. Mais ces valeurs doivent toutes être poſitives, autrement les ordonnées deviendroient imaginaires. La courbe aura donc la forme MAM'. 126.

652. Soit auſſi $yy = xx - aa$. Il eſt clair que ſi la courbe à laquelle appartient cette équation, coupe la ligne des abſciſſes, ou ne fait même que la toucher en quelques points, on les déterminera en ſuppoſant $y = 0$. Or dans cette ſuppoſition on a $x = \pm a$. Ainſi en prenant ſur une droite indéfinie BD un point A pour l'origine des abſciſſes, & deux parties AS, As égales à la quantité donnée a, la courbe doit paſſer par les points S, s que l'on appelle ſes *ſommets*. 127.

Pour connoître la direction de ſes branches, ſoit AD le côté des abſciſſes poſitives; on aura $y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm \sqrt{(x+a)(x-a)}$, ce qui donne deux branches, l'une SM, l'autre SM', dont le cours s'étendra à l'infini, tant que x ſera plus grande que a. Si elle étoit plus petite, y ſeroit imaginaire; la courbe ne paſſe donc pas au-delà du point S, tant que l'on ne prend que des abſciſſes poſitives.

Suppoſons qu'on les prenne négatives, l'équation deviendra... $y = \pm \sqrt{(-x+a)(-x-a)}$. Or tant que les x ſeront plus petites que a, les valeurs de y ſeront imaginaires. Il n'y aura donc aucune partie de la courbe entre les points A & s.

Si $x = a$, on trouve comme ci-deſſus, $y = 0$: ſi $x > a$, alors y a deux valeurs réelles, l'une poſitive, l'autre négative; & ces valeurs croiſſant de plus en plus, la courbe aura deux nouvelles branches oppoſées, mais égales aux deux premieres. L'axe des abſciſſes eſt BD, celui des ordonnées eſt EF; ſuppoſant donc des valeurs à x, on déterminera les y ou les PM, & les parallélogrammes des coordonnées donneront les points M, m &c, par leſquels doit paſſer la courbe demandée. Nous aurons bientôt occaſion d'examiner ſes propriétés.

653. Cherchons la figure de la courbe dont l'équation eſt $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$.

FIG. 128. Je prends BD pour la ligne des abscisses, AD $= a$ pour la direction des positives, AB $= b$ pour la direction des négatives, le point A pour leur origine, EF pour l'axe des ordonnées, & j'ai $y = \pm x \sqrt{(\frac{b+x}{a-x})}$, ce qui donne 1°, $y=0$, lorsque $x=0$; la courbe doit donc passer au point A. 2°, Pour chaque valeur de x, je trouve deux valeurs de y. Il y a donc des ordonnées positives & des ordonnées négatives. Reste à déterminer les points où elles cesseront d'être réelles.

3°, Je prends donc x positive, mais moindre que a ou AD, & j'ai pour y deux valeurs PM, PM' qui croissent de plus en plus, jusqu'à ce qu'ayant pris $x = a$, elles deviennent infinies; car alors j'ai $y = \pm x \sqrt{(\frac{b+x}{0})}$, supposant donc à l'ordinaire, que zéro exprime une quantité infiniment petite, ou que $0 = \frac{1}{\infty}$, y est infinie. C'est-à-dire, qu'il faudroit prolonger à l'infini la ligne GH pour qu'elle rencontrât les deux branches de la courbe.

654. On appelle *Asymptotes* ces lignes qui s'approchant de plus en plus des branches d'une courbe, ne peuvent cependant les rencontrer jamais.

4°, Si $x > a$, y devient imaginaire. La courbe ne peut donc passer au-delà de GH.

5°, Si x est négative, y a deux valeurs, pourvu que x soit moindre que b. La courbe a donc aussi deux branches dans le sens négatif.

6°, Si $x = b$, on a $y = 0$; la courbe doit donc passer au point B. Mais elle ne peut descendre plus bas, puisque $x > b$ rend les y imaginaires.

7°, Faisant $y = 0$, dans la supposition de x négative & $= b$, on a $y^2 = xx(\frac{b-x}{a+x}) = 0$; d'où l'on tire $x^2(b-x) = 0$, qui donne $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. La courbe passera donc une fois au point B, & deux fois au point A, ou elle formera un *nœud*.

655. Lorsque plusieurs branches de la même courbe passent par le même point, ce point s'appelle en général *point multiple*, & en particulier, *point double*, *triple*, &c, lorsque deux ou trois branches viennent s'y réunir. L'Algebre apprend aussi à discerner ces points, & à connoître leur multiplicité.

8°, Si $b = 0$, le nœud s'évanouit, & l'équation $y^2 = x^2(\frac{b+x}{a-x})$, devient $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, qui appartient à une courbe ancienne, nommée *Cissoïde*, dont nous parlerons bien-tôt.

656. Outre les points multiples, il y a encore des *points d'inflexion* & des *points de rebroussement*. Les premiers sont ceux où la courbe,

après avoir tourné sa convexité dans un sens, commence à la tourner dans le sens opposé. Par exemple, la courbe MAM', dont l'équation est $y^3 = a^2x$, a un point d'inflexion en A. FIG. 129.

Les points de rebroussement sont ceux où deux branches de la même courbe se touchent, sans passer au-delà du point de contact. Voyez la courbe m A m'; son équation est $y^3 = ax^2$. 130.

657. Si l'équation des coordonnées est du premier degré, elle appartient toujours à une ligne droite; & c'est pour cela qu'on désigne les droites par le nom de lignes du *premier genre* ou du *premier ordre*.

Si dans l'équation des coordonnées, il n'entre que des yy ou des xx, ou des xy, les lignes qu'elle représente, s'appellent lignes du *second genre*.

Lorsque cette équation est du troisieme degré, les lignes qui en résultent sont du *troisieme genre*, &c. Et comme les lignes du second sont les courbes les plus simples, on les appelle aussi *courbes du premier genre*, ensorte que des lignes du troisieme sont des courbes du second; & ainsi de suite. Il n'y a que la ligne droite qui soit du premier genre. Il y en a quatre du second; soixante-douze du troisieme, comme on peut le voir dans les Opuscules de Newton, (*Enumeratio linearum tertii ordinis*), & dans les Ouvrages des Géomètres plus récents, Euler, Cramer, &c. Il y en a un bien plus grand nombre du quatrieme genre, &c.

658. Mais il faut remarquer que dans cette division des lignes en différents ordres, on ne comprend que les courbes *géométriques*. On nomme ainsi celles qui ont pour abscisses & pour ordonnées des lignes droites dont le rapport peut être déterminé géométriquement. Ainsi une courbe qui auroit pour abscisses des arcs de cercle, ou des lignes droites égales à des sinus, ne seroit pas une courbe géométrique. Ce seroit une des courbes appellées *mécaniques* ou *transcendantes*. Les premieres se nomment aussi des *courbes algébriques*.

Or ce qui fait le principal objet de l'Analyse dans l'examen d'une courbe, c'est 1°, d'en trouver l'équation, lorsque la courbe est donnée, ou de décrire la courbe, si on a déja son équation; 2°, d'en déterminer la tangente; 3°, d'en connoître la *courbure* dans un point donné; 4°, de chercher ses plus grandes ou ses plus petites ordonnées; 5°, de trouver sa quadrature exacte, si elle en est susceptible, ou au moins sa quadrature approchée; 6°, de trouver sa *rectification*, c'est-à-dire, de déterminer la longueur d'une ligne droite égale à l'un quelconque de ses arcs, &c.

Le calcul algébrique ordinaire peut absolument suffire pour toutes ces recherches; mais *le calcul différentiel & le calcul intégral* sont bien plus expéditifs.

FIG.

Origine des Sections Coniques, & leur Equation générale.

131. 659. SOIT coupé un cône droit BCD par un plan quelconque AMP; on demande l'équation de la courbe M A *m* qui réſulte de cette Section.

Si par le ſommet B on fait paſſer un plan BCD perpendiculaire ſur la baſe du cône & ſur le plan coupant AMP, l'interſection de ces deux plans ſera une droite A *a*; & ſi on coupe le cône parallélement à la baſe par un plan FMG, on aura un cercle dont le plan ſera perpendiculaire au triangle BCD, & dont l'interſection avec le plan AMP ſera une droite PM perpendiculaire aux droites A *a*, FG (502). La ligne PM ſera donc une ordonnée commune au cercle & à la ſection M A *m*.

Cela poſé, ſoit AP = *x*, PM = *y*, AB = *c*, l'angle ABA = B; l'angle BA*a* = A; la propriété du cercle donne.... *yy* = FP × PG. Pour trouver l'expreſſion analytique des lignes FP & PG, je mene AE parallele à CD, & PK parallele à BD, l'une & l'autre dans le plan BCD, ce qui donne . . . AB : *ſin* AEB :: AE : *ſin* B. Or AEB = $\frac{180° - B}{2}$ = 90° - $\frac{1}{2}$B; donc *ſin* AEB = *ſin* (90° - $\frac{1}{2}$B) = *coſ* $\frac{1}{2}$B, & par conſéquent AE = $\frac{c \times \textit{ſin}\ B}{\textit{coſ}\ \frac{1}{2}B}$. D'ailleurs le triangle APK donne . . . *ſin* AKP : *ſin* APK, ou *ſin* AEB : *ſin* A*a*E, ou encore *coſ* $\frac{1}{2}$B : *ſin* (A + B) :: *x* : AK = $\frac{x\ \textit{ſin}\ (A+B)}{\textit{coſ}\ \frac{1}{2}B}$; donc KE ou PG = $\frac{c\ \textit{ſin}\ B - x\ \textit{ſin}\ (A+B)}{\textit{coſ}\ \frac{1}{2}B}$.

Quant à l'expreſſion de la partie FP, on a dans le triangle APF... *ſin* AFP, ou *ſin* BFG, ou *ſin* BGF, ou *coſ* $\frac{1}{2}$B : *x* : : *ſin* A : FP = $\frac{x\ \textit{ſin}\ A}{\textit{coſ}\ \frac{1}{2}B}$; donc $yy = \frac{\textit{ſin}\ A}{\textit{coſ}^2\ \frac{1}{2}B}$ [*c x ſin* B − *x x ſin* (A + B)]; équation demandée.

660. Maintenant, il ne peut arriver que trois cas. 1°, Que A + B = 180°, c'eſt-à-dire, que le plan coupant AMP, ſoit parallele au côté BD; alors la ſection conique ſe nomme *Parabole*, & ſon équation
132. eſt $yy = \frac{\textit{ſin}\ A \times \textit{ſin}\ B}{\textit{coſ}^2\ \frac{1}{2}B}\ c\ x = \frac{\textit{ſin}^2\ B}{\textit{coſ}^2\ \frac{1}{2}B}\ c\ x = 4\ c\ x\ \textit{ſin}^2\ \frac{1}{2}B$ (549), ou $y = \pm 2\ \textit{ſin}\ \frac{1}{2}B \sqrt{c\ x}$. La parabole eſt donc une courbe formée par deux branches égales & ſemblables qui s'étendent à l'infini, en s'écartant de plus en plus l'une de l'autre.

661. II°, Si A + B eſt moindre que 180°, il eſt aiſé de voir que le plan A M P prolongé doit rencontrer l'autre côté B D; ainſi la ſection conique qui en réſulte, & qui s'appelle *Ellipſe*, eſt une courbe rentrante formée par deux branches égales, ſemblables, & finies A M *a*, A *m a*. Son équation eſt $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [c x \sin B - x x \sin (A + B)]$. FIG. 131.

662. III°, Si A + B ſurpaſſe 180°, la ſection s'appelle *Hyperbole* & ſon équation eſt $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} (c x \sin B + x x \sin A + B - 180°)$.

Or ſi on imagine un cône B *c d* égal & oppoſé par le ſommet au cône droit B C D, il eſt clair que le plan coupant A M P prolongé le rencontrera, & que de leur interſection réſultera une courbe M' *a m'* égale, ſemblable, & oppoſée à la courbe inférieure M' A *m'*; ou plutôt ces deux courbes que l'on appelle *Hyperboles oppoſées*, ne feront qu'une ſeule & même courbe généralement repréſentée par la même équation. 132.

663. Au lieu de ſuppoſer les mêmes ſections faites dans un cône droit, on eut pû les ſuppoſer faites dans un cône oblique, tel que ſeroit par exemple le cône B C D, ſi l'angle C n'étoit pas égal à l'angle D. On eût alors trouvé pour leur équation générale..... 133.

$$yy = \frac{\sin A}{\sin C \sin D} [c x \sin B - x x \sin (A + B)].$$

Or cette équation a cela de commun avec la précédente, qu'elle appartient à une ellipſe, ou à une parabole, ou à une hyperbole, ſelon que la ſomme des angles A & B eſt moindre ou égale, ou plus grande que 180°.

Dans le premier cas, elle exprime un cercle, toutes les fois que l'angle A eſt égal à l'angle C, ou à l'angle D: car alors on a une des deux équations ſuivantes,

$$y^2 = \frac{c x \sin B}{\sin C} - x^2 \ldots . y^2 = \frac{c x \sin B}{\sin D} - x^2,$$

qui ſont évidemment deux équations au cercle, & qui font voir que dans un cône oblique, on peut faire des ſections circulaires de deux manieres: l'une en coupant le cône parallélement à ſa baſe, l'autre en le coupant par un plan qui faſſe avec un des côtés du triangle par l'axe, un angle égal à celui que l'autre côté du même triangle fait avec ſa baſe.

Dans le troiſieme cas, où l'équation exprime une hyperbole, on peut ſuppoſer $c = 0$, & alors on a $y^2 = \frac{\sin A \sin (A + B - 180°)}{\sin C \sin D} x^2$. Faiſant, pour abréger, le coefficient de x^2 égal à une quantité conſtante $\frac{a^2}{b^2}$, on trouve .... $y = \frac{ax}{b}$, qui eſt l'équation à la ligne

FIG. droite ; d'où on peut conclure, ce qui d'ailleurs eſt évident, que l'hyperbole dégénere en triangle, lorſque $c = 0$, c'eſt-à-dire, lorſque le plan coupant paſſe par le ſommet du cône.

Pour ramener l'équation des ſections du cône oblique à celle des ſections du cône droit, il ſuffit de remarquer que dans celui-ci on a $\sin C \times \sin D = \cos^2 \frac{1}{2} B$.

On a vu l'origine des trois ſections coniques, voici maintenant leurs principales propriétés ; pour en ſimplifier la recherche, nous ſuppoſerons ces courbes décrites ſur un plan.

De la Parabole.

664. L'EQUATION à cette courbe eſt $yy = 4cx \sin^2 \frac{1}{2} B$; donc ſi on fait la quantité conſtante $4c \sin^2 \frac{1}{2} B = p$, on aura $yy = px$. D'où il ſuit que les *quarrés des ordonnées à la parabole ſont entre eux comme leurs abſciſſes.*

En prenant donc une abſciſſe double d'une autre, les quarrés conſtruits ſur les deux ordonnées correſpondantes, ſeront dans le rapport de 2 à 1.

134. La ligne indéfinie AL ſe nomme l'axe de la parabole, le point A en eſt le ſommet, AQ eſt une abſciſſe, MQ eſt l'ordonnée correſpondante à cette abſciſſe, & la quantité conſtante p ſe nomme le *parametre* de l'axe.

On peut toujours déterminer cette quantité p par l'équation $yy = px$, qui donne $x : y :: y : p$. Il ſuffit pour cela, de prendre une abſciſſe & une ordonnée quelconque ; la troiſieme proportionnelle à ces deux lignes ſera le parametre d'une parabole qui paſſera par leurs extrémités.

665. Si on prend l'abſciſſe $AF = \frac{1}{4} p$, le point F ſera ce qu'on appelle le *foyer*, & l'ordonnée DF paſſant par ce point aura pour expreſſion $\sqrt{\frac{1}{4} p^2} = \frac{1}{2} p$. Donc *la double ordonnée* D*d paſſant par le foyer eſt égale au parametre.*

Si ſur LA prolongée, on prend $AG = AF = \frac{1}{4} p$, & ſi par le point G on mene la ligne indéfinie E G *e* parallele à l'ordonnée MQ, cette ligne EG *e* ſe nomme *directrice.*

666. Or $FM = \sqrt{[yy + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = AQ + AG = MH$: donc $FM = MH$; donc *la diſtance d'un point quelconque* M *de la parabole à la directrice, eſt égale à la diſtance de ce même point au foyer* F : propriété qui donne une maniere facile de décrire la parabole par un mouvement continu.

667. Soit en effet l'équerre EHO dont le côté EH puiſſe ſe mouvoir librement le long de la directrice AG, & ſoit un fil OMF égal en longueur à l'autre côté HO ; ſi ayant fixé l'une des extrémités de ce fil au point O, & l'autre au foyer F, on approche l'équerre de l'axe, pour l'en éloigner enſuite en tenant toujours le fil tendu par le moyen d'un ſtile M qui deſcende le long de HO ; je dis que la courbe décrite

ans ce mouvement par le ſtile M ſera une parabole, & que la diſtance FIG.
H à la directrice ſera par-tout égale à la diſtance MF au foyer.
ien n'eſt plus clair, puiſque la partie MO étant commune, & les
ous étant égaux, les reſtes MF & MH ſont néceſſairement égaux.

668. Propoſons-nous maintenant de mener par le point donné M 135.
ar la parabole AM la tangente MT.

Ayant imaginé l'arc M m infiniment petit, ſon prolongement M m T ſera la tangente demandée. Or ſi on mene les perpendiculaires MQ, mq ſur la directrice, & les droites MF, mF au foyer F, enfin mg parallele à Qq, & ſi on ſuppoſe décrit du point F comme centre, & du rayon F m l'arc infiniment petit mr que l'on peut regarder comme un finus, on aura MQ = MF, $mq = m$F : donc MQ — mq, ou Mg = MF - mF, ou Mr. Les triangles rectangles Mmg, Mmr ſont donc égaux & ſemblables, & par conſéquent l'angle m Mr ou TMF = g Mm = QMT = MTF. Donc le triangle MTF eſt iſoſcele, & par conſéquent, ſi on prend FT = FM, la ligne MT menée par les points T & M ſera la tangente demandée.

L'angle MTF = LMO = FMT. Donc *tous les rayons lumineux ou ſonores* OM *paralleles à l'axe* AP, *doivent à la rencontre de la parabole* AM, *ſe réfléchir à ſon foyer* F; car on ſait que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence.

669. Puiſque FM = $x + \frac{1}{4}p$, on a FT — $\frac{1}{4}p$ = AT = x. Donc *la ſoutangente* PT = 2x. Donc *la ſoutangente dans la parabole, eſt toujours double de l'abſciſſe.*

La tangente MT = $\sqrt{(px + 4xx)} = \sqrt{(4\,MF \times x)}$. Si on mene la ligne MN perpendiculaire à la parabole, ou ce qui revient au même, à ſa tangente MT au point M, on aura PN = $\frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x}$ = $\frac{1}{2}p$. Donc *dans la parabole la ſounormale eſt toujours égale à la moitié du parametre.* Quant à la normale MN, ſon expreſſion eſt $\sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(MF \times p)}$. Elle eſt donc moyenne proportionelle entre la diſtance du point M au foyer, & le parametre.

670. Une ligne quelconque MO parallele à l'axe d'une parabole ſe 134.
nomme en général un *diametre.* Le point M en eſt l'origine; le quadruple de la diſtance de ce point au foyer F en eſt le parametre q; ſes ordonnées ſont des droites NP paralleles à la tangente en M, & les abſciſſes de ces ordonnées ſont les lignes MP.

Pour trouver l'équation aux coordonnées du diametre MO, nommons MP (x), PN (y), AQ = AT = a, on aura MQ = $\sqrt{ap}$, $q = p + 4a$, MT = $\sqrt{aq}$; & ſi on mene NL perpendiculaire à l'axe, les triangles ſemblables NRL, MTQ donneront $\sqrt{aq} : y + \sqrt{ap} :: \sqrt{ap} : NL = \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}} + \sqrt{ap} :: 2a : RL = \frac{2ay}{\sqrt{aq}} + 2a$. Or AR = RT — AT = $x - a$; donc AL = $x + a + \frac{2ay}{\sqrt{aq}}$, & par la propriété

FIG. de la parabole, $NL^2 = p \times AL$, ou $\left(\sqrt{ap} + \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}\right)^2 = ap + px + \frac{2apy}{\sqrt{aq}}$; d'où l'on tire en réduisant, $yy = qx$, équation semblable à celle que nous avons trouvée pour les axes : d'où il faut conclure qu'un diametre quelconque MO diviſe en deux également toutes les ordonnées Nn. Par le moyen de ces principes, il eſt facile de réſoudre les problêmes ſuivants.

134. 671. I. L'axe AL d'une parabole étant donné avec ſon parametre p, trouver un diametre MO qui faſſe avec ſes ordonnées un angle donné MP$n = a$.

Le problême ſe réduit à trouver le point Q où la perpendiculaire MQ rencontre l'axe. Soit donc $AQ = x$, le triangle MTQ donnera $2x : \sqrt{px} :: 1 : tang\ a$. D'où $x = \frac{p}{4} cot^2 a$, & le parametre du diametre MO, ou $q = p + 4x = \frac{p}{sin^2 a}$. Il eſt aiſé de voir que ce problême a deux ſolutions.

II. Le parametre q du diametre MO étant donné avec l'origine M de ce diametre & l'angle a qu'il fait avec ſes ordonnées, trouver l'axe AL, ſon origine A & ſon parametre p.

Le problême ſe réduit à trouver la diſtance MQ de l'axe au diametre, enſuite la diſtance AQ afin d'avoir le ſommet A & le parametre p. Or en gardant les mêmes dénominations que dans le problême précédent, on a $MQ = \sqrt{px}$, $q = p + 4x = \frac{p}{sin^2 a}$. D'où l'on tire $p = q\ sin^2 a$, $x = \frac{1}{4} q\ cos^2 a$, $MQ = \pm\frac{1}{2} q\ sin\ a\ cos\ a = \pm\frac{1}{4} q\ sin\ 2a$.

Les propriétés de la parabole trouvent ſouvent leur application dans les Arts & dans les Sciences.

De l'Ellipſe.

136. L'ÉQUATION à l'ellipſe eſt $yy = \frac{sin\ A}{cos^2 \frac{1}{2} B}[cx\ sin\ B - xx\ sin\ (A+B)]$, d'où il ſuit qu'à chaque abſciſſe AP répondent deux ordonnées PM, PM′ égales & oppoſées. Si l'on fait $y = 0$, on aura les deux points où la courbe rencontre la ligne des abſciſſes, c'eſt-à-dire, le *grand axe* Aa. Le premier de ces points eſt en A, où $x = 0$; le ſecond eſt en a, où $x = \frac{c\ sin\ B}{sin\ (A+B)}$, expreſſion conſtante que je ſuppoſe égale au grand axe Aa. Soit donc le grand axe $= 2a$, & on aura $yy = \frac{sin\ A\ sin\ (A+B)}{cos^2 \frac{1}{2} B}(2ax - xx)$.

672.

672. La double ordonnée B C b passant par le milieu C de l'axe A a, ou par le centre de l'ellipse, se nomme *le petit axe*. Pour faire entrer son expression dans l'équation à l'ellipse, nommons-le $2b$, & nous aurons $bb = \frac{\sin A \sin (A + B)}{\cos^2 \frac{1}{2} B} aa$. D'où l'on tire $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. FIG.

Ce qui donne cette proportion $yy : 2ax - xx :: bb : aq$; ou $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$; c'est-à-dire que *dans l'ellipse les quarrés des ordonnées au grand axe sont aux produits de leurs abscisses, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.* 136.

Si on décrit un cercle dont le centre soit C & le rayon C A, on aura $PN^2 = AP \times Pa$. Donc $PN : PM :: a : b :: CB' : CB$.

Les ordonnées de l'ellipse sont donc proportionelles aux ordonnées d'un cercle décrit sur le grand axe; ce qui donne une méthode facile de décrire une ellipse. Il suffit pour cela de faire passer une courbe par une suite de points pris sur les ordonnées d'un cercle, coupées en parties semblables.

673. Si on eût compté les abscisses du centre C, en faisant $CP = x$, on auroit eu $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx) = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$; équation dont nous nous servirons souvent.

Si b étoit égal à a, on auroit $yy = aa - xx$ équation au cercle; on peut donc regarder un cercle comme une ellipse dont les deux axes sont égaux.

L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ donne $xx : bb - yy :: aa : bb$, ou $MQ^2 : BQ \times Qb :: CA^2 : CB^2$. Donc *les quarrés des ordonnées au petit axe de l'ellipse sont aux rectangles de leurs abscisses, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit.*

674. Si de l'une des extrémités B du petit axe & d'un rayon BF égal au demi-grand axe C A, on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points F, f que l'on appelle *Foyers*. La distance C F est donc égale à $\sqrt{(aa - bb)}$, d'où il suit que $AF \times Fa = (a - \sqrt{aa - bb})(a + \sqrt{aa - bb}) = bb = CB^2$. Donc *le petit demi-axe est moyen proportionel entre les distances de l'un des foyers aux deux sommets de l'ellipse.*

675. L'ordonnée DF passant par le foyer a pour expression $\frac{b^2}{a}$, & D d que l'on appelle le *parametre* p *du grand axe* $= \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$. Donc $2a : 2b :: 2b : p$; *le parametre est donc une troisieme proportionelle au grand & au petit axe.* Par analogie à cette propriété on appelle parametre du petit axe de l'ellipse une ligne $q = \frac{2aa}{b}$, troisieme proportionelle au petit & au grand axe.

FIG.

Puiſque $\frac{2bb}{a} = p$, on a $bb = \frac{1}{2}ap$; mettant donc cette valeur dans les équations à l'ellipſe trouvées ci-deſſus, on a $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, & $yy = \frac{p}{2a}(aa - xx)$, ſelon que l'origine des abſciſſes eſt à l'un des ſommets, ou au centre.

676. Les lignes F M, fM menées des foyers à un point quelconque de l'ellipſe, ſe nomment *Rayons vecteurs*, & ſuppoſant F C $= c$, on a F M $= \sqrt{(yy + cc - 2cx + xx)} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{aa} + aa - bb - 2cx + xx)}$ $= \sqrt{(aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa})} = a - \frac{cx}{a}$, & fM $= a + \frac{cx}{a}$. Donc fM + F M $= 2a =$ A a; *la ſomme des rayons vecteurs dans l'ellipſe eſt donc toujours égale au grand axe*, propriété remarquable d'où l'on peut déduire une autre maniere de décrire l'ellipſe.

Ayant attaché à deux points fixes F, f un fil F M f plus grand que F f, on tendra ce fil par le moyen d'un ſtyle M, avec lequel on décrira autour des foyers F, f une courbe qui ſera une ellipſe, puiſque la ſomme des rayons vecteurs ſera par-tout la même.

Or de cette deſcription il ſuit évidemment que ſur le même grand axe on peut décrire un nombre infini d'ellipſes, dont les unes s'approcheront de plus en plus de la figure du cercle circonſcrit; & ce ſeront celles qui auront leurs deux foyers plus proches; pendant que les autres s'applatiront de plus en plus dans le ſens du petit axe, à meſure que leurs foyers ſeront plus éloignés: enſorte que le cercle & la ligne droite ſont les deux limites de toutes ces ellipſes.

137. 677. Soit propoſé maintenant de mener par le point donné M la tangente M T.

Ayant imaginé l'arc M m infiniment petit, on menera des foyers F, f les rayons vecteurs fm, fM, F m, F M, & on décrira des centres F & f & des rayons F M, fm les petits arcs M g, mr, & on aura $fm + m$F $=$ F M $+$ M f, ou fM $- fm =$ M $r =$ F $m -$ F M $= mg$: donc les triangles rectangles m M g, m M r, ſont égaux & ſemblables, & par conſéquent l'angle gm M ou F m T, ou F M T $= m$ M $r =$ L M T. Donc ſi on prolonge le rayon vecteur fM, la ligne M T qui diviſera l'angle L M F en deux également, ſera la tangente demandée.

L'angle L M T $=$ O M $f =$ F M T. Donc tous les rayons partis d'un foyer lumineux F, doivent à la rencontre de l'ellipſe A M ſe réfléchir à l'autre foyer f.

678. Si on mene la normale M N, l'angle fM N ſera égal à l'angle N M F. On aura donc fM : F M :: fN : F N, ou fM $+$ F M $(2a)$: F M $(a - \frac{cx}{a})$ :: fN $+$ F N $(2c)$: F N $= c - \frac{ccx}{aa} = c - x +$

$\frac{b^2 x}{a^2}$. Donc $FN + x - c = PN = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$. C'eſt l'expreſſion de la ſounormale dans l'ellipſe, lorſque l'origine des abſciſſes eſt au centre. Si elle étoit au ſommet, en nommant $AP\ (z)$, on auroit $PN = \frac{bb}{a} - \frac{bbz}{a^2} = \frac{1}{2}p - \frac{pz}{2a}$. FIG.

La Normale $NM = \sqrt{(yy + \frac{b^4 x^2}{a^4})} = \sqrt{[b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^4}(a^2 - b^2)]}$

$= b\sqrt{(1 - \frac{c^2 x^2}{a^4})}$.

La Soutangente $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{\frac{bb}{aa}(aa - xx)}{\frac{bb}{aa}x} = \frac{aa - xx}{x} = \frac{2az - zz}{a - z}$.

Donc $CT = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion; $CP : CA :: CA : CT$, au moyen de laquelle il eſt facile de déterminer le point T par où paſſe la tangente MT.

L'expreſſion de la tangente MT ſe trouve par le moyen du triangle rectangle PMT.

679. Une droite quelconque n CN qui paſſant par le centre de l'ellipſe aboutit aux deux points oppoſés de cette courbe, ſe nomme diametre, & ſi l'on mene DC d parallele à la tangente en N, les diametres DC d, n CN ſont nommés *Conjugués*; les lignes comme MP paralleles à la tangente en N ſont les ordonnées du diametre CN, & les parties CP en ſont les abſciſſes. Enfin le parametre d'un diametre quelconque eſt une ligne troiſieme proportionelle à ce diametre & à ſon conjugué. 138.

680. Soient menées des extrémités D & N les deux ordonnées NQ, DI au grand axe A a, & ſoit $CQ = x$, $DI = u$; à cauſe des triangles ſemblables DIC, NQT, on aura $NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2$, ou $\frac{bb}{aa}(aa - xx) : \frac{(aa - xx)^2}{xx} :: u^2 : aa - \frac{a^2 u^2}{b^2}$. D'où l'on tire $u = \frac{bx}{a}$, ce qui donne $CQ : DI :: a : b$; on trouveroit de même $CI : NQ :: a : b$. Donc $CQ : DI :: CI : NQ$; d'où il ſuit que les triangles DIC, CNQ ſont égaux en ſurface.

Donc 1°, $DI^2 = \frac{b^2 CQ^2}{a^2} = bb - NQ^2$, ou $DI^2 + NQ^2 = bb$.

2°, $CI^2 = \frac{a^2}{b^2} NQ^2 = aa - CQ^2$, ou $CI^2 + CQ^2 = a^2$. 3°, $a^2 + b^2 = CI^2 + CQ^2 + NQ^2 + DI^2 = CD^2 + CN^2$; c'eſt-à-dire que dans l'ellipſe, la ſomme des quarrés de deux diametres conjugué

FIG. quelconques eſt toujours égale à la ſomme des quarrés des deux axes.

4°, Si l'on mene ND, la ſurface du triangle NCD aura pour expreſſion $\frac{1}{2}(DI+NQ)(CI+CQ)-\frac{1}{2}CI\times ID-\frac{1}{2}CQ\times NQ=\frac{1}{2}CI\times NQ+\frac{1}{2}CQ\times DI=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}NQ^2+\frac{b}{a}CQ^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\times\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2)+\frac{b}{a}CQ^2\right)=\frac{1}{2}ab$. Donc la ſurface du

138. parallélogramme CDEN ſera ab, & celle du parallélogramme entier FEHG ſera $4ab=2a\times 2b$. D'où il ſuit que *tous les parallélogrammes circonſcrits à l'ellipſe ſont égaux entre eux & au reſtangle des deux axes.*

681. Soit maintenant le demi-diametre $CN=m$, $CD=n$, l'angle $CPM=DC\,n=p$; on aura 1°, $m^2+n^2=a^2+b^2$; 2°, $ab=mn\,\mathit{ſin}\,p$ qui eſt l'expreſſion de la ſurface du parallélogramme CDNE. Or ces deux équations donnent immédiatement les diametres conjugués & égaux de l'ellipſe : car alors on a $2m^2=a^2+b^2$, ou $m=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$, & $\mathit{ſin}\,p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Donc puiſque ces quantités ſont toujours réelles, chaque ellipſe doit avoir deux diametres conjugués égaux.

Quant à leur poſition, elle dépend de la valeur de CQ; or CQ^2+NQ^2, ou $b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}CQ^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$; donc $CQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$, valeur indépendante de b, & qui fait voir que l'ordonnée NQ prolongée, déterminera les diametres conjugués égaux dans toutes les ellipſes qui auront l'axe A a commun.

682. Cherchons à préſent l'équation aux coordonnés CP, PM, & faiſons $CP=x$, $PM=y$, $NT=q$, $NQ=r$, $QT=s$, $CQ=t$. Si l'on mene PK, MO perpendiculaires à l'axe, & LP perpendiculaire à MO, on aura par les triangles ſemblables NQT, MLP, $ML=\frac{ry}{q}$, $PL=\frac{sy}{q}$; & les deux autres triangles CPK, CNQ donneront $PK=\frac{rx}{m}$, $CK=\frac{tx}{m}$; d'où $CO=\frac{tx}{m}-\frac{sy}{q}$, & $MO=\frac{ry}{q}+\frac{rx}{m}$.

Or par la propriété de l'ellipſe, on a $\frac{a^2}{b^2}MO^2=a^2-CO^2$. Subſtituant donc & ordonnant, on aura $\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}\right)y^2+\left(\frac{a^2r^2}{b^2}-ts\right)\frac{2xy}{mq}+\left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2}+\frac{t^2}{m^2}\right)x^2=a^2$; & puiſque $\frac{a^2r^2}{b^2}=a^2-CQ^2=ts$, on aura $\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}\right)y^2+\left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2}+\frac{t^2}{m^2}\right)x^2=a^2$.

Obſervons maintenant que lorſque $x=0$, $y=n$, ainſi le coeffi-

FIG. 138.

cient de y^2 est $\frac{a^2}{n^2}$; lorsqu'au contraire $y = o$, alors $x = m$, d'où le coefficient de x^2 est $\frac{a^2}{m^2}$. L'équation devient donc $\frac{a^2}{n^2} y^2 + \frac{a^2}{m^2} x^2 = a^2$, qui donne $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, résultat parfaitement conforme à celui de l'équation aux axes.

Il suit de-là 1°, que tout diametre N C n divise en deux parties égales les ordonnées M P m, & par conséquent l'ellipse entiere. 2°, Qu'un diametre quelconque N n est divisé en deux également au centre C; car aux points N & n on a $x^2 = m^2$; d'où $x = \pm m$.

683. PROB. I. Etant donnés les deux demi-axes a & b, trouver deux diametres qui faſſent entre eux un angle donné $p = $ D C n.

On a $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, $m n = \frac{a b}{\sin p}$; donc $m^2 + n^2 + 2 m n = a a + b b + \frac{2 a b}{\sin p}$, & $m^2 + n^2 - 2 m n = a^2 + b^2 - \frac{2 a b}{\sin p}$; donc $m + n = \sqrt{(a^2 + b^2 + \frac{2 a b}{\sin p})}$, & $m - n = \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2 a b}{\sin p})}$ donc $m = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2 + \frac{2 a b}{\sin p})} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2 a b}{\sin p})}$, & $n = \frac{1}{2}\sqrt{}$ &c.

Il ne reſte maintenant qu'à déterminer la direction de l'un des diametres, ou l'angle A C N que j'appelle c. Or le triangle C N T donne $\sin(p - c) : m :: \sin p : CT = \frac{a a}{CQ} = \frac{m \sin p}{\sin(p - c)}$; d'où l'on tire $CQ = \frac{a^2 \sin(p - c)}{m \sin p}$; on a donc dans le triangle rectangle C N Q, $1 : m :: \cos c : \frac{a^2 \sin(p - c)}{m \sin p}$, qui donne $m^2 \cos c \sin p = a^2 \sin(p - c) = a^2 \sin p \cos c - a^2 \sin c \cos p$, ou $\frac{a^2 - m^2}{a^2} \sin p \cos c = \sin c \cos p$; donc $\tang c = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \tang p$.

684. PROB. II. Les deux diametres m & n, & l'angle p qu'ils font entre eux étant donnés, trouver les deux axes, & leur direction.

Des équations $m n \sin p = a b$, & $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$, on déduit en faiſant un calcul ſemblable à celui du problême précédent, $a = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 + 2 m n \sin p)} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 - 2 m n \sin p)}$, & $b = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 + 2 m n \sin p)} - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 - 2 m n \sin p)}$. L'angle C qui donne la direction des axes ſe trouve comme dans le problême précédent.

FIG.

De l'Hyperbole.

685. L'EQUATION $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [cx \sin B + xx \sin (A+B-180°)]$, fait voir que l'hyperbole rencontre son axe AP en deux points, dont l'un est en A, où $x = 0$; l'autre est en a où $x = -\frac{c \sin B}{\sin (A+B-180°)}$; ainsi en supposant que Aa soit égal à $\frac{c \sin B}{\sin (A+B-180°)}$, le point a sera à l'hyperbole opposée M′ a m′. Or les points A, a se nomment les sommets de l'hyperbole, la ligne A a (2 a) en est l'axe, son milieu C en est le centre; enfin une droite Bb = 2 CB = 2 b, telle que $\frac{bb}{aa} = \frac{\sin A \sin (A+B-180°)}{\cos^2 \frac{1}{2} B}$; menée perpendiculairement à l'axe, & passant par le centre C, se nomme le second axe.

139.

686. Les valeurs de b & de a étant substituées dans l'équation de l'hyperbole, donnent $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$. Or cette équation fait voir que la courbe a deux branches AM & Am égales & infinies, dans le sens positif. Mais si x est négative, il n'y aura point de courbe, tant que x sera $< 2a$; si $x > 2a$, les ordonnées seront réelles, & la courbe aura deux autres branches qui s'étendront à l'infini.

Or il est aisé de prouver que ces deux branches sont égales à celles de l'hyperbole *positive*, M A m. Car puisqu'en appellant A P′ $(-x)$, P′ m′ = P′ M′ (y), on a $\frac{a^2}{b^2} yy = -2ax + xx$, si l'on fait aP′ = x′, on aura $x = 2a + x'$, & par conséquent $\frac{a^2 y^2}{b^2} = 2ax' + x'x'$; équation absolument semblable à celle de l'hyperbole M A m.

687. Puisque $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, on a $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$. Donc *dans l'hyperbole les quarrés des ordonnées au premier axe sont aux rectangles de leurs abscisses*, (c'est-à-dire des distances aux deux sommets), *comme le quarré du second axe est au quarré du premier.*

Si on met l'origine des x au centre C, on aura CP = x, ce qui donnera $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, équation un peu plus simple que la précédente. Elle donne $xx = \frac{aa}{bb}(bb + yy)$; donc si on mene MQ

perpendiculaire ſur le petit axe CB, prolongé s'il eſt néceſſaire, & ſi on nomme les coordonnées CQ, MQ, x & y, on aura $MQ^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + CQ^2)$, ou $yy = \frac{aa}{bb}(b^2 + x^2)$, pour l'équation aux coordonnées du ſecond axe. FIG.

688. Si $a = b$, alors l'hyperbole ſe nomme équilatere, & on a pour ſes équations, $yy = 2ax + xx$, $yy = xx - aa$, ſelon que l'origine des abſciſſes eſt au ſommet ou au centre, & l'équation au ſecond axe devient alors ... $yy = aa + xx$.

689. Si, ayant mené BA, on prend de part & d'autre du centre C, $CF = Cf = BA$, les points F, f ſeront les *Foyers* de l'hyperbole. La double ordonnée D d paſſant par l'un des foyers, ſe nomme le parametre, & les lignes FM, fM menées de ces points à ceux de la courbe, ſe nomment *Rayons vecteurs*. 139.

Cela poſé, la diſtance $CF = \sqrt{(aa + bb)}$. Donc $FA \times Fa = \ldots (\sqrt{(aa+bb)} - a)(\sqrt{(aa+bb)} + a) = bb$. *Le ſecond demi-axe de l'hyperbole eſt donc moyen proportionel entre les deux diſtances de l'un des foyers aux deux ſommets.*

L'ordonnée $DF = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 + b^2 - a^2)} = \frac{bb}{a}$; donc le parametre $p = Dd = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$. Il eſt donc troiſieme proportionel au premier & au ſecond axe. On appelle parametre du ſecond axe une ligne q troiſieme proportionelle au ſecond & au premier axe.

690. Si l'on fait entrer l'expreſſion du parametre dans les équations à l'hyperbole, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx) \ldots yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, on aura $yy = \frac{p}{2a}(2ax + xx) \ldots yy = \frac{p}{2a}(xx - aa)$. De même l'équation $yy = \frac{aa}{bb}(bb + xx)$ qui convient au ſecond axe, ſe change en celle-ci ... $yy = \frac{4b^2}{p^2}(bb + xx) = \frac{2a}{p}(\frac{1}{2}ap + xx)$.

691. Soit $CF = Cf = c$, on aura $FM = \sqrt{(yy + xx - 2cx + cc)} = \frac{cx}{a} - a$, & $fM = \frac{cx}{a} + a$. Donc $fM - FM = 2a$. Ainſi *dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs eſt partout égale au premier axe.*

On tire de-là une maniere facile de décrire une hyperbole dont les axes ſoient $2a$ & $2b$. Il faudra prendre un intervalle $Ff = 2\sqrt{(aa+bb)}$,

FIG. & ſe ſervir d'une regle fMO d'autant plus longue que l'on voudra avoir une plus grande portion d'hyperbole; on en fixera une extrémité à l'un des foyers, au point f, par exemple, de maniere qu'elle puiſſe tourner librement autour de ce point. On prendra enſuite un fil FMO égal en longueur à $fMO - 2a$. On fixera l'une des extrémités de ce fil au point O de la regle, & l'autre au foyer F. Cela fait, on écartera la regle de l'axe autant que le fil FMO pourra le permettre, & on l'en approchera enſuite, ayant ſoin de tenir toujours ce fil tendu par le moyen d'un ſtyle M qui coule le long de la regle fMO. La courbe décrite dans ce mouvement par le ſtyle M, ſera une branche hyperbolique AM, puiſque la différence des rayons vecteurs ſera par-tout égale au premier axe.

140. 692. Cette même propriété peut ſervir à mener la tangente MT en un point quelconque M de l'hyperbole. En effet, ſi l'on imagine l'arc Mm infiniment petit, en menant les rayons vecteurs fM, fm, FM, Fm, on prouvera, à peu-près comme dans l'ellipſe, que les angles fmM, MmF ſont égaux, & que par conſéquent ſi l'on diviſe l'angle fMF en deux également par la ligne MT, cette ligne ſera la tangente demandée.

Cela poſé, dans le triangle fMF, on a... $fM : MF :: fT : FT$, ou $fM + FM\left(\frac{2cx}{a}\right) : fM\left(\frac{aa+cx}{a}\right) :: fT + FT\,(2c) :$ $fT = \frac{aa+cx}{x} = \frac{aa}{x} + c$. Donc $fT - c$, ou $CT = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion . . . $CP : CA :: CA : CT$, avec laquelle il eſt facile de trouver le point T, & par conſéquent de mener la tangente MT.

693. On peut remarquer que CT étant égal à $\frac{aa}{x}$, il eſt toujours poſitif tant que x l'eſt. Ainſi toutes les tangentes à l'hyperbole coupent l'axe en des points T ſitués entre A & C. Mais plus l'abſciſſe eſt grande, plus la ligne CT diminue, enſorte qu'elle eſt infiniment petite ou nulle lorſque l'abſciſſe eſt infiniment grande. D'où l'on voit qu'on peut mener par le centre C deux droites CX, Cx qui ſeront les limites des tangentes de l'hyperbole. Ces droites, dont nous allons bientôt déterminer la poſition, s'appellent les *Aſymptotes* de l'hyperbole.

694. La ſoutangente $PT = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$, & la tangente $MT = \sqrt{\left[\frac{bb}{aa}(xx - aa) + xx - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right]} = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left[\frac{aa+bb}{aa}x^2 - bb - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right]}$. Si l'on mene la normale MN,

FIG.

on aura la sounormale $PN = \frac{\frac{bb}{aa}(xx-aa)}{\frac{xx-aa}{x}} = \frac{bbx}{aa}$, & la normale $MN = \sqrt{[\frac{b^4x^2}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)]}$.

695. La ligne $AT = a - CT = a - \frac{aa}{x}$; & si l'on mene AS parallele à MP, on aura $\frac{xx-aa}{x} : y :: a - \frac{aa}{x} : AS = \frac{dy}{x+a} = b\sqrt{(\frac{x-a}{x+a})}$. Or si on suppose x infinie, la quantité $\frac{x-a}{x+a}$ ne différera pas de l'unité. On aura donc alors $AS = b$. D'où il suit que si on mene AD & Ad perpendiculaires à CA & égales chacune au demi-petit axe b, les lignes CD, Cd qui passeront par les points D, d & par le centre C, seront les asymptotes de l'hyperbole MAM', & en les prolongeant en sens contraire, elles seront celles de l'hyperbole opposée.

Si l'hyperbole est équilatere, l'angle DCd fait par les asymptotes est droit. Car alors $DA = Ad = CA$.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes a beaucoup de propriétés; voici les principales.

696. Si par un point quelconque N de l'asymptote, on mene la droite N n parallele à la ligne Dd, ou aura $CA\,(a) : DA\,(b) :: CP\,(x) : NP = \frac{bx}{a}$. Donc $NM = \frac{bx}{a} - y$, & $Mn = \frac{bx}{a} + y$. Par conséquent $NM \times Mn = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = bb = DA^2$. 141.

Puisque $NP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, & que $MP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - bb$, on a donc toujours $NP > MP$. La branche hyperbolique ne peut donc jamais se confondre avec son asymptote.

Elle s'en approche cependant de plus en plus: car à mesure que l'abscisse croît, la différence de $\frac{b^2x^2}{a^2}$ à $\frac{b^2x^2}{a^2} - bb$ devient moins sensible: ensorte qu'elle s'évanouit, si on suppose x infinie.

697. Menons MQ & AL paralleles à l'asymptote Cd. Il est facile de voir que les triangles DLA, LCA sont isosceles. Soit donc $AL = DL = m \ldots CQ = x \ldots QM = y$. Si on mene MK, parallele & égale à CQ, on aura, par les triangles semblables DLA, NQM, MKn; les proportions $MN : DA :: QM : LA$, $Mn : DA ::$

FIG. MK : DL. Donc $Mn \times MN : DA^2 :: QM \times MK : AL^2$. Or $Mn \times MN = DA^2$. Donc $xy = mm$, *équation à l'hyperbole entre ſes aſymptotes*, dans laquelle $mm = \frac{1}{4}(aa + bb)$ eſt ce qu'on appelle *la puiſſance de l'hyperbole.*

142. 698. Si deux paralleles Ff, Gg terminées aux aſymptotes coupent une hyperbole aux points m, h, p, K, on aura $Gp \times pg = Fm \times mf$. Car ſi l'on mene $Mm N$, $Pp Q$ perpendiculaires à l'axe, on aura $Fm : Mm :: Gp : Pp$, $mf : mN :: pg : pQ$. Donc $Fm \times mf : Mm \times mN :: Gp \times pg : Pp \times pQ$. Or (696) $Pp \times pQ = bb = Mm \times mN$. Donc $Fm \times mf = Gp \times pg$. On a donc auſſi $Kg \times KG = fh \times hF$.

699. Si l'on ſuppoſe que les points p, K coïncident en un ſeul point D, la ligne TDt ſera tangente au point D, & on aura $Fm \times mf = Dt \times DT$ & $fh \times hF = Dt \times DT = Fm \times mf$; donc $fh(hm + mF) = Fm(mh + hf)$; donc $fh = Fm$, & par conſéquent $TD = Dt$. Or ſi l'on mene DE parallele à Ct, ou ordonnée à l'aſymptote CT, les triangles ſemblables TDE, TtC, donneront $TE = EC$. Donc pour mener ſur l'hyperbole une tangente en un point D, correſpondant à l'ordonnée DE, il faut prendre $ET = EC$, & mener par les points T, D la tangente TDt.

700. Puiſqu'on a toujours $fh = Fm$, de quelque maniere que l'on mene la droite Ff, les deux parties Fm, fh interceptées entre la courbe & les aſymptotes, ſeront toujours égales.

On tire de là une maniere facile de décrire une hyperbole entre deux aſymptotes données CT, Ct & qui paſſe par un point donné m.

On menera par ce point les droites Ff, MN, &c. on prendra $fh = Fm$, $nN = Mm$, &c; & les points n, h, &c. ſeront à l'hyperbole.

701. Selon ce que nous avons vu (699), une tangente TMt terminée aux aſymptotes eſt diviſée en deux également au point de contact M. Or ſi l'on mene MCM', cette ligne ſe nomme un diametre; la tangente TMt en eſt le diametre conjugué. Ses ordonnées ſont des droites mQm' paralleles au diametre conjugué TMt ou DCd, & le parametre d'un diametre quelconque eſt une ligne troiſieme proportionelle à ce diametre & à ſon conjugué. On nomme encore premier diametre la ligne $MCM' = 2CM$, & ſecond diametre la ligne $TMt = 2TM = DCd = 2DC$.

702. Cela poſé, il eſt facile de voir qu'un diametre diviſe toutes ſes ordonnées en deux parties égales. Car $NQ : Qn :: TM : Mt$, & $Nn = mn$. Soit donc $CM = m \ldots CD = MT = n \ldots CQ = x$, $Qm = y$, on aura $m : n :: x : NQ = \frac{nx}{m}$. Or $Nm \times mn = TM^2$. Donc $n^2 = \frac{n^2x^2}{m^2} - yy$, & $yy = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, équation ſemblable à celle des coordonnées au premier axe.

FIG.

Cette équation donne $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$. Donc si on fait $Cp = x$, $pm = y$, on aura $yy = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$, pour l'équation aux coordonnées du second diametre CD; & on voit bien l'analogie que cette équation a avec celle des coordonnées au second axe.

703. Soit maintenant a CA le premier axe de l'hyperbole, & supposons que BA représente la moitié du second; si on mene DE, TG, MPK perpendiculaires à cet axe, & ML, tK qui lui soient paralleles, les triangles MTL, MtK, CDE seront égaux & semblables. Or si l'on nomme CP (u)... PM (z)... CE $= t$K $=$ ML $= r$... MK $=$ DE $=$ TL $= s$, & comme auparavant CM (m).... TM (u).... CA (a).... AB (b), on aura TG $= z + s$, CG $= u + r$, & $z + s : u + r :: b : a$, & par conséquent $az + as = bu + br$; d'ailleurs TL (s) : ML (r) :: MP (z) : PS $= \frac{rz}{s}$; & PS $= \frac{u^2 - a^2}{u} = \frac{aazz}{b^2 u} = \frac{rz}{s}$. Donc $r = \frac{aasz}{b^2 u}$; substituant cette valeur dans l'équation $az + as = bu + br$ on a $(bu - as)(bu - az) = 0$. Or $bu - az$ ne peut se réduire à zéro; il faut donc que $bu - as = 0$. Donc $bu = as$, & par conséquent $az = br$. On a donc CP : DE :: a : b :: CE : MP. 143.

704. Donc 1°; les triangles CED, CMP sont égaux en surface. 2°, Si l'on mene DM, on aura DMC, ou $\frac{1}{2}$ CDTM $=$ le trapeze $DEMP = (s + z)\left(\frac{u - r}{2}\right) = \frac{su + uz - sr - rz}{2} = \frac{su - rz}{2} = \frac{b}{2a}uu - \frac{a}{2b}zz = \frac{bbuu - aazz}{2ab} = \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{1}{2}ab$; donc *le parallélogramme* TT′ *construit sur les diametres conjugués est égal au rectangle des axes.*

3°. $DE = \frac{b}{a}$CP. Donc $DE^2 = \frac{b^2}{a^2}CP^2 = b^2 + PM^2$, & $DE^2 - PM^2 = b^2$. 4°. $CE = \frac{a}{b}MP$, & $CE^2 = \frac{a^2}{b^2}MP^2 = CP^2 - a^2$. Donc $CP^2 - CE^2 = a^2$. 5°. $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2$. *La différence des quarrés de deux diametres conjugués est donc égale à la différence des quarrés des deux axes.* D'où il suit que dans l'hyperbole équilatere un diametre quelconque est égal au diametre conjugué.

705. Soit p l'angle DCM compris par les deux diametres conjugués on aura les deux équations $mn \sin p = ab$, $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, par le moyen desquelles on peut résoudre les deux problêmes suivants.

PROBL. I. Etant donnés les deux axes a & b d'une hyperbole, trou-

FIG. ver deux diametres conjugués qui faſſent entre eux un angle donné p.

Les équations précédentes donnent . . . . .

$$m = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(a^2 - b^2\right) + \sqrt{\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{4} + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 p}\right)}\right]}$$

$$n = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) + \sqrt{\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{4} + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 p}\right)}\right]}$$

Il ne reſte donc plus qu'à trouver la direction de l'un de ces diametres, ou l'angle MCP que j'appellerai c. Or dans le triangle CMP, on a... $1 : m :: \sin c : PM = m \sin c$. Donc $CE = \frac{a m \sin c}{b}$, & dans le triangle DCE, on a. . . $1 : n :: \cos(p + c) : \frac{a m \sin c}{b}$. D'où l'on tire $\frac{a m}{b n} \sin c = \cos p \cos c - \sin p \sin c$, & $\tang c = \frac{b n \cos p}{a m + b n \sin p} = \frac{b^2}{b^2 + m^2} \cot p$, parce que $a = \frac{m n \sin p}{b}$.

PROBL. II. Étant donnés les diametres conjugués m & n d'une hyperbole, & l'angle p qu'ils font entre eux, trouver les deux axes & leur direction.

On a d'abord,

$$a\begin{cases} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(m^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^4 + 2 m n^2 + n^4 - 4 m^2 n^2 \cos^2 p)}\right]} \\ = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(m^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((m^2 + n^2)^2 - 4 m^2 n^2 \cos^2 p)}\right]}. \end{cases}$$

On a enſuite,

$$b\begin{cases} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(n^2 - m^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((m^2 + n^2)^2 - 4 m^2 n^2 \cos^2 p)}\right]} \\ = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(n^2 - m^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((m^2 - n^2)^2 + 4 m^2 n^2 \sin^2 p)}\right]}. \end{cases}$$

On a enfin la direction des axes, ou l'angle c comme dans le problême précédent.

Mais il eſt plus ſimple de ſe ſervir des aſymptotes. Par l'extrémité M du premier diametre CM on menera TM t qui faſſe avec MQ l'angle
143. $TMQ = p$, & ayant pris $TM = Mt = n$, on menera CT, C t. Alors ſi on diviſe l'angle TC t en deux également par la ligne CA, on aura la direction du premier axe.

De la Quadrature des Sections Coniques.

706. LA Quadrature exacte de la plupart des eſpaces curvilignes étant fort difficile à trouver, (ſi même elle n'eſt pas quelquefois impoſſible, comme quelques Auteurs l'ont penſé), on a cherché leur quadrature approchée. Les ſéries ont été d'un grand uſage dans cette recherche ; & c'eſt pour pouvoir nous en ſervir, que nous ajouterons quelque choſe à ce qui en a été dit dans les Éléments d'Algébre.

707. On appelle *Terme général* d'une ſérie, l'expreſſion algébrique qui donne chaque terme de cette ſérie, par la ſimple ſubſtitution de la lettre n, par laquelle on repréſente tel nombre de termes que l'on veut. Par exemple, le terme général de la ſérie 1 . 6 . 21 . 52 . 105. &c. eſt $n^3 - n^2 + n$, parce qu'en faiſant $n = 1$, ou $= 2$, ou $= 3$, &c, on a immédiatement les termes 1, 6, 21, &c.

708. On appelle *Somme générale*, ou *Terme ſommatoire d'une ſérie*, l'expreſſion qui donne généralement la ſomme d'un nombre quelconque de ſes termes. Par exemple, $\frac{a\,q^n - a}{q - 1}$ eſt le terme ſommatoire de toute progreſſion géométrique dont on connoît le premier terme a, le quotient q, & le nombre n des termes (252).

709. Or la ſomme générale S d'une ſérie étant donnée, il eſt aiſé d'en trouver le terme général T. Car ſi dans cette ſomme on ſubſtitue $n - 1$ à n, on aura celle de tous les termes de la ſérie juſqu'à celui dont le rang eſt $n - 1$, incluſivement. Donc ſi on ſouſtrait cette ſomme que j'appelle s de la ſomme générale S, on aura le terme général $T = S - s$. Par exemple, ſi $S = \frac{n^2 + n}{2}$, on aura $T = n$; & ſi on ſuppoſe $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, on trouvera $T = a\,q^{n-1}$.

710. Mais il n'eſt pas à beaucoup près auſſi facile de trouver la ſomme générale, quand on connoît le terme général. Voici comment on peut réſoudre ce problême dans un cas aſſez étendu dont nous aurons beſoin.

Soit T une fonction quelconque rationelle du nombre n des termes ou $T = a\,n^m + b\,n^{m-1} + \&c \ldots\ldots + u$; il s'agit de trouver la ſomme S de cette ſérie,

Pour cela je ſuppoſe que .....

$$S = A\,n^{m+1} + B\,n^m + C\,n^{m-1} + D\,n^{m-2} \ldots\ldots + R;$$

& ſubſtituant $n - 1$ au lieu de n, je trouve que

FIG.

& l'arc elliptique MB; puiſqu'on a $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, en raiſonnant comme pour le cercle, on trouvera que cet eſpace $= \frac{b}{a}$ $(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} -$ &c). Or ſi on décrit une demi-circonférence ANB' a dont le rayon ſoit a, on aura l'eſpace CB'NP $= ax - \frac{x^5}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} -$ &c. Donc CBMP : CB'NP :: b : a :: AMP : ANP; d'où il ſuit que la ſurface de l'ellipſe eſt à celle du cercle conſtruit ſur ſon grand axe :: b : a. Or la ſurface de ce cercle $= a^2\pi$, en ſuppoſant le rapport du diametre à la circonférence : : 1 : π. Donc la ſurface de l'ellipſe entiere $= ab\pi$, c'eſt-à-dire, eſt égale à la ſurface d'un cercle dont le diametre ſeroit moyen proportionel entre les axes de l'ellipſe.

On voit auſſi qu'un ſecteur quelconque SAM eſt au ſecteur circulaire correſpondant SAN : : b : a, puiſque les triangles SPM, SNP ſont entre eux : : PM : PN : : b : a.

146. 715. Propoſons-nous maintenant de quarrer l'eſpace parabolique AMP.

Si on nomme AP (x), PM (y), le parametre (p), e une portion infiniment petite de l'abſciſſe AP, on trouvera par le même raiſonnement que ci-deſſus, l'eſpace APM $= e\sqrt{pe} + e\sqrt{2pe} + e\sqrt{3pe} + e\sqrt{4pe} \ldots + e\sqrt{px} = e\sqrt{pe}\,[1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + \ldots + (\frac{x}{e})^{\frac{1}{2}}] = (\frac{x}{e})^{\frac{3}{2}} \times e\sqrt{pe} = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{px} = \frac{2}{3}xy$. Donc l'eſpace parabolique AMP eſt les deux tiers du rectangle circonſcrit APMN, & par conſéquent l'eſpace AMN en eſt le tiers.

147. 716. Il nous reſte à trouver la quadrature de l'hyperbole. Or ſi on rapporte les coordonnées CP, PM (x, y) au ſecond axe CB, on aura $y = \frac{a}{b}\sqrt{(bb + xx)}$, & en faiſant le même calcul que dans le cercle, on trouvera que l'eſpace ACPM $= \frac{a}{b}(bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \frac{x^7}{112b^5} -$ &c). Il eſt donc facile d'avoir l'eſpace AMQ.

717. Si l'hyperbole eſt équilatere, alors $b = a$, & la ſérie que l'on vient de calculer ſe réduit à $bx + \frac{x^3}{5b} - \frac{x^5}{40b^3} +$ &c. Il y a donc la même analogie entre l'hyperbole équilatere & une hyperbole quelconque.

conque, qu'entre le cercle & l'ellipſe. Enſorte que ſi on avoit la quadrature d'une ſeule hyperbole, on auroit auſſi-tôt celle de toutes les autres. G FI.

718. Soit à préſent C Q l'aſymptote de l'hyperbole A M, $CD^2 = AD^2 = m^2$ ſa puiſſance, M P une ordonnée y à l'aſymptote C Q, ou une parallele à l'autre aſymptote C O, il s'agit de trouver la quadrature de l'eſpace aſymptotique A D M P, en ſuppoſant d'abord que l'angle fait par les aſymptotes eſt droit. 148.

Je fais D P $= x$, & j'imagine l'eſpace A D M P décompoſé en une infinité de petits rectangles dont les baſes ſoient des portions infiniment petites & égales de l'abſciſſe x. En nommant e l'une de ces petites portions, l'ordonnée correſpondante à la premiere au point D ſera $\frac{m^2}{m+e}$, & le premier rectangle aura pour expreſſion $\frac{em^2}{m+e}$, le ſecond $\frac{em^2}{m+2e}$, &c. Donc l'eſpace $ADMP = em^2 [\frac{1}{m+e} + \frac{1}{m+2e} + \frac{1}{m+3e} +$ &c]. Et ſi on réduit en ſéries toutes ces fractions, on aura $ADMP = em(1+1+1+1+1+$ &c$)$. $-e^2(1+2+3+4+$ &c. $\ldots + \frac{x}{e}) + \frac{e^3}{m}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 \ldots + \frac{x^2}{e^2}) -$ &c. $= em \times \frac{x}{e} - e^2 \times \frac{x^2}{2e^2} + \frac{e^3}{m} \times \frac{x^3}{3e^3} - \frac{e^4}{m^2} \times \frac{x^4}{4e^4} +$ &c. $= mx - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3m} - \frac{x^4}{4m^2} + \frac{x^5}{5m^3} +$ &c. $= m^2(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} +$ &c.$) = m^2 \log.(1+\frac{x}{m}) = m^2 \log. \frac{m+x}{m}$. Donc ſi on fait C P $= z$, l'eſpace A D M P ſera égal à $m^2 \log. \frac{z}{m}$; & ſi l'angle fait par les aſymptotes, au lieu d'être droit, étoit en général a, on auroit $ADMP = m^2 \sin a \log. \frac{z}{m}$.

719. Si l'hyperbole eſt équilatere, & ſi la puiſſance $= 1$, alors l'eſpace A D P M $= \log. z$; c'eſt-à-dire qu'il eſt le logarithme naturel de l'abſciſſe CP; & voilà pourquoi on appelle logarithmes hyperboliques ceux dont le module eſt 1.

Ce même eſpace ſeroit le logarithme tabulaire de l'abſciſſe C P, ſi l'angle des aſymptotes étoit de 25° 44′ 25″; car appellant A le module 0,43429448 &c, il faut que l'on ait $m^2 \sin a \log. \frac{z}{m} = A \log. z$;

or cette équation ne peut avoir lieu que lorſque $m = 1$; & alors on a $\sin a = A = 0{,}43429448$ &c, qui dans les Tables des ſinus naturels répond à 25° 44′ 25″. Les logarithmes ordinaires repréſentent donc les aires aſymptotiques d'une hyperbole dont la puiſſance eſt 1, & dont l'angle des aſymptotes eſt de 25° 44′ 25″.

720. Si on prend ſur l'aſymptote d'une hyperbole quelconque une ſuite d'abſciſſes en progreſſion géométrique $\frac{z}{m} : q\frac{z}{m} : q^2\frac{z}{m} : q^3\frac{z}{m}$, &c, les aires correſpondantes formeront la progreſſion arithmétique $\frac{1}{2}m^2 \sin a \log\frac{z}{m} \cdot m^2 \sin a \log\frac{z}{m} + m^2 \sin a \log q \cdot m^2 \sin a \log\frac{z}{m} + 2m^2 \sin a \log q \cdot m^2 \sin a \log\frac{z}{m} + 3m^2 \sin a \log q$, &c.

Ainſi quand les abſciſſes ſont en progreſſion géométrique, les différences des aires aſymptotiques ſont égales; & puiſque la progreſſion des abſciſſes peut être continuée à l'infini, il ſuit que l'eſpace compris entre l'hyperbole & ſon aſymptote eſt infiniment grand.

S'il falloit déterminer un trapeze hyperbolique ADNQ qui fût au trapeze ADPM dans le rapport de p à q, on nommeroit CP (z), CQ (x); & on auroit $m^2 \sin a \log\frac{z}{m} : m^2 \sin a \log\frac{x}{m} :: p : q :: \log\frac{z}{m} : \log\frac{x}{m}$; donc $q \log\frac{z}{m} = p \log\frac{x}{m}$, ou $\log\left(\frac{z}{m}\right)^q = \log\left(\frac{x}{m}\right)^p$; équation qui donne

$$x = \frac{z^{\frac{q}{p}}}{m^{\frac{q}{p}-1}} = z^{\frac{q}{p}} m^{\frac{p-q}{p}} = \sqrt[p]{(z^q m^{p-q})}.$$

* en remontant des logarithmes aux nombres on a $\left(\frac{z}{m}\right)^q = \left(\frac{x}{m}\right)^p$ ou $x^p = \frac{z^q \cdot m^p}{m^q}$ ..... $x = \sqrt[p]{\left(\frac{z^q m^p}{m^q}\right)} = \frac{z^{\frac{q}{p}} m^{\frac{p}{p}}}{m^{\frac{q}{p}}} = \frac{z^{\frac{q}{p}} \cdot m}{m^{\frac{q}{p}}} = z^{\frac{q}{p}} \cdot m^{1-\frac{q}{p}} = z^{\frac{q}{p}} \cdot m^{\frac{p-q}{p}} = \sqrt[p]{(z^q \cdot m^{p-q})}$.

FIG.

DE QUELQUES AUTRES COURBES.

PARMI les Courbes qui ſont le plus en uſage dans la Géométrie, les Sections coniques tiennent ſans doute le premier rang: mais il y en a pluſieurs autres dont il eſt à propos de faire mention.

721. I°. LA CONCHOÏDE DE NICOMEDE. Si par un point B pris à volonté hors d'une droite G H on mene des lignes B Q M, B A D, &c. telles que leurs parties Q M, A D, &c ſoient égales, la courbe M D M qui paſſe par les points M, D &c, ſe nomme *Conchoïde.* 149.

Le point B en eſt le *Pôle*, la ligne G H en eſt la *Directrice*; & ſi on prend au-deſſous de G H des parties égales Q *m*, A *d*, &c, la courbe qui paſſera par les points *m*, *d* &c, ainſi déterminés, ſera la conchoïde *inférieure m d m'*, ou plutôt la partie inférieure de la même conchoïde.

722. Il ſuit de ſa conſtruction 1°, que G H en eſt l'aſymptote; 2°, que *d* D en meſure la plus grande largeur, lorſque B A eſt perpendiculaire ſur G H. Mais comme B A peut être plus grande, ou plus petite, ou égale à *d* A, voyons quelle ſera la figure de la courbe dans ces trois cas.

Dans le premier, elle ſera telle que la repréſente la Figure 149; dans le ſecond, elle aura un nœud *Bndn'* comme dans la Figure 150, & alors on l'appelle conchoïde *nouée.* Dans le troiſieme, le nœud s'évanouit, & il ne reſte qu'un point de rebrouſſement en B, *fig.* 151, 149. 150. & 151.

723. Pour ſavoir ſi la conchoïde eſt du nombre des courbes algébriques, ſoit mené P M perpendiculairement ſur A P, & ſoit A D ou Q M = *a*, A B = *b*, P M = *y*, A P = *x*: on aura P Q : P M :: A Q : A B, ou $\sqrt{(aa-yy)} : y :: x - \sqrt{(aa-yy)} : b$; donc $xy = (b+y)\sqrt{(aa-yy)}$; & c'eſt-là l'équation aux coordonnées de la conchoïde ſupérieure. Le même calcul donne $xy = (b-y)\sqrt{(aa-yy)}$ pour l'inférieure. L'équation eſt encore la même pour la conchoïde à nœud. Cette courbe eſt donc algébrique, & en débarraſſant ſon équation du radical, on trouvera que c'eſt une ligne du quatrieme ordre, ou une courbe du troiſieme, laquelle a pour équation... $y^4 \pm 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 \mp 2a^2by = a^2b^2$. 151.

On peut la décrire par l'interſection continuelle d'une regle B C M mobile autour du point B, & d'un cercle décrit du rayon C M = *a*, que l'on fera mouvoir le long de G H, de maniere que le centre C ſoit toujours ſur cette ligne. Il ſuffit pour cela que la regle paſſe conſtamment par le centre du cercle. 152.

724. On peut même former ainſi une infinité de conchoïdes différentes Car ſi au lieu du cercle on fait mouvoir une courbe quelconque C M le long de G H, ſon interſection avec une regle B M mobile autour du point B, & aſſujettie à paſſer par un point fixe Q de 153.

FIG. 153. l'axe de la courbe C M, décrira une conchoïde dont il eſt aiſé de trouver l'équation. En effet, ſi on mène M P & A B perpendiculaires ſur la directrice, & ſi on ſuppoſe A P $= x$, P M $= y$, C P $= z$, C Q $= a$, A B $= b$, on aura P Q $(z - a)$: P M (y) : : A Q $(x + a - z)$: A B (b); d'où $z = a + \frac{xy}{b+y}$. Subſtituant donc cette valeur dans l'équation à la courbe C M, on aura celle de la conchoïde M D.

Par exemple, ſi la courbe C M eſt un cercle, dont Q ſoit le centre, on a $yy = 2az - zz$, qui donne $xy = (b+y)\sqrt{(aa - yy)}$ pour l'équation à la conchoïde ordinaire.

725. Mais ſi la courbe mobile eſt une parabole dont l'équation ſoit $y^2 = pz$, alors $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ devient l'équation de la conchoïde parabolique dont Deſcartes s'eſt ſervi pour réſoudre une équation générale du ſixieme degré. Voyez ſa Géométrie, & les Sections coniques du Marquis de l'Hôpital.

154. 726. II°. La CISSOÏDE DE DIOCLÈS. Soit le cercle A N B n dont le diametre eſt A B, & dont Q B q eſt tangente au point B. Si après avoir mené du point A des droites A Q à différents points de la tangente, on prend Q M $=$ A N, la courbe M A m qui paſſe par les points M, m ainſi déterminés, ſe nomme *Ciſſoïde*.

Elle eſt compoſée, comme l'on voit, de deux parties ſemblables & égales A M, A m qui forment en A un point de rebrouſſement, & qui après avoir coupé la circonférence aux points C, c également éloignés de A & de B, s'écartent toutes les deux à l'infini, ſans pouvoir jamais atteindre la tangente Q B q, qui eſt par conſéquent leur aſymptote.

727. Pour trouver l'équation de la Ciſſoïde, je mene O M parallele à A P, & M P, N G perpendiculaires. Je fais A P $= x$, P M $= y$, & A B ou le diametre du cercle *générateur* $= a$. Puiſque A N $=$ M Q, j'ai A G $=$ P B, & A G $(a - x)$: G N ou $\sqrt{(ax - xx)}$: : A P (x) : P M $(y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$; d'où $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, équation cherchée.

728. Or cette équation fait voir 1°, que la ciſſoïde eſt une courbe algébrique du ſecond ordre. 2°, Qu'à chaque abſciſſe A P, répondent deux ordonnées égales P M, P m, l'une poſitive, l'autre négative, & qu'ainſi la courbe a deux branches parfaitement égales & ſemblables. 3°, Que lorſque $x = 0$, y eſt auſſi $= 0$; la courbe paſſe donc à l'origine des abſciſſes. 4°, Que ſi $x = \frac{1}{2}a$, alors $y = \pm\frac{1}{2}a$; c'eſt-à-dire, que les deux branches de la ciſſoïde coupent la circonférence en des points C, également éloignés de A & de B. 5°, Que ſi $x = a$, y eſt infinie, & que par conſéquent la tangente B Q eſt l'aſymptote de cette courbe, comme nous l'avions déja conclu de ſa deſcription.

La conchoïde & la ciſſoïde furent employées par leurs inventeurs Nicomede & Dioclès à trouver la *Duplication* du cube, Problême célebre parmi les anciens Géometres, mais qui n'a plus de célébrité parmi les nouveaux.

729. III°. LA LOGARITHMIQUE. Si après avoir pris un point A sur la droite indéfinie G H, on éleve des ordonnées P M qui ayent pour logarithmes leurs abscisses A P, la courbe B M *m* qui passe par les extrémités de ces ordonnées, s'appelle *Logarithmique*. FIG. 155.

Soit donc A P $= x$, P M $= y$, $m =$ le module, $e =$ le nombre 2.718 2818, dont le logarithme hyperbolique est 1, on aura $x = m l y = x l e$, ou $y^m = e^x$, qui donne $y = e^{\frac{x}{m}}$, équation de la logarithmique.

Elle fait voir 1°, que cette courbe est du nombre des transcendantes; 2°, que lorsque $x = 0$, y ou A B $= 1$; 3°, que si $x =$ A E $=$ $=$ A B $= 1$, y ou E F $= e^{\frac{1}{m}}$, & qu'ainsi en faisant E F $= a$, on aura toujours $y = a^x$; d'où il suit que si les abscisses forment la progression arithmétique $\div 1 . 2 . 3 . 4 .$ &c, les ordonnées formeront la progression géométrique $\div a^1 : a^2 : a^3 : a^4$ &c. La logarithmique s'étend donc à l'infini au-dessus de A P

Mais si on prend sur A Q des abscisses négatives, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, &c, les ordonnées deviendront successivement $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c, c'est-à-dire, que la courbe a une branche infinie B O qui s'approche de plus en plus de la directrice ou de l'axe G H, sans pouvoir jamais l'atteindre.

730. La propriété la plus remarquable de la logarithmique est que sa soutangente est toujours de la même grandeur. On le prouve avec la plus grande facilité par le calcul différentiel: voici, en attendant, une démonstration à peu-près semblable.

Soit menée l'ordonnée *mp* infiniment proche de M P, & soit prolongé le petit côté M*m* pour avoir la tangente M T. Cela posé, si on mene M*r* parallele à l'axe, & si on nomme P*p* (e), *mr* (i), on aura $x + e = A . l (y + i) = A . l y (1 + \frac{i}{y}) = A l y + A (\frac{i}{y} - \frac{i^2}{2y^2} + \frac{i^3}{3y^3} -$ &c); donc puisque $x = A l y$, il faut que $e = \frac{Ai}{y} (1 - \frac{i}{2y} + \frac{i^2}{3y^2} -$ &c.) Mais la quantité i étant infiniment petite, ses puissances i^2, i^3, &c, doivent être rejettées; on a donc $\frac{ey}{i}$ ou P T $= A$. *La soutangente est donc toujours égale au module*; & puisqu'en général $x = A l y$, il est clair que dans deux logarithmiques différentes, les abscisses des mêmes ordonnées sont com-

FIG. me les soutangentes, ou ce qui revient au même, les logarithmes des mêmes nombres dans différents systêmes sont entre eux comme les modules. On peut voir dans un petit Traité de Keil sur la logarithmique, comment il en a déduit les regles du calcul des logarithmes.

156. 731. IV°. LA CYCLOÏDE. Si un cercle A G roule sur une droite A *a*, jusqu'à ce que le point qui touchoit d'abord cette droite en A, la touche encore en *a*, ce point décrira une courbe, appellée *Cycloïde* ou *Roulette*, ou *Trochoïde*. Les travaux de Paschal, d'Huyghens, des Bernoulli, &c, ont rendu cette courbe fort célebre.

Ce sera une cycloïde *ordinaire*, lorsque ce cercle générateur n'aura d'autre mouvement que celui de sa révolution. Mais s'il a de plus un mouvement de translation dans le même sens, le point A décrira une
157. cycloïde *accourcie*. Si ce mouvement est en sens contraire, la cycloïde sera *allongée*.

158. Or il est clair que dans la cycloïde ordinaire la *Base* A *a* est égale à la circonférence du cercle générateur; qu'elle est plus courte dans la cycloïde accourcie, & qu'elle est plus grande dans la cycloïde allongée.

Le diametre B C du cercle générateur se nomme l'*Axe* de la cycloïde, lorsqu'il est perpendiculaire au milieu de sa base. Le point B en est le *Sommet*: ainsi B C est sa plus grande hauteur.

156. 732. Cela posé, menons M P perpendiculaire sur B C, & tirons les cordes égales M F & O C; nous aurons F C = M O; donc puisque F C = A C — A F = B O C — F K M = B O C — O L C = B I O, il est clair que la partie M O de l'ordonnée M P est toujours égale à l'arc correspondant B I O du cercle générateur. D'ailleurs l'autre partie O P est le sinus du même arc; donc appellant M P (y), B I O (u), on aura pour l'équation à la cycloïde ordinaire, $y = u + \sin u$.

Et pour la rendre plus générale, on fera M O = $\frac{b}{a}$ B I O ce qui convient à la cycloïde ordinaire, ou accourcie, ou allongée, suivant que b est égal, ou plus petit, ou plus grand que a; ensorte que l'on aura $y = \frac{b}{a} u + \sin u$. La cycloïde est donc une courbe transcendante.

159. 733. Pour mener au point M la tangente M T, on imaginera l'arc infiniment petit M m, l'ordonnée mp, & la petite ligne M r parallele à la tangente O T au point O de la circonférence du cercle générateur. On aura donc M O = $\frac{b}{a}$ B I O, & $mo = \frac{b}{a}$ B I o, ce qui donne $mr = \frac{b}{a}$ O o. D'ailleurs par les triangles semblables on a mr : M r :: M O : O T = $\frac{\text{M O} \times \text{M } r}{\frac{b}{a}\text{O } o} = \frac{a}{b}$ M O = B I O. Il faut donc prendre sur la tangente au cercle générateur la partie O T = B I O, &

mener par les points M & T la ligne M T qui ſera la tangente de la cycloïde, ſoit ordinaire, ſoit accourcie, ſoit allongée. Dans la premiere cependant, la conſtruction peut être ſimplifiée; car puiſque M O = B I O = O T, on a l'angle T O P, ou 2 B O P = 2 T M O; c'eſt-à-dire, qu'*une droite* M T *parallele à la corde* O B *eſt néceſſairement tangente au point* M *de la cycloïde ordinaire.* FIG. 1

734. Maintenant ſoient menées la ligne indéfinie B Q Q' perpendiculaire à l'axe B C, & Q*q*, Q'*m* paralleles au même axe; on aura par les triangles ſemblables, *mq* : M*q*, ou Q'Q : P*p* : : O P : B P; donc Q' Q × B P = P*p* × O P, ou M*m* Q' Q = P*p* o O; & par conſéquent l'eſpace circulaire B I O P = B Q M, & le demi-cercle B O C B = B D A B. Or le rectangle A B dans la cycloïde ordinaire eſt quadruple de ce demi-cercle; donc *l'eſpace cycloïdal eſt triple du cercle générateur.*

735. Si au lieu de prendre un point de la circonférence du cercle pour décrire la cycloïde, on l'eût pris au-dedans ou au-dehors du cercle, alors la courbe décrite eût été une autre eſpece de cycloïde; & ſi au lieu de faire rouler un cercle ſur une droite, on l'eût fait rouler ſur la circonférence d'un autre cercle, alors la courbe décrite par un de ſes points eût été du genre de celles que l'on appelle *Epicycloïdes.* Nous ne pouvons qu'indiquer ces objets.

736. V°. LA QUADRATRICE DE DINOSTRATE. Suppoſons qu'une droite A G tangente en A ſe meuve uniformément, parallélement à elle-même le long du diamètre A*a*, & qu'au même inſtant qu'elle part du point A, le rayon A C tourne uniformément autour du centre C vers le point E, de maniere qu'il ſe confonde avec C E au moment où la droite A G s'y confondra auſſi, nous aurons par l'interſection continuelle de ces deux lignes une courbe A M D, appellée *Quadratrice.* 160.

Il ſuit de cette deſcription qu'un eſpace quelconque A P parcouru par la droite A G eſt à l'arc circulaire A B décrit dans le même temps par l'extrémité du rayon, comme un autre eſpace A C parcouru par cette droite eſt à l'arc correſpondant A B E décrit par le rayon. Faiſant donc A P = *x*, P M = *y*, A B = *u*, A C = *a*, A B E = 90° = *c*, on aura 1°, *x* : *a* : : *u* : *c* : : l'angle A C B : l'angle A C E; donc $u = \frac{cx}{a}$.

On aura 2°, C P : P M : : C A : A G, ou $a - x : y :: a : tang\ u$, donc $y = \frac{a-x}{a}\ tang\ \frac{cx}{a}$; & ce ſera l'équation aux coordonnées de la quadratrice, lorſque le point A ſera l'origine des abſciſſes.

737. Mais ſi on met leur origine au centre C, en faiſant C P = *x*, on aura . . . $y = \frac{x}{a}\ tang\ (c - \frac{cx}{a}) = \frac{x}{a}\ cot\ \frac{cx}{a} =$ . . .

FIG.

$$\frac{x\left(a-\frac{c^2x^2}{2a^3}+\frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7}-\text{\&c.}\right)}{\frac{cx}{a}-\frac{c^3x^3}{2.3.a^5}+\frac{c^5x^5}{2.3.4.5\,a^9}-\text{\&c.}}=\frac{a-\frac{c^2x^2}{2a^3}+\frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7}-\text{\&c.}}{\frac{c}{a}-\frac{c^3x^2}{2.3.a^5}+\frac{c^5x^4}{2.3.4.5\,a^9}-\text{\&c.}}$$

160. Donc lorſque x ſera zéro, y qui deviendra la *baſe* CD, aura pour expreſſion $\frac{a^2}{c}$; d'où il ſuit que ſi la baſe de la quadratrice étoit une fois connue, on auroit auſſi-tôt la quadrature du cercle. C'eſt ce qui a fait donner à cette courbe le nom de quadratrice.

738. Si on décrit du centre C & du rayon CD le quart de cercle DLK, ſa longueur ſera égale au rayon CA; car $\frac{aa}{c}$: DLK :: a : c; donc DLK $= a$. On aura auſſi PC = l'arc LD; car $\frac{aa}{c}$: KL :: a : u; d'où KL $= x =$ AP, & PC = LD.

739. Prenons maintenant des abſciſſes négatives AP', & ſubſtituons leur valeur dans la premiere équation. Elle deviendra $y = -\frac{(a+x)}{a}\,tang\,\frac{cx}{a}$, ce qui donne des ordonnées négatives P'M'. Ainſi la courbe a une branche AM', dont on trouvera que la droite QN menée à la diſtance AQ $= a$ eſt l'aſymptote, en ſuppoſant y infinie; car alors on trouvera que $tang\,\frac{cx}{a} = \infty$, & que par conſéquent $x = a$.

Si après s'être confondus avec CE, la droite AG & le rayon CA continuent de ſe mouvoir l'une en deſcendant vers a, l'autre en tournant dans le même ſens, il eſt viſible que leur interſection décrira la partie Da de la quadratrice.

Il eſt viſible auſſi que ſi on pouvoit décrire géométriquement cette courbe, on auroit immédiatement tous les angles d'un nombre donné de degrés, par exemple, de $\frac{1}{m}$ 90°. Il n'y auroit pour cela, qu'à diviſer AC au point P, de ſorte que AP fût à AC :: 1 : m; car alors menant l'ordonnée PM, & le rayon CB, l'angle ACB ſeroit $= \frac{1}{m}$ 90°; puiſque x : a :: u : c :: 1 : m.

161. 740. VI°. LA SPIRALE D'ARCHIMEDE. On appelle ainſi la courbe CKMA décrite par un point C qui ſe meut uniformément le long du rayon CA, pendant la révolution uniforme de ce rayon autour du centre C, de maniere que lorſque le rayon a parcouru la circonférence entiere, ce point ſe trouve confondu avec le point A.

Si après avoir prolongé le rayon CA, on lui fait faire une ſeconde ré-

volution, le point C continuant de s'éloigner de l'origine de son mouvement décrira une *seconde Spirale*, puis une *troisieme*, & ainsi de suite, ou plutôt toutes ces spirales ne feront qu'une seule & même courbe, dont les révolutions peuvent se multiplier à l'infini.

741. Cela posé, l'ordonnée C M (y) est au rayon C A (a) :: l'arc A B N qui est l'abscisse correspondante, & que j'appelle x, est à la circonférence entiere A B N A, que j'appelle π. On a donc $y = \frac{ax}{\pi}$ pour l'équation à la spirale d'*Archimede*. D'où il suit 1°, que c'est une courbe transcendante; 2°, qu'elle passe par le centre du cercle générateur; 3°, qu'elle passe aussi par le point A; 4°, que si on fait $x = \pi + x'$, l'équation deviendra $y = a + \frac{ax'}{\pi}$, & qu'ainsi en donnant à x' les valeurs qui sont entre o & π, la spirale sera une seconde révolution qu'elle terminera à l'extrémité d'un rayon double du premier. Elle en fera une troisieme, une quatrieme, &c, si on fait $x = 2\pi + x''$, $x = 3\pi + x'''$, &c.

742. Pour mener à son point M la tangente M T, on imaginera le rayon C mn infiniment proche du rayon C M N, & après avoir décrit un cercle du rayon C M on menera C T perpendiculaire à C M: puis on aura par les triangles semblables M mr, M T C, mr : M r :: C M : C T $= \frac{CM \cdot Mr}{mr}$. Or C M $= \frac{a}{\pi}$ A B N, & C $m = \frac{a}{\pi}$ A B n;

Donc C m — C M, ou $mr = \frac{a}{\pi}$ N n; & puisque $a : y ::$ N n : M r, on aura $\frac{Mr}{mr} = \frac{y \cdot Nn}{a \cdot \frac{a}{\pi} Nn} = \frac{\pi y}{a} = \frac{x}{a}$, & la soutangente C T $=$ $\frac{\pi y^2}{a^2} = \frac{xy}{a}$; mais $a : y :: x :$ l'arc O Q M $= \frac{xy}{a}$; donc la soutangente C T doit être prise égale à l'arc circulaire O Q M.

743. VII°. La Spirale parabolique. Si on prend sur un rayon quelconque C N une partie N M moyenne proportionelle entre l'arc A N & une ligne donnée p, la courbe qui passera par tous les points M ainsi déterminés, sera la *Spirale parabolique*.

Soit donc A N $= x$, C M $= y$, A C $= a$, & on aura $y = a - \sqrt{px}$; équation qui en substituant $\pi + x$, $2\pi + x$, &c, au lieu de x, fait voir que cette courbe peut faire une infinité de révolutions autour du centre C, & que par conséquent elle est du nombre des spirales.

744. VIII°. La Spirale hyperbolique. Je suppose que du point C pris pour centre sur l'indéfinie C P, on décrive des arcs A G, Q M, P O, &c, égaux en longueur, & que par leurs extrémités G, M, O

FIG. &c, on faſſe paſſer une courbe CKGMO. Ce ſera une *Spirale hyperbolique.*

Il eſt aiſé de voir que ſi on éleve une droite AR parallele à l'axe CP, & qui en ſoit éloignée d'une quantité CB = AG = QM = PQ, &c, cette droite ſera l'aſymptote de la ſpirale hyperbolique, parce qu'elle ne peut la rencontrer que lorſque le rayon CM eſt infini.

745. Soit le rayon CA = a, AN = x, CM = y, AG = QM, &c = b; on aura $x : b :: a : y$, qui donne $xy = ab$, équation ſemblable à celle de l'hyperbole entre les aſymptotes. Or ſi on appelle π la circonférence dont le rayon = a, & ſi on ſubſtitue à x les valeurs $\pi + x$, $2\pi + x$ . . . . . $m\pi + x$, on aura ſucceſſivement $y = \frac{ab}{\pi + x}$, $y = \frac{ab}{2\pi + x}$ . . . . $y = \frac{ab}{m\pi + x}$. D'où on voit que plus l'abſciſſe eſt grande, plus l'ordonnée eſt petite, & que celle-ci ne devient nulle, que lorſque m eſt infini. *La ſpirale hyperbolique fait donc une infinité de révolutions autour de ſon centre, avant que d'y arriver.*

746. Cherchons maintenant la valeur de la ſoutangente CT, & pour cela imaginons la ligne Cr m infiniment proche de CM, & l'arc mq; menons enſuite CT perpendiculaire à CM, qui rencontre en T la tangente TM, & nommons $Qq = rm = i$; nous aurons $y + i : b :: y : Qr = \frac{by}{y+i}$. Donc $rM = b - \frac{by}{y+i} = \frac{bi}{y+i}$; or $rm : rM :: Cm : CT$; donc $i : \frac{bi}{y+i} :: y + i : CT = b$. Ainſi *dans la Spirale hyperbolique la ſoutangente eſt conſtante*, comme dans la logarithmique (730).

764. 747. IX°. LA SPIRALE LOGARITHMIQUE. On nomme *Spirale logarithmique* la courbe qui coupe ſous un même angle tous les rayons CM tirés de ſon centre C; enſorte que la tangente MT fait toujours un angle égal avec le rayon CM, de quelque côté qu'on le ſuppoſe. Cette courbe a pluſieurs belles propriétés que l'on ne peut bien détailler que par les méthodes du calcul différentiel & intégral dont nous allons bientôt faire connoître les principes.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

EN conſtruiſant l'équation . . . . $y^2 = 2ax - xx$, nous avons trouvé (649) qu'il en réſultoit un cercle dont le diametre étoit $2a$: ce cercle eſt ce qu'on appelle *le Lieu géométrique* de l'équation . . . , $y^2 = 2ax - xx$. FIG.

748. En général, *le Lieu d'une équation eſt la ligne décrite d'après le rapport des* x *&* y *que cette équation renferme.*

Ce rapport entre les coordonnées ſert de baſe aux conſtructions géométriques, & la théorie qui enſeigne à réſoudre ce genre de problêmes eſt également ingénieuſe & utile.

On a vu (N° 457 & ſuivants) la maniere de conſtruire les équations déterminées: nous allons nous occuper maintenant de la conſtruction des équations indéterminées. On appelle ainſi toutes les équations à deux variables, & on en diſtingue les degrés par ceux des plus hautes puiſſances auxquelles ces mêmes variables ſont élevées. Commençons par les équations indéterminées du premier degré.

749. Toute équation de ce genre, peut être repréſentée par celle-ci . . . . $ay = bx + c$; d'où on tire $y = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$. Il s'agit donc de trouver le lieu géométrique de cette derniere équation.

Soit AP la ligne des abſciſſes x, dont je ſuppoſe l'origine au point A; ſoit PM une ordonnée y qui faſſe avec AP un angle donné quelconque APM. 165.

Cela poſé, ſi je prends ſur AP une partie déterminée AB que j'appellerai a, & ſi je mene parallélement à PM une ligne BD que j'appellerai b, il eſt évident qu'une droite indéfinie ADN menée par les points A & D, formera deux triangles ſemblables ABD & APN, qui donneront . . . $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$. Donc la ligne AN ſeroit le lieu cherché, ſi l'équation propoſée étoit ſimplement . . . .

$$y = \frac{bx}{a}.$$

Mais à cauſe de $\frac{c}{a}$ qu'il faut ajouter au ſecond membre, les y doivent être augmentées de cette quantité: il faut donc trouver une ligne qui ait pour expreſſion $\frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$. Or en élevant au-deſſus de

AP une droite AE parallele à PM & qui ſoit égale à $\frac{c}{a}$, & en tirant par le point E une ligne indéfinie MM′ parallele à la ligne AN, il eſt clair que l'on aura PM ou $y = PN + NM = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$: auquel cas la droite MM′ eſt le lieu géométrique de l'équation donnée.

Si la quantité $\frac{c}{a}$ eſt négative, il faut alors diminuer les PM de cette quantité ; ce qui eſt aiſé à faire, en menant AE′ au-deſſous de AP ; & en tirant par le point E′ une parallele à la ligne AN. Cette parallele MM″ ſera le lieu de l'équation . . . $y = \frac{bx}{a} - \frac{c}{a}$.

Sa partie OM répondra à la valeur poſitive de y, & ſon prolongement OM″ répondra à $-y$. On peut donc conclure généralement, que *la ligne droite eſt le lieu géométrique de toutes les équations indéterminées du premier degré.*

Voyons maintenant quel eſt le lieu des équations indéterminées du ſecond degré.

750. Toutes ces équations peuvent être ramenées à la formule générale . . . . . .

$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0.$$

D'où il ſuit que la conſtruction de cette formule fera connoître généralement la nature des courbes exprimées par des équations du ſecond dégré, quel que ſoit d'ailleurs l'angle des coordonnées.

Or pour conſtruire plus facilement cette formule, commençons par la ſimplifier, en faiſant . . . $y + \frac{ax}{2} + \frac{d}{2} = u$. Nous aurons . . . . $u^2 = y^2 + axy + dy + \frac{1}{2}adx + \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{4}d^2$; ce qui donnera . . . . . .

$$u^2 + (b - \tfrac{1}{4}a^2)x^2 + (c - \tfrac{1}{2}ad)x + f - \tfrac{1}{4}d^2 = 0.$$

166. Conſtruiſons maintenant l'équation . . . $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$; & pour cela, menons AB $= \frac{1}{2}d$ parallele à PM, & au-deſſous de AP, lorſque d eſt poſitif : menons enſuite BO parallele à AP ; nous aurons déja MO $= y + \frac{1}{2}d$: il faut donc augmenter MO de la quantité $\frac{1}{2}ax$ pour avoir une ligne que nous puiſſions appeller u.

Or ſi on prend ſur BO une ligne BE de telle grandeur que l'on voudra, en faiſant BE $= m$, & en menant EF $= \frac{1}{2}am$ parallele à PM, de maniere que par le point B & par le point F, on tire une droite indéfinie BFN, on aura deux triangles ſemblables, BEF & BON qui donneront ON $= \frac{ax}{2}$; donc la ligne MN $= u$.

Soit à préſent BN $= z$, & la ligne connue BF $= n$, on aura . . .

$m : n :: x : z$; donc $x = \frac{m}{n} z$, d'où on déduira FIG.

$$u^2 + (b - \tfrac{1}{4}a^2)\frac{m^2}{n^2}z^2 + (c - \tfrac{1}{2}ad)\frac{m}{n}z + f - \tfrac{1}{4}d^2 = 0.$$

Cela posé, il peut arriver 1°, que $b = \frac{1}{4}a^2$, auquel cas $y^2 + axy + bx^2$ est un quarré parfait ; 2°, que b soit plus grand que $\frac{1}{4}a^2$; 3°, que b soit plus petit que $\frac{1}{4}a^2$. Ainsi la derniere équation est susceptible des trois formes suivantes . . . .

$u^2 - Az + B = 0 \ldots u^2 + Az^2 - Bz - C = 0 \ldots u^2 - Az^2 - Bz - C = 0$.

Reste donc à la construire sous ces trois formes.

La premiere fait voir que la courbe cherchée rencontre la ligne BN à un point C tel que BC est égal à $\frac{B}{A}$; car alors $u = 0$, & par conséquent z devient $\frac{B}{A}$.

Soit donc $CN = t$; on aura $BN = BC + CN$, ou $z = \frac{B}{A} + t$; & substituant cette valeur de z, on trouvera . . . $u^2 = At$, équation au diametre CN d'une parabole MCm, qu'il sera très-aisé de décrire, puisque l'on connoît le parametre A de son diametre, l'origine C de ce diamètre, & l'angle MNC qu'il fait avec ses ordonnées.

751. Concluons donc généralement que *toutes les fois que les trois premiers termes* $y^2 + axy + bx^2$ *de l'équation générale du second degré forment un quarré parfait, cette équation appartient à la parabole.*

La seconde forme sous laquelle nous devons considérer l'équation préparée, est $u^2 + Az^2 - Bz - C = 0$; & si nous faisons $z - \frac{B}{2A} = t$, nous aurons l'équation

$$u^2 = A\left(\frac{BB + 4AC}{4AA} - t^2\right)$$

qui appartient évidemment à l'ellipse, & qui étant comparée à l'équation (682) . . . $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, donne pour les valeurs des demi-diametres conjugués . . . . .

$$m = \frac{1}{2A}\sqrt{(BB + 4AC)} \ldots n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(4C + \frac{BB}{A}\right)}.$$

D'où il suit qu'en prenant $BC = \frac{B}{2A}$, & en décrivant une ellipse 167.
dont le centre soit C, & dont les demi-diametres conjugués soient $CD = m$, & $CG = n$, cette ellipse sera le lieu cherché.

FIG. 752. En général, *toutes les fois que* b *eſt plus grand que* $\frac{1}{4}a^2$, *l'équation générale du ſecond degré appartient à l'ellipſe.*

Sous la troiſieme forme, cette même équation appartient à l'hyperbole; car ſi on fait $z + \frac{B}{2A} = t$, on aura, en ſubſtituant cette valeur dans $u^2 - Az^2 - Bz - C = 0$, l'équation

$$u^2 = A\left(t^2 + \frac{4AC - BB}{4AA}\right)$$

qui exprime le rapport des coordonnées d'une hyperbole dont le centre

168. C eſt éloigné du point B de la quantité $CB = \frac{B}{2A}$.

Mais ſuivant que 4 A C eſt plus grand ou plus petit que B B, il faut comparer cette équation avec l'une des deux équations ſuivantes

$$y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2) \ldots y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2),$$

dont la premiere exprime le rapport des coordonnées au ſecond diametre (702). Celle-là donne

$$n = \frac{1}{2A}\sqrt{(4AC - BB)} \ldots m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(4C - \frac{BB}{A}\right)}.$$

Ainſi en décrivant une hyperbole M G *m* dont le premier diametre C G $= m$, & le ſecond C D $= n$, on aura le lieu cherché pour l'équation propoſée, dans le cas de 4 A C $>$ B B.

Si B B au contraire eſt plus grand que 4 A C; on comparera l'équation ci-deſſus avec la ſeconde . . . . . $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 - m^2)$, & on aura

$$m = \frac{1}{2A}\sqrt{(BB - 4AC)} \ldots n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{BB}{A} - 4C\right)};$$

169. ce qui donne toute eſpece de facilité pour décrire l'hyperbole M D *m*, qui dans le cas de 4 A C $<$ B B, eſt le lieu géométrique de l'équation générale.

753. Il ſuit de-là que *toutes les fois que* b *eſt plus petit que* $\frac{1}{4}a^2$, *la formule des équations du ſecond degré appartient à l'hyperbole.*

754. Mais ſi par haſard le terme y^2 manquoit dans une équation du ſecond degré, comment venir à bout de la conſtruire?

On ſuppoſeroit d'abord le reſte de l'équation diviſé par *b*, coefficient de x^2, & on auroit un réſultat de cette forme . . . .

$$x^2 + mxy + nx + py + q = 0.$$

Puis on ſuppoſeroit $x + \frac{my}{2} + \frac{n}{2} = u$, & on auroit, en ſubſtituant . . . . . .

$$u^2 - \tfrac{1}{4} m^2 y^2 + (p - \frac{m n}{2}) y + q - \tfrac{1}{4} n^2 = 0;$$ FIG.

équation à l'hyperbole, qui se construiroit comme la formule . . .

$$u^2 - A z^2 - B z - C = 0.$$

Et si on supposoit $b = 0$, alors les deux quarrés des coordonnées manquant dans l'équation à construire, on n'auroit plus qu'une quantité de cette forme . . . .

$$x y + m x + n y - p = 0$$

qui appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, comme il est aisé de s'en convaincre par la construction qui suit.

Soit $x + n = u$; on aura . . $u y + m u = m n + p$. Soit $y + m = z$; on aura $u z = m n + p$ . . . Soit prolongé A P vers D jusqu'à ce que A D soit égal à n, & soit mené D C $= m$, parallélement à P M, de maniere que par le point C on puisse mener une droite indéfinie C Q parallele à A P. 170.

Cette construction une fois faite, il est clair que l'on aura

$$M Q = y + m \ldots C Q = x + n.$$

Donc $(y + m) \cdot (x + n) = m n + p$; équation à l'hyperbole décrite entre les asymptotes C K & C Q, en supposant qu'elle ait $m n + p$ pour puissance (697).

Or cette derniere équation est précisément la même que $x y + m x + n y - p = 0$, dont nous cherchions le lieu géométrique.

755. De tout ce qui précede, on doit conclure que *toute équation indéterminée du second degré appartient à une section conique*; & que pour en connoître l'espece, il suffit d'avoir égard aux trois premiers termes $y^2 + a x y + b x^2$ de la formule générale de ces équations.

Résumant donc les diverses suppositions que nous avons faites, nous dirons;

I°, Que si ces trois termes forment un quarré parfait, ou, ce qui revient au même, si $b = \frac{1}{4} a^2$, l'équation appartient toujours à la parabole. Donc si $b = 0$, ou s'il ne reste des trois premiers termes que y^2, l'équation appartient encore à la parabole. On voit que la même chose auroit lieu, s'il n'y avoit simplement que x^2.

II°, Si b coefficient de x^2 surpasse $\frac{1}{4} a^2$, quarré de la moitié du coefficient de $x y$, l'équation est alors à l'ellipse. Il faut dans ce cas-là que le terme qui renferme x^2 soit positif.

Remarquez que l'ellipse peut devenir au cercle dans deux cas. 1°, Lorsque C D = C G, ou A = 1, & que l'angle C N M = B C G est droit. Alors B E^2 = B F^2 + F E^2, ou $m^2 = n^2 + \frac{a^2 m^2}{4}$; 167.

FIG.

& puiſque $A = 1 = (b - \frac{1}{4}a^2)\frac{m^2}{n^2}$, on a . . . . . $b = \frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{4}a^2 = 1$. Ainſi l'équation à conſtruire auroit cette forme . . . . . $y^2 + axy + x^2 + cx + dy + f = 0$, & elle appartiendroit au cercle, tant que l'angle B N M ſeroit droit.

2°. L'ellipſe devient encore un cercle, ſi $a = 0$, ſi $b = 1$, & ſi l'angle A P M eſt droit : car alors l'équation devenant . . . $y^2 + x^2 + cx + dy + f = 0$, on voit bien qu'elle doit appartenir au cercle, & que ce cas-là ſuit immédiatement du précédent.

III°. L'équation générale des équations du ſecond degré appartient à l'hyperbole, lorſque dans ſes trois premiers termes, $y^2 + axy + bx^2$, le coefficient b eſt plus petit que $\frac{1}{4}a^2$, quarré de la moitié du coefficient du terme xy. Si b eſt négatif, l'équation eſt donc encore à l'hyperbole, & ſi $b = 1$, l'hyperbole eſt équilatere.

Si l'un des deux quarrés, y^2 ou x^2 manque, le rectangle xy reſtant toujours, la courbe eſt encore à l'hyperbole ; & ſi les deux quarrés manquent à la fois, alors l'équation doit ſe rapporter aux aſymptotes.

756. Il peut arriver que l'équation propoſée ne ſoit pas réellement du ſecond degré, & qu'elle appartienne à la ligne droite. Telle eſt l'équation . . . $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 = a^2$; mais alors la ſection conique qu'elle repréſente, dégénere en ligne droite, comme on ſent bien que cela doit avoir lieu pour une parabole dont le parametre ſeroit nul, & qui par conſéquent ſe confondroit avec ſon axe.

757. Si par haſard l'équation propoſée impliquoit quelque contradiction, le calcul le feroit bientôt connoître, par les opérations qu'il indiqueroit ; comme, par exemple, en conduiſant le calculateur à décrire un cercle d'un rayon imaginaire, &c, &c. Ces détails ſuffiront pour l'intelligence des problêmes ſuivants.

Réſolution des Problêmes indéterminés du ſecond degré.

PROBLEME I.

171. 758. Les deux points A & B étant donnés, trouver la courbe A M B, telle qu'en menant de l'un quelconque M de ſes points, les droites M A & M B, l'angle A M B ſoit toujours le même.

Soit mené M P perpendiculaire ſur A B, & ſoit A P $= x$ . . . . P M $= y$ . . . . A B $= a$ . . . . *tang* A M B $= t$, on aura *tang* A M P $= \frac{x}{y}$, & *tang* B M P $= \frac{a-x}{y}$. Donc $t = (\frac{x}{y} + \frac{a-x}{y})$:

FIG.

$\left(1 - \frac{x(a-x)}{y^2}\right)$; ce qui donne . . . $y^2 + x^2 - ax - \frac{a}{t}y = 0$; équation au cercle que l'on peut construire ainsi.

Soit d'abord cette équation écrite sous cette forme . . . .

$$\left(y - \frac{a}{2t}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a - x\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{t^2}.$$

Soit divisé ensuite AB par la moitié au point F, par lequel on menera $EF = \frac{a}{2t}$ perpendiculaire sur AB; puis du centre E & du rayon $EA = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4t^2}\right)}$, soit décrit le cercle AMB. Il est clair que ce sera le lieu de l'équation trouvée; car en menant EQ parallele à AB, on aura . . . $EQ = \frac{1}{2}a - x$ . . . $MQ = y - \frac{a}{2t}$. Donc &c.

Puisque $EF = \frac{a}{2t}$, l'angle AEF doit être égal à l'angle AMB; donc si on mene AT, de maniere que l'angle TAB soit égal à l'angle AMB, la ligne AE perpendiculaire sur AT rencontrera EF au centre du cercle cherché.

PROBLÊME II.

759. Imaginons que la ligne droite AB, d'une longueur donnée, se meuve dans l'angle BCA, de maniere que ses extrémités A & B restent toujours sur les côtés de cet angle; il s'agit de trouver la courbe décrite par un point déterminé M, pris sur cette ligne AB. 1721

Soit mené MP parallele à AC, & soit $CP = x$ . . . $PM = y$ . . . $AM = m$ . . . $BM = n$ . . . $cof\,ACB = cof\,MPB = c$; on aura $BP = \frac{nx}{m}$, & le triangle MPB donnera (580) . . . . . .

$$cy \cdot \frac{2nx}{m} = y^2 - n^2 + \frac{n^2x^2}{m^2}; \text{ ou } \ldots y^2 - \frac{2nc}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 - n^2 = 0$$

équation qui appartient évidemment à l'ellipse.

Pour la construire, soit $y - \frac{cnx}{m} = u$; on aura, en faisant $sin\,MPB = s$ . . . $u^2 + \frac{n^2s^2}{m^2}x^2 - n^2 = 0$. Ayant donc pris arbitrairement $CE = g$, & mené $EF = \frac{cgn}{m}$, parallélement à AC, si on tire CFQ, on aura $QM = u$.

FIG. Soit donc $CF=f$, & $CQ=\zeta$, on aura $x=\frac{g\zeta}{f}$; donc $u^2=\frac{n^2s^2g^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{g^2s^2}-\zeta^2\right)$. Ainſi les diametres conjugués CO & CG ſeront reſpectivement exprimés par $\frac{fm}{gs}$ & par n; & puiſque l'on connoît l'angle GCO, il eſt facile de décrire l'ellipſe (684).

Si l'angle ACB étoit droit, l'équation primitive deviendroit . . . $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$; auquel cas elle appartiendroit à une ellipſe qui auroit m & n pour demi-axes. On peut donc décrire par ce procédé toute ellipſe dont les axes ſeront donnés; le premier étant déſigné par $2a$, & le ſecond par $2b$, ou prendra $AM=a$ . . . $MB=b$, & on fera mouvoir la droite AB entre les côtés d'un équerre. Le point M décrira le quart de l'ellipſe demandée.

PROBLÊME III.

173. 760. La parabole NAK étant donnée, trouver le lieu de tous les points M tels qu'en menant les deux tangentes NM & KM, l'angle qu'elles formeront ſoit toujours égal à un angle donné.

Menons MP, KL & NQ perpendiculairement ſur l'axe AQ, & ſuppoſons $AP=x$ . . . $PM=y$ . . . $NQ=\zeta$ . . $KL=u$ . . . le parametre de la parabole $=p$ . . . *tang* $NMK=t$; & nous aurons, à cauſe des triangles ſemblables TPM, TNQ, & SPM, SLK, les proportions ſuivantes.

$$\frac{2\zeta^2}{p}:\zeta::\frac{\zeta^2}{p}-x:y\ldots\frac{2u^2}{p}:u::x-\frac{u^2}{p}:y.$$

Donc $2y\zeta=\zeta^2-px$, & $2uy=px-u^2$. Ajoutant & ſouſtrayant ces deux équations, on trouve pour réſultat . . . $2y=\zeta-u$ . . . $\zeta^2+u^2-2px=4y^2$. Or la premiere donne . . . $\zeta^2+u^2-2u\zeta=4y^2$; donc $u\zeta=px$. Cette équation jointe à celle-ci . . . $\zeta-u=2y$, exprime que les lignes MK & MN touchent la parabole. Il ne reſte donc plus qu'à faire enſorte que l'angle NMK ſoit conſtant.

Or $NMK=NTQ+KSL$; & puiſque *tang* $NTQ=\frac{NQ}{TQ}=\frac{p\zeta}{2\zeta\zeta}=\frac{p}{2\zeta}$, & que *tang* $KSL=\frac{p}{2u}$, on a

FIG.

$$tang\ NMK = t = \frac{\frac{p}{2\zeta} + \frac{p}{2u}}{1 - \frac{pp}{4\zeta u}} = \frac{\frac{1}{2}p(u+\zeta)}{\zeta u - \frac{1}{4}pp} = \frac{2p(u+\zeta)}{4px - p^2},$$

d'où l'on tire . . . $\frac{1}{2}t(4x-p) = u+\zeta$. D'ailleurs puiſque $\zeta - u = 2y$, on en déduit

$$\zeta = y + \tfrac{1}{4}t(4x-p) \ldots u = -y + \tfrac{1}{4}t(4x-p);$$

donc $u\zeta$, ou $px = -y^2 + t^2(x - \frac{1}{4}p)^2$; & ordonnant, on obtient enfin

$$y^2 - t^2x^2 + x(\tfrac{1}{2}pt^2 + p) - \tfrac{1}{16}p^2t^2 = 0,$$

équation à l'hyperbole que l'on peut conſtruire ainſi.

Soit $x - \frac{1}{4}p - \frac{p}{2t^2} = \zeta$, on aura . . . . $y^2 = t^2\left[\zeta^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2+1)\right]$; & comparant cette équation à . . . $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, on trouvera en appellant s le ſinus de l'angle NMK,

$$m = \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2+1)} = \frac{p}{2ts} \ldots n = \frac{p}{2s}.$$

Diminuant donc les x de la quantité $AC = \frac{1}{4}p + \frac{p}{2t^2}$, & décrivant une hyperbole dont le premier axe $Dd = 2m$, & le ſecond $= 2n$, cette courbe ſera le lieu géométrique de l'équation trouvée.

On peut remarquer 1°, que ſi l'angle NMK étoit obtus, la tangente t ſeroit négative: mais cela ne changeroit rien à l'équation, parce qu'elle ne renferme que des puiſſances paires de t; d'où il ſuit que des deux branches hyperboliques MDm & M′dm', l'une ſatisfait au problême dans le cas où l'angle donné eſt aigu, & l'autre dans le cas où cet angle ſeroit obtus; & il eſt clair que c'eſt la plus éloignée, MDm, qui convient au premier cas.

On peut remarquer 2°, que ſi l'angle donné étoit droit, la ligne cherchée ſeroit la directrice même de la parabole; en ſorte que ſi de chaque point de cette directrice on mene deux tangentes à la parabole, l'angle qu'elles formeront ſera toujours droit.

PROBLÊME IV.

761. Faire paſſer une ſection conique par cinq points donnés A, C, D, B, E. 1744

Par deux de ces points, menons la ligne AB, & tirons des autres points, les perpendiculaires CF, DH, GE ſur cette ligne. Suppoſons enſuite que l'équation de la ſection conique cherchée eſt

FIG. $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy + g = 0$,

& faisons $AF = p$ . . . $FC = q$ . . . $AG = p'$ . . . $GE = q'$ . . . $AH = p''$ . . . $DH = q''$ . . . $AB = p'''$. Il faudra que lorsque $x = 0$, on ait $y = 0$: ainsi $g = 0$; ce qui réduit l'équation à

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$$

Ensuite, selon que $x = p$, ou p', ou p'', ou p''', on a $y = q$, ou $-q'$, ou q'', ou zéro : ainsi on a les quatre équations suivantes

$$aq^2 + bpq + cp^2 + dp + fq = 0 \ldots aq'q' - bp'q' + cp'p' + dp' - fq' = 0.$$
$$aq''q'' + bp''q'' + cp''p'' + dp'' + fq'' = 0 \ldots cp'''p''' + dp''' = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs des quatre inconnues b, c, d, f, qui étant substituées dans l'équation. . . $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$, donneront l'équation de la courbe cherchée, après avoir divisé par a.

Il n'y aura donc plus qu'à construire cette équation par les principes déja connus.

On peut appliquer la même méthode à la résolution d'un problême semblable pour les lignes du troisieme, du quatrieme degré, & ainsi de suite.

762. Cette même méthode peut servir à trouver par approximation la loi qu'observent entre elles plusieurs quantités liées ensemble par de certains rapports ; & on l'appelle alors la *Méthode des interpolations*.

175. Supposons, par exemple, les trois quantités BC, DE, FG dépendantes de trois autres quantités AB, AD, AF : il s'agit de trouver en général une loi qui unisse ces six quantités.

Pour cela, imaginons la ligne indéfinie ABDF, dont nous regarderons les parties AB, AD & AF comme les abscisses d'une courbe CEMG, & supposons que chaque ordonnée y est une fonction indéterminée $A + Bx + Cx^2 +$ &c de l'abscisse correspondante. (On prendroit quatre termes pour exprimer cette fonction, s'il y avoit quatre quantités données, BC, DE, PM & FG, & ainsi de suite).

Cela posé, puisque l'on a dans cet exemple $y = A + Bx + Cx^2$, on fera $AB = a$ . . . $BC = b$ . . . $AD = a'$ . . . $DE = b'$ . . . $AF = a''$ . . . $FG = b''$, ce qui donnera les trois équations suivantes.

$$b = A + Ba + Ca^2 \ldots b' = A + Ba' + Ca'a' \ldots b'' = A + Ba'' + Ca''a'',$$

par lesquelles on déterminera les coefficients A, B, C ; ce qui donnera une équation approchée de la courbe CM : ainsi on pourra trouver une quantité AP qui dépende d'une autre quantité PM, de la même maniere que AB dépend de BC, & que AD dépend de DE ; ce qui est réciproque.

763. On peut trouver aussi par la même méthode l'équation approchée d'une courbe que l'on auroit tracée au hazard sur le papier.

Il suffit pour cela 1°. d'abaisser des perpendiculaires de différens

points de cette courbe, & sur-tout de ceux où elle change le plus de concavité, sur une droite quelconque, que l'on prendra pour ligne des abscisses. 2°, De supposer que l'équation de la courbe tracée est de cette forme . . . $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c$, dans laquelle on fera entrer autant de coefficients indéterminés que l'on aura abaissé de perpendiculaires sur la ligne des abscisses: après quoi on déterminera, comme ci-dessus, les coefficients A, B, C, D, afin d'obtenir une équation approchée de la courbe en question.

Résolution des Problêmes déterminés qui ne passent pas le quatrieme degré.

764. Etant données deux équations indéterminées du second degré, on peut construire séparément leurs lieux géométriques, en leur donnant la même ligne des abscisses, la même origine, & le même angle des coordonnées. Dans cette supposition, il est clair que les deux courbes se couperont en des points tels que les ordonnées correspondantes à ces points seront les racines de l'équation déterminée que l'on auroit en réduisant les deux équations données à une seule qui ne renfermât plus que x ou y.

Réciproquement, étant proposée une équation déterminée du troisieme ou du quatrieme degré à résoudre, si on prend deux équations affectées l'une & l'autre de deux inconnues x & y, telles qu'en éliminant une de ces deux inconnues, on trouve l'équation proposée, il est évident qu'en construisant séparément les lieux de chacune de ces deux équations indéterminées, les points d'intersection des courbes qui en résulteront, auront chacun pour l'une de ses coordonnées une valeur de l'inconnue.

Soit, par exemple, l'équation générale

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

si on fait $x^2 = py$, on aura l'équation

$$p^2y^2 + apxy + bpy + cx + d = 0;$$

qui appartient à une section conique, & qui étant construite avec la parabole exprimée par l'équation $x^2 = py$, coupera cette courbe en des points dont les abscisses correspondantes seront les valeurs de x.

Si l'équation proposée a quatre racines réelles, les deux sections qu'il faudra construire, se couperont en quatre points. S'il n'y a que deux racines réelles, il n'y aura que deux intersections entre les lieux trouvés; & si toutes les racines sont imaginaires, il n'y aura aucun point d'intersection. Au cas enfin qu'il y eût quelques racines égales, les deux courbes se toucheroient en un ou deux endroits.

FIG.

REMARQUE.

765. Il peut arriver cependant que l'équation ait des racines réelles, & que les courbes ne ſe rencontrent pas, ou qu'elles ſe rencontrent en moins de points que l'équation n'a de racines. C'eſt une exception qui donne lieu à une difficulté dont on peut voir les détails & la réſolution dans les *Inſtitutions analytiques* du P. Riccati. Nous n'inſiſterons pas ſur cet objet, ne devant propoſer dans les problêmes ſuivants aucun cas qui ſoit ſujet à une pareille exception.

PROBLÊME I.

766. Etant données deux droites a & b, trouver deux moyenes proportionelles x & y entre ces deux lignes.

Puiſque l'on a par la ſuppoſition $\dot{=} a : x : y : b$, on en conclura d'abord que $x^2 = ay$, & que $y^2 = bx$. Ainſi en conſtruiſant les paraboles qui ſeroient les lieux géométriques de ces équations, & en leur donnant la même ligne des abſciſſes, le même ſommet, & le même angle des coordonnées, (angle que l'on ſuppoſe ordinairement droit) ces paraboles donneroient par leur interſection les valeurs cherchées de x & de y.

Mais pour un problême auſſi facile, une pareille ſolution ſeroit trop compliquée: car, en général, on ne doit point conſtruire une équation du troiſieme ou du quatrieme degré, par le moyen de deux ſections coniques, ſans y employer le cercle dont la deſcription eſt beaucoup plus aiſée que celle des autres courbes.

Il eſt vrai que pour introduire le cercle dans ce genre de ſolution, on a quelquefois beſoin d'une certaine adreſſe que l'habitude ſeule peut faire acquérir: mais auſſi il eſt des cas où cette maniere de conſtruire les équations ſe préſente tout de ſuite.

Par exemple, ſi on ajoute les deux équations précédentes.

$$x^2 - ay = 0 \ldots\ldots y^2 - bx = 0;$$

on trouvera qu'en ſuppoſant les coordonnées perpendiculaires, il réſulte une équation au cercle, qui eſt

$$x^2 + y^2 - ay - bx = 0;$$

laquelle étant conſtruite avec une des deux équations à la parabole, $x^2 = ay \ldots y^2 = bx$, fera connoître les valeurs de x & de y.

176. Soit donc décrite une parabole A M dont le parametre ſoit b, & qui ait pour axe la droite indéfinie A P; cette courbe ſera le lieu géométrique de l'équation $y^2 = bx$.

Pour trouver celui de l'équation $\ldots x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, faiſons $x - \frac{1}{2}b = u$, & $y - \frac{1}{2}a = z$: nous aurons $\ldots u^2 + z^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$. Menons enſuite par le point A perpendiculairement ſur AP

une droite A B qui ſoit $= \frac{1}{2} a$, & par le point B la droite B C Q, parallele indéfinie à A P. FIG.

Cela poſé, ſi on prend B C $= \frac{1}{2} b$, & ſi du rayon C A on décrit un cercle, on aura le lieu de l'équation . . . $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$; ce cercle coupera donc la parabole en un point M, tel qu'en abaiſſant la perpendiculaire M P, les coordonnées A P & P M ſeront les deux moyenes proportionelles cherchées.

Si on ſuppoſoit $b = 2a$, le cube conſtruit ſur A P ſeroit double du cube a^3; ce qui réſoudroit à peu de frais le problême de la duplication du cube, dont quelques anciens Géomètres firent grand bruit.

On peut même généraliſer la ſolution de ce problême, en prenant $b = \frac{m}{n} a$, pour trouver un cube $AP^3 = \frac{m}{n} a^3$, qui ſeroit à un cube donné a^3, dans le rapport de m à n.

PROBLÊME II.

767. Diviſer un arc de cercle B F en trois parties égales.

Je ſuppoſe que M F ſoit le tiers de l'arc B F, & après avoir mené les perpendiculaires B O G, & M P m ſur le rayon A F, je tire m R perpendiculaire ſur B G. 177.

Puis, faiſant A P $= x$ . . . . P M $= y$ . . . . A M $= a$ . . . A O $= b$ . . . B O $= c$, j'aurai par les triangles ſemblables A M P & B m R.

$$x : y :: c + y : x - b, \text{ ou } y^2 - x^2 + cy + bx = 0;$$

équation à l'hyperbole équilatere (755), qui étant conſtruite déterminera le point M où le cercle & l'hyperbole ſe couperont.

Or l'équation . . . $y^2 - x^2 + bx + cy = 0$, peut être miſe ſous cette forme

$$(y + \tfrac{1}{2} c)^2 - (x - \tfrac{1}{2} b)^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \tfrac{1}{4} b^2.$$

Donc ſi c eſt plus grand que b, l'équation appartiendra au ſecond axe, & ſi b eſt plus grand que c, elle appartiendra au premier. Dans cette derniere hypothèſe, on pourra décrire l'hyperbole, de la maniere ſuivante.

Par le centre A ſoit mené A D $= \frac{1}{2}$ B O, perpendiculairement ſur A F: ſoit tiré enſuite D C parallélement à la ligne A O, de maniere que D C ſoit égal à $\frac{1}{2}$ A O: le point C ainſi déterminé, ſera le centre de l'hyperbole; de ſorte que ſi on prend C L $=$ C K $= \sqrt{(\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} c^2)}$, & ſi on décrit ſur l'axe L K une hyperbole équilatere K M, elle coupera le cercle au point cherché M.

L'hyperbole oppoſée M' L M'' coupe le cercle en deux points M' & M'', dont le premier donne (572) l'arc F' M'' $= \frac{1}{3}$ F' M' B, pendant que le ſecond détermine l'arc F' M'' $= \frac{1}{3}$ F' M'' G F B.

Quant au point d'interſection G, il eſt aiſé de voir que l'hyperbole

FIG. est assujettie à passer par ce point, & qu'il ne donne par conséquent aucune solution.

768. Si on eût voulu résoudre le même problême par le moyen d'une parabole, cela eût été facile en ajoutant les deux équations

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ \& } y^2 - x^2 + bx + cy = 0$$

Car alors on eût trouvé . . . $y^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}a^2$; équation à la parabole qui se construit ainsi.

178. Du point A ayant mené parallélement à BG la ligne $AD = \frac{1}{4}BO$, on tirera $DC = \frac{\frac{1}{8}c^2 + a^2}{b}$, parallele à AF, & on décrira du sommet C & de l'axe CD une parabole dont le parametre soit $= \frac{1}{2}AO$.

Cette parabole coupera le cercle aux points cherchés M, M', & M''. On peut varier ces solutions de bien des manieres, en multipliant les deux équations du problême, par des quantités indéterminées, & en ajoutant ou soustrayant ensuite les produits, ce qui mene à des sections coniques différentes, toutes également propres à résoudre le problême.

769. Si on vouloit, par exemple, le résoudre par le moyen d'une ellipse, il n'y auroit qu'à multiplier l'équation du cercle . . . . $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, par l'indéterminée m, & qu'à joindre le produit à la seconde équation. Il en résulteroit

$$y^2 + \frac{(m-1)x^2 + bx + cy - a^2 m}{m+1} = 0,$$

qui appartient à l'ellipse tant que m est positive & plus grande que l'unité: si m étoit négative & < 1, l'équation appartiendroit à l'hyperbole. On peut ensuite déterminer m par une condition arbitraire; par exemple, si on demandoit que les axes de l'ellipse fussent entre eux dans le rapport de $p : q$, il faudroit que $\frac{m-1}{m+1}$ fût égal à $\frac{p^2}{q^2}$, ce qui donne $m = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2}$.

PROBLÊME III.

770. L'espace parabolique ACB étant donné, mener une droite CM
179. qui le divise en deux secteurs égaux ACM & BCM.

Soit mené MP perpendiculaire sur AC, & soit $AP = x$ . . . $PM = y$ . . . $AC = a$ . . . $BC = b$ . . . le parametre de la parabole $= p$, on aura $\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(a-x) = ACM = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}ACB$, ou $xy + 3ay = 2ab$; équation à l'hyperbole entre les asymptotes, que l'on peut construire ainsi.

Soit prolongé AP au-delà de l'origine A, jusqu'à ce que AF soit égal à $3AC$, & soit mené FK perpendiculaire sur FA; si on décrit

entre les asymptotes FA & FK une hyperbole équilatere dont la puissance soit $2ab$, elle sera le lieu de l'équation . . . $xy + 3ay = 2ab$, & coupera par conséquent la parabole au point cherché M.

Mais si on vouloit se servir d'un cercle pour la résolution de ce problême, on le pourroit de la maniere suivante.

1°, Soit substitué $\frac{y^2}{p}$ à la place de x dans l'équation $xy + 3ay = 2ab$, elle se changera en une autre équation de cette forme . . . $y^3 + 3b^2y - 2b^3 = 0$.

2°, Soit multiplié cette équation par y; elle deviendra . . . . . $y^4 + 3b^2y^2 - 2b^3y = 0$; de laquelle on tirera, après avoir substitué px à y^2, cette nouvelle équation . . . . . $x^2 + 3ax - \frac{2a^2}{b}y = 0$.

3°, A celle-ci soit ajouté $y^2 - px = 0$; on aura $y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0$, équation au cercle, dont la construction peut s'effectuer ainsi.

Soit menée perpendiculairement sur AP une ligne $AD = \frac{a^2}{b}$; sur cette ligne AD soit menée de l'autre côté du point M une perpendiculaire $DC' = \frac{3a - p}{2}$, (on suppose dans cette figure que $3a$ surpasse p). Cela posé, si du rayon C'A & du centre C' on décrit un arc de cercle, on trouvera facilement que cet arc coupera la parabole au point cherché M, puisqu'il est par la construction même le lieu de l'équation . . . $y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0$,

On a donc $PM = b\,[\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})} - \sqrt[3]{(-1 + \sqrt{2})}]$.

PROBLÊME IV.

771. Résoudre par une construction géométrique l'équation générale du troisieme degré . . . $x^3 \pm p^2x - p^2q = 0$.

Multipliant cette équation par x, on aura $x^4 \pm p^2x^2 - p^2qx = 0$; & faisant $x^2 = ay$, on trouvera . . . $y^2 \pm \frac{p^2}{a}y - \frac{p^2q}{a^2}x = 0$; équation qui, ajoutée avec $x^2 - ay = 0$, devient une équation au cercle de cette forme . . . . . .

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 \mp p^2}{a}\right) - \frac{p^2q}{a^2}x = 0.$$

Or la construction de celle-ci avec celle de la parabole, $x^2 = ay$,

FIG. donnera les racines de l'équation proposée. Mais il faut distinguer deux cas ; celui où l'on a $x^3 + p^2 x - p^3 q = 0$, & celui où $x^3 - p^2 x - p^2 q = 0$.

Dans le premier, l'équation au cercle est

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 - p^2}{a}\right) - \frac{p^2 q x}{a^2} = 0 ;$$

& comme la quantité a est indéterminée, on peut simplifier cette équation, en faisant $a = p$; ce qui donnera . . . $y^2 + x^2 - q x = 0$, que l'on pourra construire ainsi.

Soit décrit un cercle sur le diametre A B $= q$, & ayant élevé sur A B la perpendiculaire A L, décrivons une parabole dont le sommet soit A, l'axe A L, & le parametre p ; cette courbe coupera le cercle en un point M qui déterminera l'abscisse A P, seule racine réelle (340) de l'équation proposée.

Dans le second cas on a

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 + p^2}{a}\right) - \frac{p^2 q x}{a^2} = 0.$$

181. Ainsi en faisant $a = p$, on aura . . . $x^2 = p y$ . . . $y^2 + x^2 - 2 p y - q x = 0$. Décrivons donc une parabole M A M', comme dans le cas précédent, & prenons A D $= p$: menant ensuite la ligne D C $= \frac{1}{2} q$, perpendiculairement sur A D, décrivons du centre C & du rayon C A un cercle ; ce cercle coupera la parabole aux points M, M' & M'', qui donneront M Q, M' Q' & M'' Q'' pour les racines cherchées.

Quant au point A où le cercle & la parabole se rencontrent, il donne la racine introduite . . . $x = 0$.

De ces trois valeurs, il n'y a que la premiere qui soit positive ; les deux autres sont négatives, & leur somme est égale à la seule racine positive M Q (317).

Il pourroit arriver que le cercle ne coupât la parabole qu'en un point M ; & cela arrive toutes les fois que $\frac{1}{4} q^2$ surpasse $\frac{1}{27} p^3$ (340).

PROBLÊME V.

772. Trouver les racines de l'équation générale du quatrieme degré . . . $x^4 - p^2 x^2 + p^2 q x + p^3 r = 0$, par le moyen d'un cercle & d'une parabole.

Je fais à l'ordinaire . . . . $x^2 = p y$, & j'ai . . . $y^2 + q x - p y + p r = 0$; j'ajoute $x^2 - p y = 0$; il en résulte l'équation au cercle.

$$x^2 + y^2 - 2 p y + q x + p r = 0.$$

Soit donc décrite une parabole M' A M'' qui ait pour axe la droite
182. A Q perpendiculaire sur A P, & p pour parametre. Cela posé, si on prend A D $= p$, & D C $= \frac{1}{2} q$, perpendiculaire sur A D, du côté

que l'on voit dans la figure (ou de l'autre côté si DC devoit être négatif) on trouvera qu'un cercle décrit du centre C & du rayon $\sqrt{(CA^2 - pr)}$, coupera la parabole aux points M, M', M'' & M''', qui détermineront les quatre racines de l'équation proposée. Il y en aura deux positives, savoir MQ & M'Q'; les deux autres seront négatives; & leur somme sera égale à celle des deux premieres (317). FIG.

REMARQUE.

773. Il peut arriver 1°, que le cercle coupe la parabole en quatre points, comme on le voit dans la Figure 182. 2°, Qu'il n'y ait que deux points d'intersection. 3°, Qu'il n'y en ait aucun. Or on sait (764) que dans le premier cas l'équation a ses quatre racines réelles; que dans le second cas, elle en a deux réelles & deux imaginaires; & que dans le troisieme cas, toutes ses racines sont imaginaires.

Vous remarquerez cependant que la construction précédente n'auroit pas lieu, si l'équation à construire étoit $x^4 + p^2x^2 - p^3qx + p^3r = 0$. Mais en supposant à l'ordinaire $x^2 = py$, on auroit... $y^2 + x^2 - qx + pr = 0$; équation au cercle, comme dans le cas précédent, & qui est encore plus facile à construire, c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

PROBLÊME VI.

774. Trouver les racines de l'équation ... $x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0$, par le moyen d'un cercle & d'une hyperbole entre les asymptotes.

Je fais $xy = pm$, & j'en déduis ... $x^4 - pqx^2 + p^2rx + x^2y^2 = 0 = x^2 + y^2 - pq + \frac{p^2r}{x} = x^2 + y^2 - pq + \frac{pry}{m}$; équation au cercle, qui donne la construction suivante.

Entre les asymptotes perpendiculaires QAQ', & P'''AP', soient décrites deux hyperboles équilateres opposées, dont la puissance soit pm. Si on prend au-dessous de AP la ligne $AC = \frac{pr}{2m}$, & si on décrit un cercle du centre C & du rayon $\sqrt{(AC^2 + pq)}$, ce cercle coupera les hyperboles opposées aux quatre points M, M', M'' & M''', qui détermineront les quatre valeurs de x, par les abscisses AP, AP', AP'' & AP'''. 183.

Les deux premieres sont positives, les deux dernieres sont négatives; d'où l'on voit que cette solution ne peut avoir lieu que lorsque le dernier terme de l'équation proposée est positif.

Les principes que nous avons exposés dans le premier Chapitre des lieux géométriques, & les applications que nous venons d'en faire dans la résolution de divers problêmes, suffisent pour donner au moins une idée des constructions géométriques. Nous allons maintenant passer au Calcul Différentiel.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

IL en eſt du Calcul Différentiel comme de l'Algebre : on ne ſauroit le définir d'une maniere intelligible pour ceux qui n'en connoiſſent pas les premiers éléments.

Newton fut le premier Inventeur de ce calcul, & perſonne n'en eût partagé la gloire avec lui, s'il eût été plus empreſſé de mettre au jour ſes découvertes.

Mais l'eſpece de myſtère dont il les enveloppa dans l'origine, donna le tems à Leibnitz de marcher à grands pas dans la même carriere. Bientôt après Jacques & Jean Bernoulli y firent des progrès rapides ; de-là cette vive conteſtation que les Géomètres Allemands eurent avec les Géomètres Anglois, ſur la part que Leibnitz avoit eue à cette nouvelle théorie. Sans entrer dans cette diſcuſſion, nous obſerverons que d'autres Géomètres avoient préludé depuis long-tems à la découverte du calcul différentiel.

Il ne ſeroit même pas difficile de faire voir l'analogie qui regne entre ce calcul d'une part, & de l'autre *la Méthode d'Exhauſtion*, ſi connue des Anciens, *la Méthode des Indiviſibles*, donnée par Cavalieri, & les procédés dont Fermat, Deſcartes, Barrow & tant d'autres faiſoient uſage avant Newton. Les travaux de ces derniers Géomètres ſemblent avoir ſervi d'échelons à ce grand homme.

775. Quoi qu'il en ſoit, ſuppoſons qu'une *variable* quelconque x reçoive un accroiſſement fini e ; de maniere qu'après l'avoir reçu, ſon état ſoit exprimé par $x + e$. On demande quels doivent être les accroiſſements correſpondants des autres fonctions de x?

D'abord il eſt clair que ſi x devient $x+e$, ſon quarré x^2 deviendra $x^2 + 2ex + ee$; ainſi le rapport de ces deux accroiſſements ſera $\frac{1}{2x+e}$. Mais ſi e diminue, ce rapport augmentera, & il approchera de plus en plus de celui de $\frac{1}{2x}$. Cependant il ne lui deviendra égal, qu'au moment où e s'évanouira : le rapport $\frac{1}{2x}$ eſt donc la *limite* de ceux que les accroiſſements finis de x & de xx peuvent avoir entre eux. On trouvera de même que la limite de ceux de x & de x^n eſt $\frac{1}{nx^{n-1}}$.

776. Or le calcul différentiel a pour objet de déterminer ces limites dans tous les cas. Voyez ce que M. d'Alembert a écrit ſur cette matiere ; vous y trouverez les vraies notions de ce calcul. S'il reſte encore quelques difficultés, c'eſt qu'elles ſont inſéparables des idées abſtraites de limite & d'infini.

FIG.

777. Voici une des applications les plus propres à faire entendre la maniere de déterminer ces limites. Soit proposé de mener une tangente au point M de la courbe A M m, ou, ce qui revient au même, soit proposé de déterminer la soutangente P T.

On supposera que l'abscisse A P $= x$ croît d'une quantité finie P $p = e$; on menera l'ordonnée P M $= y$, & on déterminera l'ordonnée $m p$, en substituant $x + e$ au lieu de x dans l'équation de la courbe. Quelle que soit la valeur de cette ordonnée, on pourra toujours la représenter par $y + Pe + Qe^2 + Re^3 + \&c.$ (P, Q, R, &c. étant des fonctions de x); on aura donc pour l'expression de rm, accroissement correspondant de l'ordonnée P M, la quantité $Pe + Qe^2 + Re^3 + \&c.$

Cela posé, soient menées la sécante S M m, & la ligne M r parallele & égale à P p; on aura P S $= \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Rapprochons maintenant le point p du point P; le point m s'approchera du point M, & le point S du point T: mais on aura toujours P S $= \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Si la quantité P p diminue encore & devient très-petite, il ne s'en faudra que de très-peu que m ne se confonde avec M, & que la sécante ne devienne tangente. Mais si e s'évanouit, le rapport déja trouvé se réduit à $\frac{y}{p}$, P S devient P T, S m devient T M qui n'a plus que le point M de commun avec la courbe, & la soutangente est déterminée par cette limite.

PAR EX. Si A M m est une parabole, on substituera $x + e$ à x 184. dans l'équation $y = \sqrt{px}$, & on aura $y = p^{\frac{1}{2}}(x+e)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} e - \&c$, qui donne $P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$; d'où $PT = \frac{\sqrt{px}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}} = 2x$, comme nous l'avons déja trouvé (669).

On voit par là avec quelle promptitude cette méthode résout le problême des tangentes, qui est en quelque sorte le berceau du calcul différentiel. Mais on verra bien plus amplement dans la suite la conformité des résultats de ce calcul avec ceux de l'ancienne Géométrie.

En attendant, nous remarquerons que ces quantités P p, ou M r, & rm qui diminuent de plus en plus, à mesure que le point p se rapproche du point P, sont les éléments respectifs de l'abscisse A P & de l'ordonnée M P.

778. Ces éléments, quelque petits qu'on les suppose, conservent entre eux le même rapport que les quantités finies auxquelles ils appartiennent; cela est visible par la seule inspection des triangles semblables T P M &

Mmr. Et comme la limite de ce rapport n'a lieu qu'au moment où ces éléments s'évanouiſſent, on peut dire avec M. Euler, que le calcul différentiel a pour objet de faire connoître à quoi ſe réduiſent les rapports des éléments des quantités variables, lorſque ces éléments deviennent nuls.

Mais ne pouvant devenir nuls, ſans paſſer par tous les degrés poſſibles de diminution, on ſent bien qu'il doit réſulter de leur décroiſſement infini des idées un peu confuſes : car notre eſprit ne comporte pas de perception claire de ce qui tient à l'infini. Auſſi depuis ſon origine, le calcul différentiel a-t-il éprouvé beaucoup de contradictions. Il en éprouvera ſans doute encore ; mais s'il falloit répondre à toutes les chicanes d'une Métaphyſique pointilleuſe, on n'en finiroit pas. L'exiſtence même du mouvement ſeroit encore un problême, ſi on s'étoit arrêté aux difficultés que Zénon propoſoit autrefois pour la combattre.

Ce n'eſt pas au reſte que Maclaurin, dans ſon *Traité des Fluxions*, n'ait répondu à la plûpart des ſophiſmes dont quelques Auteurs ont voulu embrouiller la matiere.

Mais on ne peut ſe diſſimuler, que pour ſuivre la marche rigoureuſe de ce ſavant homme, il faut eſſuyer bien des longueurs.

779. Au reſte, ſi les principes dont Leibnitz eſt parti, ne ſemblent pas auſſi rigoureux que ceux de Newton, ils ont du moins l'avantage de conduire aux mêmes réſultats, ce qui finit par inſpirer le même degré de confiance. Or telle eſt, ſuivant Leibnitz, la ſubordination d'une quantité infiniment petite par rapport à la quantité finie dont elle fait partie, qu'elle peut être négligée ſans erreur ſenſible, de même qu'on néglige une quantité finie par rapport à une quantité infinie. C'eſt ainſi, par exemple, que $\infty - 1$, & plus généralement $\infty \pm a$ ſe réduiſent à ∞. On peut regarder de même un infiniment petit du ſecond ordre, comme une quantité qui s'évanouit par rapport à un infiniment petit du premier.

Cela poſé, Leibnitz imagine qu'une variable x croiſſe ou décroiſſe d'une quantité infiniment petite, qu'il déſigne par dx, & il cherche quels doivent être les accroiſſemens ou les décroiſſemens reſpectifs des autres fonctions de x. Son quarré x^2, par exemple, devenant $(x \pm dx)^2 = x^2 \pm 2xdx + dxdx$, il eſt clair que $dxdx$ doit être rejetté comme un infiniment petit du ſecond ordre, & que par conſéquent la différence entre x^2 & $x^2 \pm 2xdx$ eſt $\pm 2xdx$. Ainſi l'accroiſſement correſpondant du quarré d'une variable quelconque eſt le produit du double de cette variable multipliée par ſon accroiſſement.

780. En général, la différence qui regne entre une quantité variable, avant qu'elle ait reçu aucune altération infiniment petite, & cette même quantité, après qu'elle a reçu quelque altération de ce genre, s'appelle *la différentielle* de cette quantité; ce qui a fait donner le nom de calcul différentiel, à la méthode qui détermine dans tous les cas ces différences.

Newton lui avoit donné auparavant le nom de *Calcul des Fluxions*, par une ſuite de l'idée qu'il s'étoit faite de la formation de toutes les quantités. Imaginant en effet que tout ce qui croît ou diminue dans la

nature, reçoit ces accroiſſements ou ces diminutions par le mouvement d'un de ſes éléments, il appella calcul des fluxions, la méthode dont il ſe ſervoit pour déterminer les rapports de ces variations.

781. Il nomma *Fluentes* les quantités que Leibnitz appelle *variables*, & ce que nous déſignerons par dx, il le déſigna par un point mis ſur x; enſorte que dx & $\dot{x}$ ſignifient la même choſe, & que fluxion de x, ou différentielle de x ſont abſolument ſynonymes. Le ſeul avantage qu'il y ait à ſe ſervir de la lettre d, au lieu d'un point, pour marquer les différentielles ou les fluxions des variables, c'eſt qu'elle les fait mieux reconnoître parmi d'autres quantités. Il eût même été à propos d'introduire dès le commencement quelque caractere propre à marquer les différentielles, comme on en a introduit un pour marquer les radicaux. Mais à préſent que l'uſage a prévalu, toute innovation de ce genre ſeroit déplacée, outre qu'elle auroit bien peu d'utilité.

782. Ainſi que les quantités finies & variable x & y ont des différentielles dx & dy, ces différentielles à leur tour en ont auſſi. On les appelle *Différences ſecondes*, pour les diſtinguer des premieres, & on les déſigne indifféremment par $d.dx$ & ddy, ou par $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$. Les différentielles troiſiemes ſont $d.d.dx$ & $d.d.dy$, ou $\dddot{x}$ & $\dddot{y}$, & ainſi de ſuite.

Pour abréger, on écrit d^2x, d^3x au lieu de ddx, $d.d.dx$. En général, la lettre d miſe devant une quantité quelconque indique qu'il faut *différentier* cette quantité; & l'expoſant de la même lettre d annonce combien de fois de ſuite il faut procéder à la *différentiation*.

Lorſque la quantité propoſée eſt polynome, on la met entre deux parenthèſes, que l'on fait précéder de la lettre d. Ainſi $d(x^2+y^2)$ indique qu'il faut différentier le binome x^2+y^2.

783. Quoique les différentielles de même degré ſoient toutes infiniment petites, elle ne ſont égales entre elles, que lorſqu'il y a égalité entre les quantités variables, dont elles dépendent reſpectivement. En attendant que nous enſeignions la maniere de trouver l'expreſſion du rapport que peuvent avoir des quantités qui s'évanouiſſent en même temps, ſoit $\frac{aa-xx}{a-x}$; il eſt certain que $a+x$ exprime la valeur de cette fraction, quelle que ſoit la valeur de x; mais ſi $x=a$, la fraction ſe réduit à $\frac{0}{0}$, & le quotient devient $2a$. Voilà donc un exemple de ces ſortes de fractions dont le numérateur & le dénominateur s'évanouiſſent en même temps, & qui cependant ont des valeurs très-réelles.

784. Si on ſuppoſe infini le diviſeur d'une quantité finie quelconque a, il eſt clair que le quotient doit alors ſe réduire à zéro. On a donc $\frac{a}{\infty}=0$; ce qui donne $a=0\times\infty$; d'où il ſuit que zéro multiplié par une quantité infinie peut repréſenter indifféremment toute ſorte de quantités finies; réciproquement, que *toute quantité finie diviſée par*

FIG. *zéro a pour quotient l'infini*, C'eſt-à-dire, que ∞ & o ſervent dans le calcul différentiel, comme autant de quantités indéterminées. Ce ſont des expreſſions vagues, dont il ſemble que l'on ne s'eſt aviſé, que pour éviter des circonlocutions.

Regles du Calcul Différentiel.

785. ETANT donné $y = ax$, on ſuppoſe que x reçoive un accroiſſement infiniment petit, déſigné par dx; y en recevra donc un auſſi que nous déſignerons par dy, & nous aurons $y + dy = ax + a\,dx$; d'où $dy = a\,dx$; c'eſt la différentielle de l'équation propoſée.

Elle eût été la même pour l'équation $b + y = ax - c$; car *les conſtantes n'ont point de différentielle.*

786. Et toutes les fois que les variables ne paſſeront pas le premier degré, on aura les différentielles des quantités propoſées, en effaçant les termes conſtants & en ſubſtituant aux variables leurs propres différentielles. S'il falloit, par exemple, différentier $bx + cy - e = \frac{m}{n}z + f$, vous écririez $b\,dx + c\,dy = \frac{m}{n}dz$.

Mais ſi les variables ſont élevées à d'autres puiſſances que la premiere; ſi on a, par exemple, $y = x^m$, alors en ſuppoſant que x devienne $x + dx$, on aura $y + dy = (x + dx)^m = x^m + m\,x^{m-1}\,dx + \frac{m \cdot m - 1}{2}\,x^{m-2}\,dx^2 +$ &c. Or dx^2, dx^3 &c. s'évanouiſſent par rapport à dx: reſtera donc $dy = m\,x^{m-1}\,dx$; donc ſi $m = 2$, $dy = 2\,x\,dx$; ſi $m = 3$, $dy = 3\,x^2\,dx$; &c.

787. En général, *pour différentier une variable élevée à une puiſſance quelconque, diminuez ſon expoſant d'une unité, & multipliez-la par l'expoſant qu'elle avoit d'abord & par ſa différentielle.* On auroit pû déduire cette regle par induction, ſans y employer la formule du binome, & alors on eût trouvé cette formule même avec plus de facilité que par l'Algebre ordinaire. Suppoſons en effet que l'on demande la valeur générale de $(1 + z)^m$. On peut repréſenter cette valeur par l'équation . . . $(1 + z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. Cela poſé, différentions en ſuivant la regle précédente; nous aurons . . . $m(1 + z)^{m-1}\,dz = A\,dz + 2B\,z\,dz + 3\,Cz^2\,dz +$ &c, en diviſant par dz, nous trouverons $m(1 + z)^{m-1} = A + 2Bz + 3\,Cz^2 +$ &c.

132. Or cette équation doit avoir lieu quelle que ſoit la valeur de z, ſuppoſons-la donc $= o$; alors $m = A$; donc $m(1 + z)^{m-1} = m + 2Bz + 3\,Cz^2 +$ &c. Différentions de nouveau, & diviſons enſuite par dz; il viendra $m \cdot m - 1\,(1 + z)^{m-2} = 2B + 2 \cdot 3\,Cz + 3 \cdot 4\,Dz^2 +$ &c. Soit $z = o$; donc $B = \frac{m \cdot m - 1}{2}$, & $m \cdot m - 1\,(1 + z)$

$(1+z)^{m-2} = m.m-1+2.3\,C z + \&c.$ Le même calcul donnera $C = \frac{m.m-1.m-2}{2.3}$, & ainsi des autres coefficients indéterminés D, E, &c. On aura donc $(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2} z^2 + \&c$, & $(a+b)^m$, ou $a^m(1+\frac{b}{a})^m = a^m(1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + \&c) = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}b^2 + \&c.$ Revenons aux différentielles.

788. Lorſque deux variables x & y ſe trouvent multipliées l'une par l'autre, alors $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy + dx\,dy = ydx + xdy$, parce que $dx\,dy$ s'évanouit.

On a de même, $d(xyz) = z\,d(xy) + xy\,dz = xyd z + xz dy + yz dx \ldots d(uxyz) = yz\,d(ux) + ux\,d(yz) = uxyd z + uxz\,dy + uyz\,dx + xyz\,du$.

Donc en général, *pour différentier le produit de tant de variables que l'on voudra, il n'en faut différentier qu'une à la fois, comme ſi toutes les autres étoient conſtantes; & après avoir fait la même choſe pour chacune, il faut raſſembler toutes ces différentielles.*

Soit, par exemple, la quantité $x^3 y$. Je fais varier y, & j'ai $x^3 dy$; je fais varier x, & j'ai $3yx^2 dx$. Donc $d(x^3 y) = x^3 dy + 3yx^2 dx$. De même $d(x^2 y^3 z^4) = 3x^2 z^4 y^2 dy + 4x^2 y^3 z^3 dz + 2xy^3 z^4 dx$.

789. Soit maintenant la fraction $\frac{x}{y}$; je l'écris ainſi $\ldots xy^{-1}$, & en différentiant j'ai $d(\frac{x}{y}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$.

Donc *pour différentier une fraction où il entre des variables, il faut* 1°, *multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur*; 2°, *multiplier le numérateur par la différentielle du dénominateur*; 3°, *retrancher le dernier produit du premier, & diviſer le reſte par le quarré du dénominateur.*

Avec ces règles ſeules, il n'eſt pas de quantité algébrique que l'on ne puiſſe différentier. Voici quelques exemples de celles qui ſont les plus uſitées.

I. Soit $x = \frac{1}{y}$; on aura $dx = d(\frac{1}{y}) = -\frac{dy}{yy}$.

II. Soit $x = \sqrt{(qy + yy)} = (qy + yy)^{\frac{1}{2}}$, on aura . . . .

$dx = \frac{1}{2}(qy + yy)^{\frac{1}{2}-1} d(qy + yy) = \frac{(\frac{1}{2}q + y)dy}{\sqrt{(qy + yy)}}$.

790. En général, si $x = \sqrt[m]{(a z + z^2)} = (a z + z^2)^{\frac{1}{m}}$, on trouvera que $dx = \frac{1}{m}(a z + z^2)^{\frac{1}{m}-1}(a dz + 2 z dz) = \frac{dz(a+2z)}{m\sqrt[m]{(az+z^2)^{m-1}}}$.

D'où il suit que *pour différentier un radical du degré* m, *il faut diviser la différentielle de la quantité qui est sous le signe, par l'exposant* m *& par la racine* m *de cette* quantité élevée à la puissance $m-1$.

III. Soit $x = (a + by + cyy)^m$, on aura . . . . . $dx = m(a+by+cy^2)^{m-1}(b+2cy)dy$.

IV. Si $y = (ax + bxx + cx^3)^{\frac{m}{n}}$, on trouvera . . . . . $dy = \frac{m}{n}(ax+bxx+cx^3)^{\frac{m}{n}-1}(a+2bx+3cx^2)dx$.

V. Soit $z = \frac{x}{-x+\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{x}{a}(x+\sqrt{(xx+aa)})$, on aura $dz = \frac{2xdx}{aa} + \frac{dx}{a}\sqrt{(aa+xx)} + \frac{x^2dx}{aa\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{2xdx}{aa} + \frac{aadx+2xxdx}{aa\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

Nous devons multiplier numérateur et dénominateur par $x + \sqrt{(a^2+x^2)}$

Des Différentielles secondes, troisiemes, &c.

791. La différentielle seconde d'une quantité est la différentielle de la premiere différence. La différentielle troisieme est la différentielle de la seconde, & ainsi de suite : ddx ou d^2x signifie la différentielle seconde de x, d^3x ou $dddx$ marque la troisieme, &c. Le quarré de la différentielle dx s'écrit ainsi, dx^2, & sa puissance m s'écrit dx^m, &c. Il ne faut pas confondre $d(x^m)$ avec $d^m x$.

D'après ce que nous venons de dire sur les différentielles premieres, il est facile d'avoir les secondes, &c. Soit x^2 dont on demande la différentielle seconde : on aura pour la premiere $2xdx$; la seconde sera donc $2dxdx + 2xddx = 2dx^2 + 2xddx$. De même, puisque $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, on a $ddd(x^m) = mx^{m-1}ddx + m.m-1.x^{m-2}dx^2$. On a aussi $d(xy) = xdy + ydx$; donc $ddd(xy) = xddy + ydddx + 2dydx$.

De ce que $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dx}{y} - \frac{xdx}{yy}$, on tire $ddd\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dddx}{y} - \frac{dxdy}{yy} - \frac{xddy}{yy} - \frac{dxdy}{yy} + \frac{2xdy^2}{y^3}$

$= \frac{2xdy^2}{y^3} + \frac{ddx}{y} - \frac{xddy}{yy} - \frac{2dxdy}{yy} = \ldots\ldots$

$\frac{2yd^2y^2 + y^2ddx - xyddy - 2ydxdy}{y^3}$, & ainſi des autres.

Par les mêmes principes on peut trouver les différentielles troiſiemes, quatriemes, & en général les différentielles d'un degré quelconque, de toutes ſortes de quantités affectées de dx & de dy.

Par exemple, la différentielle de ydx eſt $yddx + dydx$ . . . . celle de $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt $\frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ . . . . . celle de $\frac{ydx}{dy}$ eſt $dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$; celle de la quantité infiniment grande $\frac{a}{dx}$ eſt $-\frac{addx}{dx^2}$, &c, &c.

792. Pour abréger le calcul des ſecondes différentielles de pluſieurs variables, on ſuppoſe ordinairement une des premieres différentielles conſtante; c'eſt-à-dire, que l'on rapporte les autres différentielles à celle-là, comme à un terme fixe de comparaiſon; on en verra bientôt des exemples. Cette ſuppoſition ſimplifie le travail en ce qu'elle fait diſparoître tous les termes affectés de la différentielle de la quantité que l'on a priſe pour conſtante.

Si on cherchoit, par exemple, la différentielle de $\frac{ydx}{dy}$, en ſuppoſant dx conſtante, on trouveroit $dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$; & ſi on faiſoit dy conſtante, on auroit $dx + \frac{yddx}{dy}$.

793. Rem. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que les variables qu'on avoit à différentier, augmentoient toutes en même-tems. Si les unes augmentant, les autres diminuoient, il n'y auroit pas de difficulté pour cela; car dx & dy peuvent être poſitives ou négatives, comme toutes les autres quantités algébriques.

Des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles.

794. Soit propoſé de différentier le logarithme naturel de la variable x. . . . . Je déſigne ce logarithme par lx, & faiſant $lx = z$, j'ai $z + dz = l(x + dx)$; ce qui donne dz, ou $d(lx) = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \&c. = \frac{dx}{x}$.

Donc *la différentielle du logarithme d'une quantité quelconque eſt*

égale à la différentielle de cette quantité divisée par elle-même. Par conséquent pour un système dont le module $= m$, on a $d(lx) = \frac{m\,dx}{x}$. Mais nous ne parlerons dans la suite que des logarithmes naturels dont le module $= 1$.

Cette regle posée, il est facile d'entendre les exemples suivants, $dlx^n = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{n\,dx}{x}$ . . . $dlxy = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{y\,dx + x\,dy}{xy}$; $dl\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$ . . . . $dl(aa-xx) = \frac{-2x\,dx}{aa-xx}$ $= \frac{-dx}{a-x} + \frac{dx}{a+x}$ . . . . $dl\sqrt[m]{(a+bx^n)^p} = \frac{p}{m}.dl(a+bx^n)$ $= \frac{\frac{bpn}{m}x^{n-1}dx}{a+bx^n}$ . . . . $dl\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+xx}$ $= \frac{dx}{x(1+xx)}$.

795. Si on a des puissances de logarithmes, ou même des logarithmes de logarithmes, leur différentiation sera aisée. Soit, par exemple, $y = (lx)^m$, on aura $dy = m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$. Si on a $y = x^m(lx)^n$, il viendra $dy = mx^{m-1}\,dx(lx)^n + nx^{m-1}\,dx(lx)^{n-1} = x^{m-1}\,dx(lx)^{n-1}(n+mlx)$ &c. Soit ensuite $y = llx$, on fera $lx = z$, & on aura $dy = \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\,lx}$.

796. L'équation $d(lx) = \frac{dx}{x}$, donne $dx = x\,d(lx)$. Donc *la différentielle d'une quantité quelconque est égale au produit de cette quantité par la différentielle de son logarithme.* Cette regle peut servir à trouver facilement les différentielles des quantités même algébriques. Par exemple $d(x^m) = x^m\,dlx^m = \frac{m\,x^m\,dx}{x}$ $= mx^{m-1}\,dx$; $d(xy) = xy(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}) = y\,dx + x\,dy$; $d(\frac{x}{y}) = \frac{x}{y}(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ &c. On l'applique sur-tout avec succès à la différentiation des quantités *exponentielles.* On nomme ainsi celles qui ont des exposants variables. Telles sont a^x, x^y, &c. qui sont du premier ordre; x^{x^x} est du second, &c.

La différentielle de a^x, ou $d(a^x)$ ſera $a^x dl a^x = a^x d(xla) = a^x dx la$. Donc ſi e eſt le nombre 2,7182818, dont le logarithme $= 1$, on aura $d(e^x) = e^x dx$. De même $d(x^y) = x^y d(ylx) = x^y (dy lx + \frac{y dx}{x})$, &c.

797. On auroit pu trouver ces différentielles de cette autre maniere. Nous avons vu (306) que $n = 1 + ln + \frac{(ln)^2}{2} + \frac{(ln)^3}{2.3} +$ &c. Suppoſons donc que $n = a^x$, & ſubſtituons cette valeur de n, nous trouverons . . . . $a^x = 1 + la^x + \frac{(la^x)^2}{2} + \frac{(la^x)^3}{2:3} +$ &c. Or $la^x = xla$, & $(la^x)^2 = (xla)^2 = x^2 l^2 a$; donc $a^x = 1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} +$ &c, & par conſéquent $d(a^x) = dx la + x dx l^2 a + \frac{x^2 dx l^3 a}{2} +$ &c $= dx la (1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} +$ &c$) = a^x dx la$.

A l'égard des exponentielles telles que x^{y^z}, leur différentielle eſt aiſée à trouver : car on a $d(x^{y^z}) = x^{y^z} d(y^z lx) = x^{y^z} [y^z \frac{dx}{x} + y^z lx (dz ly + \frac{z dy}{y})] = x^{y^z} y^z (\frac{dx}{x} + \frac{z dy}{y} lx + dz lx ly)$; ſi $x = y = e$, on a $e^{e^z} e^z dz$ pour la différentielle de e^{e^z}. On trouveroit de même les différentielles ſecondes, troiſiemes, &c. des quantités logarithmiques & exponentielles, mais nous ne nous y arrêterons pas. Voyons maintenant comment on différentie les ſinus, coſinus, &c.

Des Différentielles des quantités affectées de Sinus, de Coſinus, &c.

798. Soit $ſin\ x = y$, on aura $y + dy = ſin(x + dx) = ſin\ x\ coſ dx + ſin\ dx\ coſ x$. Or dx étant un arc infiniment petit, on aura 1°, $coſ dx = 1$; 2°, $ſin\ dx = dx$. Donc $y + dy = ſin\ x + dx\ coſ x$, ou $dy = d\ ſin\ x = dx\ coſ x$. *La différentielle du ſinus d'un arc quelconque eſt donc égale à la différentielle de cet arc multipliée par ſon coſinus.*

799. Puiſque $d\ ſin\ x = dx\ coſ x$, ſi on fait $x = 90° - y$,

FIG. on aura $dx = -dy$, & $d\,cos.y = -dy\,sin.y$, formule que l'on auroit pu trouver de ces deux autres manieres. 1°, $sin^2 x + cos^2 x = 1$. Donc $sin.x\,d\,sin.x + cos.x\,d\,cos.x = 0$, & $d\,cos.x = -\frac{sin.x}{cos.x}\,d\,sin.x = -dx\,sin.x$ . . . . 2°, $d\,cos.x = cos.(x+dx) - cos.x = cos.x\,cos.dx - sin.dx\,sin.x - cos.x = -dx\,sin.x$. Concluons donc que *la différentielle du cosinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle négative de cet arc multipliée par son sinus.*

800. Soit $tang.x = z = \frac{sin.x}{cos.x}$, on aura $dz =$ . . . . . $\frac{cos.x\,d\,sin.x - d\,cos.x \times sin.x}{cos^2 x} = \frac{dx\,cos^2 x + dx\,sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{dx}{cos^2 x} = d\,tang.x$. *La différentielle de la tangente d'un arc est donc égale à la différentielle de cet arc divisée par le quarré de son cosinus.*

Si au lieu de supposer le rayon $= 1$, on le supposoit $= a$, on auroit $d\,tang.x = \frac{a\,a\,dx}{cos^2 x}$.

801. Soit $x = 90° - y$, on aura $d\,cot.y = \frac{-dy}{sin^2 y}$; de même $d\,sec.y = d\,\frac{1}{cos.y} = \frac{-d\,cos.y}{cos^2 y} = \frac{dy\,sin.y}{cos^2 y} = \frac{dy\,tang.y}{cos.y}$, &

99. $d\,(cosec.y) = d.\,\frac{1}{sin.y} = \frac{-d\,sin.y}{sin^2 y} = \frac{-dy\,cos.y}{sin^2 y} = \frac{-dy\,cot.y}{sin.y}$.

On trouveroit les mêmes formules d'une autre maniere, en supposant que l'arc AB désigné par z, a pour cosinus $x = CD$, pour sinus $y = BD$, & 1 pour rayon.

Car on auroit d'abord $y = \sqrt{(1-x^2)}$, ce qui donneroit $dy = d\,sin.z = x.\,\frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, or $x = cos.z$, & $\frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dz$, comme on le prouveroit aisément par deux triangles semblables; donc $d\,sin.z = dz\,cos.z$ . . . On auroit ensuite $cos.AB = x = \sqrt{(1-y^2)}$, d'où on tireroit dx ou $d\,cos.z = -y\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = -sin.z\,dz$.

D'où on pourroit déja conclure que $d\,\frac{sin.z}{cos.z}$, ou $d\,tang.z = \frac{dz}{cos^2 z}$. Mais cette formule peut se trouver d'une autre maniere.

Soit AT $tang.z = t$, on aura $t : 1 :: y : \sqrt{(1-y^2)}$; & par conséquent $t = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}$; donc $dt = \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} \times \frac{1}{(1-y^2)} = \frac{dz}{cos^2 z}$.

D'où il ſuit que $d\left(\frac{1}{t}\right)$, ou $-\frac{dt}{t^2}$ ou $d.\cot z = -\frac{dy}{y^2\sqrt{(1-y^2)}}$ FIG.
$= -\frac{1}{y^2} \times \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{-dz}{\sin^2 z}$, comme ci-deſſus.

Ces regles ſuffiſent pour trouver les différences premieres, ſecondes, &c. de toute quantité dans laquelle entrent des ſinus, des coſinus, &c. Voici quelques Exemples. $d.(\sin x)^m = m.(\sin x)^{m-1}$ $dx \cos x = m \sin x^m dx \cot x$ . . . . $dd.(\sin x) = d.dx \cos x = dx^2 \sin x$ . . . $dd.(\cos x) = d.(-dx \sin x) = -dd.x \sin x - dx^2 \cos x$ . . . . $d.(\sin mx) = m.dx \cos mx$ . . . . $d.\cos mx = -m.dx \sin mx$ . . . $d.(\sin x \cos x) = dx \cos^2 x - dx \sin^2 x = dx \cos 2x$.

Puiſque $\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}} = \cos \frac{1}{2} x$, on a donc $d.\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$ *voyez le N°519.
$= d \cos \frac{1}{2} x = -\frac{1}{2} dx \sin \frac{1}{2} x$.

On trouvera de même, que $d.(\cos l x) = -dl x \sin l x = -\frac{dx}{x} \sin l x$; & que $d.(x \sin x) = dx \sin x + x\,dx \cos x$.

802. Si x eſt un arc quelconque, ſa différentielle $dx = \frac{d \sin x}{\cos x}$
$= \frac{-d \cos x}{\sin x} = \cos^2 x\, d.\tang x = \frac{d.\tang x}{\sec^2 x} = \frac{d.\tang x}{1+\tang^2 x} =$
$-d \cot x \sin^2 x = \frac{-d \cot x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{-d.\cot x}{1+\cot^2 x}$, &c, &c.

Applications du Calcul Différentiel à la Théorie des Courbes.

803. De tous les problêmes que l'on peut propoſer ſur une courbe, le plus ſimple eſt celui qui a pour objet de mener une tangente à l'un quelconque de ſes points. Commençons donc par rappeller la ſolution qui en a été donnée (777).

Soit la courbe AM, ſon axe AP, ſes coordonnées AP & PM; 185.
il eſt clair que pour mener la tangente au point M, il ſuffit de déterminer la ſoutangente PT.

Imaginons donc l'arc infiniment petit Mm, les deux ordonnées infiniment proches MP, mp, & ſuppoſons Mr parallele à Pp. Soit à l'ordinaire AP $= x$, PM $= y$, & nous aurons Pp ou M$r = dx$, $mr = dy$, & PT $= \frac{y\,dx}{dy}$. Il n'y aura donc plus

qu'à différentier l'équation de la courbe, afin d'en tirer la valeur de $\frac{dx}{dy}$, que l'on ſubſtituera dans la formule des ſoutangentes, & PT ſera déterminée.

804. L'expreſſion de la tangente MT eſt $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2})}$, ou $\frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; celle de la ſounormale PN eſt $\frac{y^2}{PT}$, ou $\frac{y\,dy}{dx}$; la normale $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; & ſi on mene par le point A la ligne AQ parallele à MP, on aura $\frac{y dx}{dy} : \frac{y\,dx}{dy} - x$ ou $AT :: y : AQ = y - \frac{x\,dy}{dx}$. Ces valeurs de AQ & de AT ſerviront à trouver les aſymptotes de la courbe AM, lorſqu'elle en aura: car ſi après avoir ſubſtitué dans ces deux valeurs celle de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation même de la courbe, on ſuppoſe x infinie, il y aura autant d'aſymptotes que de valeurs différentes des lignes AQ & AT. Quant à la poſition des aſymptotes, elle ſera toujours déterminée par les points T & Q. Appliquons maintenant ces formules à quelques exemples.

On ſait que l'équation au cercle eſt $y^2 = a^2 - x^2$; donc $y\,dy = -x\,dx$, & $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x} = PT$. Le ſigne — indique que la ſoutangente doit être priſe dans le même ſens que l'abſciſſe, parce que dans la conſtruction de la formule on l'a priſe en ſens contraire. Si on eût compté les abſciſſes du ſommet, l'équation $y^2 = 2ax - xx$ eût donné un réſultat poſitif comme la formule.

Par l'équation $y^2 = a^2 - x^2$, on trouve $\frac{y\,dy}{dx}$ ou la ſounormale $= -x$, & la normale $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})} = \sqrt{(x^2 + y^2)} = a =$ le rayon, comme cela doit être.

Dans la parabole, $y^2 = px$; donc $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{1}{2}p$, & $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = 2x$.

Dans l'ellipſe, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; donc $y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(-x\,dx)$, FIG. & $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2}$; enſuite $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

Dans l'hyperbole, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; donc $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \times (a + x)$, & $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a^2 y^2}{b^2(a+x)} = \frac{2ax + xx}{a+x}$.

On a auſſi $AT = \frac{ax}{a+x}$, expreſſion qui eſt réduite à la ſeule 185. quantité a, quand on ſuppoſe x infinie. Dans la même ſuppoſition on trouve que $AQ = y - \frac{x\,dy}{dx} = y - \frac{b^2 x}{a^2 y}(a+x) = \frac{a^2 y^2 - b^2 x(a+x)}{a^2 y} = \frac{b^2 x}{ay} = b\sqrt{\left(\frac{x}{2a+x}\right)}$ ſe réduit à b. Ces deux valeurs de AT & de AQ donnent la poſition des aſymptotes, telle que nous l'avons déja trouvée (695).

805. Soit $y^m = x^n a^{m-n}$, on aura $nlx + (m-n)la = mly$, $\frac{n\,dx}{x} = \frac{m\,dy}{y}$, & la ſoutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{m}{n}x$. Toutes les courbes repréſentées par l'équation générale $y^m = x^n a^{m-n}$, ſont nommées paraboles, lorſque m & n ſont poſitives. Si $m = 2$, & $n = 1$, on a $yy = ax$, équation à la parabole ordinaire ou *Apollonienne*, comme l'appellent quelques Auteurs, du nom d'Apollonius ancien Géometre, dont on a un Traité ſur les Sections coniques. Si $m = 3$, & $n = 1$ l'équation eſt $y^3 = a^2 x$, & la courbe qui en réſulte, eſt *la premiere parabole cubique* à cauſe de $n = 1$. Si $m = 3$, & $n = 2$, c'eſt alors *la ſeconde parabole cubique*, dont l'équation eſt $y^3 = ax^2$. Voyez les Fig. 129 & 130.

806. Si n eſt négative, les paraboles ſe changent en hyperboles dont l'équation eſt $x^n y^m = a^{m+n}$; la ſoutangente de ces courbes eſt donc généralement $-\frac{m}{n}x$, c'eſt-à-dire qu'elle doit être priſe dans le même ſens que les x. Et ſi $m = n = 1$, on a l'hyperbole ordinaire dont la ſoutangente $= -x$ (699).

Dans la logarithmique, on a $x = A\,log\,y$, & $dx = \frac{A\,dy}{y}$. Donc $\frac{y\,dx}{dy} = A$; *Sa ſoutangente eſt donc toujours égale au module* (730).

FIG. 159. 807. Soit maintenant une courbe quelconque BIOC avec une autre courbe BMA, telle que ſi on prolonge les ordonnées OP de la premiere juſqu'à la rencontre de la ſeconde, la ligne MO ſoit une fonction quelconque de l'arc BIO; il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT.

Concevons l'ordonnée *mp* infiniment proche de MP, & M*r* parallele à la tangente au point O; ſi on fait BIO $= z$, MO $= u$, on aura $mr = du$, $rM = Oo = dz$, & $du : dz :: u : OT = \frac{u\,dz}{du}$.

Or u étant une fonction de z, on aura $\frac{dz}{du}$ en prenant les différentielles; ainſi TO, ou le point T ſera déterminé, d'où il eſt facile de mener la tangente MT.

Suppoſons, par exemple, $u = \frac{b}{a}z$, on aura $du = \frac{b\,dz}{a}$, & $OT = z = BIO$. Si BIOC eſt un arc de cercle, alors AMB eſt une cycloïde, & cette conſtruction eſt la même que celle que nous avons déja donnée.

160. Dans la quadratrice, ſi on compte les abſciſſes du centre, on a (737) $y = \frac{x}{a}\,cot\,\frac{cx}{a}$; donc $dy = \frac{dx}{a}\,cot\,\frac{cx}{a} - \ldots$. $\frac{cx\,dx}{ſin^2\,\frac{cx}{a}}$, & $\frac{x\,dy}{dx} = \frac{x}{a}\,cot\,\frac{cx}{a} - \frac{cxx}{ſin^2\,\frac{cx}{a}}$. Mais $-\frac{x\,dy}{dx} =$ OT, comme on peut le prouver par deux triangles ſemblables, ſavoir MOT, & le triangle différentiel que l'on imaginera en menant une ordonnée infiniment proche de MP. (Il faut $-dy$, parce que y diminue, lorſque x augmente).

Donc $OT = \frac{cxx}{ſin^2\,\frac{cx}{x}} - \frac{x}{a}\,cot\,\frac{cx}{a}$; & en ajoutant de part & d'autre $CO = PM = y = \frac{x}{a}\,cot\,\frac{cx}{a}$, on aura $CT = \frac{cxx}{ſin^2\,\frac{cx}{a}} = \frac{c}{aa}\,CM^2$.

Lorſque CM = CT, ou au point D, on a comme nous l'avons déja trouvé, la baſe $CD = \frac{aa}{c}$, & par conſéquent $CT = \frac{CM^2}{CD}$. Il faut donc prendre CT troiſieme proportionelle à la baſe CD & au rayon CM, ce qui donnera le point T par laquelle, & par le

point M si on mene la ligne MT, elle sera la tangente demandée. FIG.

808. Pour mener les tangentes aux spirales, il faut résoudre le problême suivant. Soit décrit un cercle d'un rayon quelconque CA, & soit une courbe CKM telle qu'en menant le rayon CMN, la ligne CM soit une fonction quelconque de l'arc ABN, il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT. 161.

On imaginera les deux rayons infiniment proches CMN, C*mn*, & le petit arc M*r* décrit du centre C & du rayon CM, on menera ensuite CT perpendiculaire à CM.

Cela posé, soit CM$=y$, ABN$=x$, CA$=a$, on aura $a : y :: N n (dx) ; Mr = \frac{y\,dx}{a}$, & $rm\,(dy) : \frac{y\,dx}{a} :: y : CT = \frac{y^2\,dx}{a\,dy}$.

Soit par exemple $y = \frac{ax}{\pi}$, la courbe CKM sera la spirale d'Archimede, & on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{a}$, $CT = \frac{y^2\pi}{aa} = \frac{axy}{aa} = \frac{xy}{a} =$ MQO'.

Soit la spirale hyperbolique dont l'équation est $xy = ab$, on aura $x\,dy + y\,dx = 0$, $y\,dx = -x\,dy$, $CT = -\frac{xy\,dy}{a\,dy} = -\frac{xy}{a} = -b$; ce que nous avons déja trouvé (746).

809. Dans la spirale logarithmique, où l'angle CMT est constant, on imaginera les rayons infiniment proches CM, C*m*, & décrivant du centre C & d'un rayon quelconque CN un cercle, on fera CM$= z$, CN$= a$, & marquant sur la circonférence du cercle un point fixe A, on supposera l'abscisse AN$= x$ ce qui donnera la proportion . . . . $a : dx :: z : Mr = \frac{z\,dx}{a}$. 164.

Soit $t = tang\,Mmr$, on aura $t = \frac{z\,dx}{a\,dz}$, ou $\frac{dx}{at} = \frac{dz}{z} = d\,(lz)$; donc $lz = \frac{x}{at}$, ou $\frac{x}{at}$ + une constante C, parce que la différentielle de l'équation $lz = \frac{x}{at}$ est la même que celle de $lz = \frac{x}{at} + C$.

Or cette équation $lz = \frac{x}{at} + C$, fait voir 1°, que la spirale fait une infinité de révolutions autour de son centre, tant pour s'en approcher que pour s'en éloigner; car au lieu de x on peut substituer successivement $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 3\pi$, &c. $-\pi + x$, $-2\pi + x$. &c. π étant la circonférence ANB.

FIG.

2°, Que si on fait $C = lC'$, on aura $l\frac{\zeta}{C'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at}le$, ou $\frac{\zeta}{C'} = e^{\frac{x}{at}}$ & $\zeta = C'e^{\frac{x}{at}}$; donc au point A où $x = o$, on a $CD = C'$.

3°, Que les abscisses AN croissant en progression arithmétique .... x, $2x$, $3x$, &c, les ordonnées forment la progression géométrique .... $Ce^{\frac{x}{at}}$, $C'e^{\frac{2x}{at}}$, $C'e^{\frac{3x}{at}}$, &c. 4°, Que si $t = \infty$, on a $\zeta = C'$, propriété du cercle qui coupe à angles droits tous ses rayons, comme on le sait déja.

Ces exemples suffisent pour mener les tangentes de toute sorte de courbes soit méchaniques soit géométriques. Au reste, on peut voir cette matiere traitée plus en détail dans l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital.

Des Développées.

186. 210. Imaginons un fil ABC appliqué sur une courbe quelconque BC dont l'origine est en B, & dont AB est tangente en ce point; si on développe ce fil en le tenant toujours également tendu, son extrémité A décrira une courbe AM, qui aura les propriétés suivantes.

1°, La tangente MC de la courbe BC sera toujours perpendiculaire à la courbe AM; 2°, la longueur de cette ligne sera égale à la ligne AB + à l'arc BC; 3°, l'arc infiniment petit M*m* pourra être regardé comme un arc de cercle décrit du centre C & du rayon CM; 4°, le point C sera le point de réunion des deux normales infiniment proches MN, *mn*.

211. La courbe BC se nomme *la Développée* de la courbe AM; la ligne MC est le rayon de la développée; on l'appelle aussi rayon osculateur, rayon de courbure.

Cela posé, on demande comment on pourroit déterminer pour chaque point M le rayon MC de la développée BC que l'on suppose connue.

Soient MP, *mp* deux perpendiculaires à l'axe AQ infiniment proches, & CO, *r*M paralleles au même axe; si on appelle MO, u... AP, x .... PM, y .... M*m* ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ds, on aura .... $dx : ds :: u : MC = \frac{u\,ds}{dx}$. Mais pendant que AP, PM, & MO varient, MC devenant *m*C ne varie point; ainsi l'équation $MC = \frac{u\,ds}{dx}$ étant différentiée, on aura $(u\,ddx + ds\,du)\,dx = u\,ds\,ddx$;

FIG.

& puiſque $du = mr = dy$, on trouvera que $u = \frac{ds\,dx\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds}$; & que par conſéquent $MC = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = \ldots \frac{ds^3\,dy}{ds^2\,ddx - dx\,(dx\,ddx + dy\,ddy)} = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy} = \frac{ds^3}{-dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Suppoſons maintenant, pour abréger, qu'une de ces différentielles ſoit conſtante, l'élément ds de la courbe, par exemple, & nous aurons $MC = \frac{ds\,dy}{ddx} = \frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$.

Si on eût ſuppoſé dy conſtante, on eût eu $ds\,dds = dx\,ddx$; d'où $dds = \frac{dx\,ddx}{ds}$, ce qui donne $MC = \frac{dy\,ds^3}{(ds^2 - dx^2)\,ddx} = \frac{ds^3}{dy\,ddx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddx}$.

Mais ſi on ſuppoſe, comme on le fait ordinairement, que dx ſoit conſtante, alors $MC = \frac{ds^2\,dy}{-dx\,dds} = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$.

312. Comme les courbures des cercles ſont en raiſon inverſe de leurs rayons, on en déduit qu'en deux points différents d'une courbe quelconque, les courbures ſont en raiſon inverſe des rayons de la développée. Ainſi pour ſavoir en quels points la courbe a une plus grande courbure, il faut chercher le *minimum* du rayon de la développée.

Si la tangente en A eſt perpendiculaire à l'axe, alors pour déterminer la ligne droite BA, ou la diſtance du ſommet A à l'origine B de la développée, il faudra faire $x = o$ dans l'expreſſion du rayon MC, & on aura la valeur de BA. Enfin pour trouver l'équation de la développée, menons CQ perpendiculaire à l'axe, & nommons AB, $a \ldots$ BQ, $t \ldots$ CQ, ζ; nous aurons d'abord, en ſuppoſant dx conſtante, $MO = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, & $\zeta = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$. Enſuite, $dx : dy :: \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} : CO = PQ = \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{-dx\,ddy}$. Donc $AP + PQ - AB = t = x - a + \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{-dx\,ddy}$; valeurs qui 186.

suffisent, avec l'équation de la courbe, pour déterminer l'équation de la développée.

813. Jusqu'ici nous avons supposé les ordonnées parallèles entre elles. Si elles partoient d'un même point B, voici comment on détermineroit le rayon M C.

187. J'imagine deux ordonnées infiniment proches B M, B m, & C O, C o perpendiculaires à ces ordonnées; je décris ensuite du centre B l'arc M r. Cela posé, soit B M $= y$, M $r = dx$, $mr = dy$, M $m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, M O $= u$; à cause des triangles semblables M rm, C M O, on a $dx : u :: dy : CO = \frac{u\,dy}{dx} :: ds : MC = \frac{u\,ds}{dx}$. Différentiant cette dernière équation (en supposant dx constante) on a $du = -\frac{u\,dds}{ds}$, & la différentielle de C O qui est C o − C O $=$ $+OQ = \frac{du\,dy + u\,ddy}{dx} = \frac{u\,ddy - \frac{u\,dy\,dds}{ds}}{dx} = \frac{u\,ddy}{dx} - \frac{u\,dy^2\,ddy}{ds^2\,dx}$ $= \frac{+u\,dx\,ddy}{ds^2}$. Donc $OQ = -\frac{u\,dx\,ddy}{ds^2}$, & $y : dx :: y - u : -u\,dx\,ddy$ / ds^2. D'où on tire $u = \frac{y\,ds^2}{ds^2 - y\,ddy}$, & $MC = \frac{y\,ds^3}{ds^2\,dx - y\,dx\,ddy}$ $= \frac{y\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}$, qui se réduit à $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ lorsque $y = \infty$, ou lorsque les ordonnées sont parallèles, comme nous l'avons déjà trouvé. Passons maintenant à quelques exemples.

L'équation à l'ellipse & à l'hyperbole, lorsqu'on compte les abscisses du sommet, est généralement exprimée par $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$; où il est clair que si $a = \infty$, on a $yy = px$; équation à la parabole, qui n'est par conséquent qu'une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe est infini. Ainsi l'équation $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ est générale pour toutes les sections coniques. Elle peut donc servir à trouver leur rayon de courbure.

814. Observons d'abord que $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, étant égale à la normale (804), si on le nomme n, le rayon de la développée, en supposant dx constante, sera exprimé par $\frac{n^3\,dx^2}{-y^3\,ddy}$; & puisque dans

cet exemple, $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, on a $2yy\,dy = p\,dx \pm \frac{p\,x\,dx}{a}$ ....

$2y\,ddy + 2dy^2 = \pm\frac{p\,dx^2}{a}$ .... $y^3\,ddy = \pm\frac{p}{2a}y^2\,dx^2 - y^3 dy^2 = dx^2\left[\pm\frac{p}{2a}\left(px \pm \frac{pxx}{2a}\right) - \left(\frac{p}{2} \pm \frac{px}{2a}\right)^2\right] = -\frac{p^2}{4}dx^2$.

Donc le rayon de la développée pour toutes les sections coniques $= \frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$, c'est-à-dire, qu'*il est égal au cube de la normale divisée par le quart du quarré du parametre*. D'où il suit que dans le cercle où $n = \frac{1}{2}p$, le rayon de la développée est toujours égal à la normale, ce qui est évident. Quant à la développée du cercle, on voit bien qu'elle n'est autre chose que le point même qui sert de centre au cercle.

815. On a $n = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{\left[px \pm \frac{pxx}{2a} + \frac{pp}{4}\left(1 \pm \frac{2x}{a} + \frac{xx}{aa}\right)\right]}$; & au sommet, lorsque $x = 0$, $n = \frac{1}{2}p$, & le rayon de la développée, ou la droite $AB = \frac{1}{2}p$. Dans l'ellipse, la développée a quatre branches BD, Db, bd, Bd, égales & faisant entre elles quatre points de rebroussement. La distance $CB = Cb = a - \frac{1}{2}p$, & $ED = ed =$ la moitié du parametre du petit axe. 188.

Dans la parabole, le rayon $MC = \frac{MN^3}{\frac{1}{4}pp} = NT \times \frac{MN}{PN}$, & par conséquent CO ou $PQ = NT = 2x + \frac{1}{2}p$; donc $AQ = 3x + \frac{1}{2}p = 3x + AB$, & par conséquent $BQ = 3x$, ce qui donne une construction bien simple pour déterminer le point C, ou le centre du cercle osculateur; prenez $BQ = 3AP$, & menez CQ perpendiculaire à AQ, le point de concours C des deux lignes MC, CQ sera le centre du cercle cherché. 189.

Pour trouver l'équation de la développée, soit $BQ = z$, $CQ = u$, on aura $x = \frac{1}{3}z$, & $\frac{1}{3}p : y :: QN : CQ :: 2x : u = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$. Donc $\frac{pu^2}{16} = x^3 = \frac{1}{27}z^3$, & $z^3 = \frac{27}{16}pu^2$; ce qui fait voir que *la développée de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique, dont le parametre est les $\frac{27}{16}$ de celui de la parabole donnée*.

Par la nature des développées $AB + BC = MC$. Donc $BC = MC - AB$
$= \frac{MN^3}{PN^2} - NT \cdot \frac{MN}{PN}$.

FIG. $MC - \frac{1}{2}p = \frac{MN^2}{\frac{1}{4}pp} - \frac{1}{2}p$: or $MN = \sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)} = \sqrt{(\frac{1}{2}p\zeta + \frac{1}{4}pp)}$. On a donc, en faisant $\frac{27}{16}p = a$, $BC = \frac{8}{27}a[(1 + \frac{2\zeta}{a})^{\frac{3}{2}} - 1]$, expression d'un arc quelconque de la seconde parabole cubique dont l'équation est $\zeta^3 = au^2$.

190. 816. Soit la cycloïde $AMBa$, son cercle générateur $BODO'$, l'ordonnée MOP perpendiculaire à BD. Si on fait $BP = x$, $PM = y$, $BD = 2a$, on aura $y = BO + \sqrt{(2ax - xx)}$; or la différentielle de l'arc BO est $\frac{ad(\sin BO)}{\cos BO} = \frac{a}{a-x}d\sqrt{(2ax-xx)}$ $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Donc $dy = \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = dx\sqrt{(\frac{2a-x}{x})} = \frac{dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, équation différentielle de la cycloïde.

Cela posé, pour trouver le rayon MC de la développée, supposons dx constante, & nous aurons en différentiant, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax-xx)}}$; $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$. Donc le rayon $MC = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a-x)}$.

* 817. Pour déterminer la développée ACE, achevons le rectangle AE, & sur le côté $AB' = DE = BD$, comme diamètre, décrivons un demi-cercle $A'Q'B'$, menons AQ' parallele à CM, & joignons C & Q'; cela posé, l'angle $NAQ' = NDO$. Donc $OD = AQ'$, & l'arc OID ou la droite $AN =$ l'arc ALQ'. Or $OD = CN$. Donc $CN = AQ'$, & par conséquent $CQ' = AN =$ l'arc ALQ'; propriété distinctive de la cycloïde ordinaire; d'où il suit que la développée ACE est une demi-cycloïde égale à celle que l'on avoit déja, AMB. Elle n'en differe que par sa position. On auroit trouvé la même chose, en cherchant directement l'équation de la développée, par ce qui a été dit (812).

L'arc $AC = MC = 2AQ'$; donc *un arc quelconque de cycloïde est double de la corde correspondante du cercle générateur.* Ainsi

La similitude des triangles DOP, BOD donne DP : OD :: OD : BD, ou $2a - x : OD :: OD : 2a$, par conséquent $OD^2 = 2a(2a-x)$, $OD = \sqrt{(2a-x)2a}$, $2OD = 2\sqrt{(2a(2a-x))} = MC$.

au point A l'abscisse $BP = x$ devient $BD = 2a$, donc, en mettant $2a$ pour x dans l'expression de MC on aura $MC = 2\sqrt{2a(2a-2a)} = 2\sqrt{0} = 0$.

au point B où $x = 0$ et, par conséquent, $MC = 2\sqrt{2a(2a-0)} = 2\sqrt{4a^2} = 2.2a = 2.BP$.

Ainſi MB = 2OB, AMB = 2BD, & la cycloïde entiere ABa FIG.
eſt quadruple du diametre BD.

818. Soit la ſpirale logarithmique ADM dont le centre eſt A, 191.
on aura *cot* MmA = $\frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx}$; & en différentiant, ($dx$ étant ſuppoſée conſtante), on aura $ddy = 0$, & le rayon de la développée MC = $\frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx(dx^2+dy^2)-ydxddy}$ ſe réduit à . . . $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc ſi on mene AC perpendiculaire à MA, & MC perpendiculaire à la tangente en M, leur point de concours C ſera ſur la développée : car les triangles ſemblables Mrm & MAC donnent Mm : Mr :: MC : MA, c'eſt-à-dire ds ou $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$: dx :: MC : y; donc MC = $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

819. L'angle ACM = 90° — AMC = AMT ; d'où il ſuit que la développée ABC eſt la même ſpirale logarithmique ADM ; elle eſt ſeulement diſpoſée d'une maniere différente. Il ſuit de-là que la tangente MC eſt égale en longueur à la ſpirale ABC, quoique celle-ci faſſe une infinité de révolutions autour du point A. Donc auſſi, ſi on mene AT perpendiculaire à AM, on aura MT = l'arc ADM. *La ſpirale logarithmique & la cycloïde ſont donc elles-mêmes leurs développées.*

Des Points d'inflexion, & de la méthode de Maximis & Minimis.

820. Si une courbe AMO de convexe qu'elle étoit, devient con- 192.
cave, le point M où ce changement arrive, eſt ce que l'on appelle un point d'inflexion.

Pour déterminer ces ſortes de points, on peut regarder la tangente en M comme étant tout à la fois tangente des deux parties MA, MO ; & dans cette ſuppoſition on peut imaginer de part & d'autre du point M deux éléments Mm, Mm′ en ligne droite, d'où il ſuit que le rayon de la développée au point M doit alors être infini. Mais comme ces éléments peuvent être ſuppoſés décroître de plus en plus, de maniere à s'évanouir tous deux, le rayon de la développée doit alors ſe réduire à zéro.

821. Donc *au point d'inflexion, le rayon de la développée eſt toujours infini, ou nul.* Donc en ſuppoſant dx conſtante, on aura

toujours $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{-dx\,ddy}$, ou $\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}} = \infty$ ou 0 : & par conſéquent $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$, ou ∞.

On différentiera donc deux fois l'équation de la courbe, en ſuppoſant dx conſtante ; & on aura la valeur finie de $\frac{-ddy}{dx^2}$ que l'on égalera à zéro ou à l'infini. Au moyen de cette équation & de celle de la courbe, on déterminera les valeurs de x & de y qui conviennent au point d'inflexion, ou aux points d'inflexion, s'il y en a pluſieurs.

822. Lorſque les ordonnées partent d'un point fixe, alors on a $\frac{dx^2+dy^2-y\,ddy}{dx^2} = 0$ ou $= \infty$.

Ex. I. Soit la premiere parabole cubique dont l'équation eſt $y^3 = a^2 x$, on aura $y = x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} \ldots dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \times a^{\frac{2}{3}} \ldots ddy = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} dx^2 a^{\frac{2}{3}} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} \sqrt[3]{aa} = 0$ au point d'inflexion ; on a donc $x = 0$. Ainſi le point d'inflexion eſt à l'origine.

Ex. II. Soit la conchoïde de Nicomede, dont l'équation eſt $y = \frac{b+x}{x}\sqrt{(aa-xx)}$; on a en différentiant . . . $dy = \frac{-dx(aab+x^3)}{xx\sqrt{(aa-xx)}}$; différentiant de nouveau, en ſuppoſant dx conſtante, on a . . . $-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{a^2x^3+3a^2bx^2-2a^4b}{(a^2x^3-x^5)\sqrt{(aa-xx)}} = 0$ au point d'inflexion. Donc $x^3+3bx^2-2a^2b = 0$, équation qui étant réſolue (338), donnera pour x la valeur qui convient au point d'inflexion.

Ex. III. Soit une courbe qui ait pour équation $y - a = (x-a)^{\frac{3}{5}}$, il s'agit de trouver les valeurs de x & de y qui répondent au point d'inflexion, au cas qu'il doive y en avoir.

En différentiant deux fois de ſuite, on a $-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$,

qui étant égalée à zéro, ne fait rien connoître; il faut donc l'égaler à l'infini, & on a $x = a = y$; valeurs qui répondent au point d'inflexion. FIG.

823. Si l'ordonnée M P d'une courbe quelconque B M eſt plus grande ou plus petite que celles qui la précédent (pm), & que celles qui la ſuivent ($p'm'$), on lui donne alors le nom de *Maximum* ou de *Minimum*; & la méthode qui apprend à déterminer ces ſortes de quantités, ſe nomme la méthode de *Maximis & Minimis*. 193.

824. Si C M eſt le rayon du cercle oſculateur au point M, il eſt clair que l'ordonnée M P doit être plus grande ou plus petite que toute autre ordonnée correſpondante à quelque point de l'arc K M D décrit du rayon C M; d'où il ſuit que l'ordonnée M P (prolongée dans le cas du *Minimum*) paſſe par le centre du cercle oſculateur: donc la tangente en M eſt parallèle à l'axe A P, & par conſéquent la ſoutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \infty$. Donc $\frac{dy}{dx} = 0$.

Or y peut être conſidérée comme une fonction quelconque de l'abſciſſe A P (x), d'où il ſuit que pour ſavoir dans quels cas une quantité y dépendante de x peut devenir un *Maximum* ou un *Minimum*, il faut bien différentier l'équation qui exprime leur rapport, & égaler à zéro la quantité $\frac{dy}{dx}$. L'équation qui en réſultera, combinée avec la première, donnera les valeurs de y & de x dans leſquelles y eſt un *Maximum* ou un *Minimum*.

825. Mais pour diſtinguer lequel de ces deux cas a lieu, *il faut obſerver que le rayon de la développée au point du* Maximum *eſt poſitif, & qu'il eſt négatif au point du* Minimum. Or l'expreſſion du rayon oſculateur eſt $(1 + \frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}} : -\frac{d\,dy}{dx^2}$; & comme $\frac{dy}{dx} = 0$, on a $CM = \frac{-dx^2}{d\,dy}$. Donc, ſi y eſt un *Maximum*, $\frac{d\,dy}{dx^2}$ doit être négatif, & s'il eſt un *Minimum*, $\frac{d\,dy}{dx^2}$ doit être poſitif.

S'il arrive que $\frac{d\,dy}{dx^2}$ ſoit infini ou nul, alors M ſera un point d'inflexion, ou de rebrouſſement, la tangente en M ſera parallèle à l'axe, mais il pourra ſe faire que M P ne ſoit ni un *Maximum* ni un *Minimum*. Voyez la Fig. 192.

826. Il peut encore arriver que l'ordonnée P M ſoit un *Maximum* ou un *Minimum*, lorſque la tangente en M eſt perpendiculaire à l'axe. Or dans ce cas $\frac{y\,dx}{dy} = 0$, & par conſéquent $\frac{dy}{dx}$

FIG. 195. $= \infty$; formule qui déterminera ces ſortes d'ordonnées. Alors MP peut être tout à la fois un *Maximum* & un *Minimum* à l'égard des deux branches MB, MB'. Mais ce n'eſt qu'un cas particulier renfermé dans celui dont nous venons de parler, & dont voici quelques exemples.

817. I. Soit propoſé de diviſer une droite a en deux parties, telles que leur rectangle ſoit un *Maximum* ou un *Minimum*. En nommant x l'une de ces parties, $a - x$ ſera l'autre, & on aura $ax - xx$ pour l'expreſſion du *Maximum* ou du *Minimum*. Soit donc $y = ax - xx$, & on aura $\frac{dy}{dx} = a - 2x = 0$, d'où $x = \frac{1}{2}a$. Pour ſavoir maintenant ſi cette ſolution donne un *Maximum* ou un *Minimum*, je différentie l'équation $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, & j'ai $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, quantité négative; d'où il ſuit que la valeur $x = \frac{a}{2}$ donne un *Maximum* $y = \frac{1}{4}a^2$.

En général, ſi $y = x^m (a - x)^n$, pour que cette quantité ſoit un *Maximum* ou un *Minimum*, il faut que $\frac{dy}{dx} = m x^{m-1} (a - x)^n - n x^m (a - x)^{n-1} = 0 = \frac{m}{x} - \frac{n}{a - x}$. Alors $x = \frac{am}{m+n}$; & cette valeur donne un *Maximum* pour y, parceque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{xx} - \frac{n}{(a-x)^2}$.

II. Trouver les diametres conjugués de l'ellipſe qui ſont entre-eux le plus petit angle.

Soient m, n ces diametres, p l'angle qu'ils ſont entre-eux, on aura (684) $mn \sin p = ab$, & $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$. Donc $\sin p = \frac{ab}{n(a^2+b^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{d \sin p}{dn} = \frac{-ab(a^2+b^2-2n^2)}{n^2(a^2+b^2-n^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$; donc $n = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}} = m$.

Ainſi les diametres conjugués & égaux de l'ellipſe ſont ceux qui par leur interſection forment le plus petit angle cherché. Le ſinus de cet angle eſt $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

138. Soit $\frac{b}{a} = tang\, u$, on aura $\sin p = \frac{2\, tang\, u}{1 + tang^2 u} = \frac{2\, tang\, u}{sec^2 u}$

$= 2 \sin u . \cos u = \sin 2u$; donc l'angle p eſt egal à celui que forment entre elles les deux lignes menées des deux extrémités du petit axe à une du grand. FIG. 138.

III. De toutes les paraboles que l'on peut couper dans le cône droit DCB, déterminer celle qui a le plus de ſurface. 196.

Soit $BD = a$, $CD = b$, $BP = x$, on aura $a : b :: x : AP = \frac{bx}{a}$ . . . $PM = \sqrt{(ax - xx)}$ . . . la ſurface $mAMPm = \frac{4}{3} . \frac{bx}{a} \sqrt{(ax - xx)} = y$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} . \frac{b}{a} \sqrt{(ax - xx)} + \frac{4}{3} . \frac{bx}{a} (\frac{a}{2} - x) : \sqrt{(ax - xx)} = 0 = ax - xx + x(\frac{a}{2} - x) = \frac{1}{2} ax - 2xx$. D'où $x = \frac{1}{4} a$, ſolution qui donne un *Maximum*, parce que $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{2} a$.

IV. De tous les triangles conſtruits ſur la même baſe AB, & de même périmetre, quel eſt celui qui a le plus de ſurface ? 197.

Soit le demi-périmetre $= q$, la baſe $AB = a$, le côté $AM = x$, MB ſera $2q - a - x$. Donc en appellant y la ſurface, on aura (492) $y = \sqrt{[q . q - a . q - x . (a + x - q)]}$ . . . $2ly = lq + l(q-a) + l(q-x) + l(a+x-q)$ . . . $\frac{2dy}{y} = -\frac{dx}{q-x} + \frac{dx}{a+x-q}$ . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} (\frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x}) = 0$. Donc $a + x - q = q - x$, $2q - a - x = x$; & par conſéquent le triangle cherché eſt iſoſcele.

828. Il ſuit de-là qu'entre tous les triangles *iſopérimetres* ou de même contour, celui qui a le plus de ſurface eſt équilatéral. Car ſi AMB eſt le triangle cherché, il eſt clair qu'il doit avoir plus de ſurface que tout autre triangle iſopérimetre AMB conſtruit ſur la même baſe AB ; donc $AM = MB$. On prouvera de même que $AM = AB$.

829. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que le *Maximum* ou le *Minimum* des fonctions d'une ſeule variable x. Pour trouver dans quels cas une fonction quelconque Y de deux variables x & y devient un *Maximum* ou un *Minimum*, on peut ſe ſervir de la méthode ſuivante. (Le mot fonction eſt pris généralement pour toute expreſſion dépendante de la valeur des deux variables).

Suppoſons que y a déja la valeur propre à rendre la fonction Y

un *Maximum* ou un *Minimum*; il ne s'agira donc plus que de trouver la valeur convenable de x, c'eſt-à-dire qu'il faudra différentier la fonction Y en faiſant varier x ſeule, & égaler le coefficient de dx à zéro. En faiſant un raiſonnement ſemblable, on verra que pour avoir y, il faut différentier la fonction Y en faiſant varier y ſeule, & égaler le coefficient de dy à zéro. D'où il ſuit que ſi dY eſt repréſenté généralement par $P\,dx + Q\,dy$, on doit avoir $P = 0$, $Q = 0$, équations qui donneront les valeurs de x & de y propres à rendre la fonction Y *Maximum* ou *Minimum*.

Or il eſt aiſé de voir que ce même raiſonnement a lieu quel que ſoit le nombre des variables dont Y peut repréſenter une fonction. D'où il ſuit en général, que pour connoître les valeurs des variables qui rendent la fonction Y *Maximum* ou *Minimum*, il faut prendre la différentielle totale de Y, & égaler à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable, ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

Par exemple, ſoit propoſé de diviſer le nombre donné a en trois parties dont le produit ſoit un *Maximum*.

En appellant x & y deux de ces parties, la troiſieme ſera exprimée par $a - x - y$, & on aura $xy\,(a - x - y)$ dont la différentielle $= (a - 2x - y)\,y\,dx + (a - 2y - x)\,x\,dy$. Egalant donc ſéparément à zéro le coefficient de dx & celui de dy, on aura $a - 2x - y = 0 = a - 2y - x$, d'où $y = x = \frac{1}{3}a$. Il faut donc diviſer le nombre donné en trois parties égales.

Propoſons-nous maintenant de trouver entre tous les triangles iſopérimetres celui qui a le plus de ſurface. Nous avons déja réſolu ce problême, mais indirectement.

Soient x, y deux de ſes côtés, $2q$ le périmetre, $2q - x - y$ ſera l'autre côté, & la ſurface $\sqrt{[q \cdot q - x \cdot q - y \cdot (x + y - q)]}$ devant être un *Maximum*, ſi on la nomme Y, on aura $2l\,Y - lq = l[(q - x) + l(q - y) + l(x + y - q)$. Donc $dY = \frac{Y\,dx}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - x}\right) + \frac{Y\,dy}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - y}\right)$, égalant à zéro le coefficient de dy & celui de dx, on a $x + y - q = q - y = q - x$; d'où $x = y = \frac{2q}{3} = 2q - x - y$. Le triangle cherché eſt donc équilatéral, comme nous l'avons déja trouvé.

Pour s'exercer à la réſolution de quelques autres problêmes de ce genre, on peut chercher la réponſe aux queſtions ſuivantes.

I. De tous les quarrés inſcrits dans un quarré donné, quel eſt le plus petit?

II. De toutes les fractions, quelle eſt celle qui ſurpaſſe ſa puiſſance m de la plus grande quantité poſſible?

III. Quel eſt le nombre x dont la racine x eſt un *Maximum*?

IV. On voudroit conſtruire une meſure cylindrique d'une capacité donnée, & dont la ſurface intérieure fût un *Minimum*. Quel rapport doit-il y avoir entre la hauteur de cette meſure & le diamètre de ſa baſe?

V. Entre tous les cylindres que l'on peut inſcrire dans une même ſphere, quel eſt celui dont la ſurface convexe eſt un *Maximum*?

VI. Parmi tous ces cylindres, lequel a le plus de ſolidité?

VII. Quelles doivent être les dimenſions du plus grand cylindre qu'il ſoit poſſible d'inſcrire dans un cône donné?

VIII. De tous les triangles qui ont même baſe, & qui ſont inſcrits dans le même cercle, quel eſt le plus grand?

IX. Quel ſeroit, au contraire, le plus petit de ceux qui ſeroient circonſcrits au même cercle?

Des Fractions dont le Numérateur & le Dénominateur ſe réduiſent à zéro dans certains cas.

830. On trouve quelquefois des expreſſions algébriques en forme de fractions, qui ſe réduiſent à $\frac{0}{0}$. Telle eſt, par exemple, la quantité $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, lorſque $x=a$. Or, quoique indéterminés en apparence, ces réſultats ſont pourtant ſuſceptibles de valeurs déterminées, & voici une méthode pour les trouver.

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont des fonctions de x qui ſe réduiſent l'une & l'autre à 0 lorſque $x=a$. Pour en trouver la valeur, on ſubſtituera $x+dx$ au lieu de x dans P & dans Q, & on aura $\frac{P+dP}{Q+dQ}$: faiſant enſuite $x=a$ dans cette fraction, elle ſe réduira à $\frac{dP}{dQ}$; & ce ſera la valeur de la fraction propoſée dans la ſuppoſition de $x=a+dx$, ou de $x=a$, ſi toutefois les termes de la fraction $\frac{dP}{dQ}$ ne s'anéantiſſent pas encore en faiſant $x=a$.

Ex. On demande la valeur de $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, lorsque $x = a$? . . .

Ici $P = x^2 - a^2$, & $Q = x - a$; donc $\frac{dP}{dQ} = \frac{2x\,dx}{dx} = 2x = 2a$, comme cela doit être (783).

Soit la progression géométrique $\therefore x : x^2 : x^3 : \ldots\ldots, x^n$, dont la somme est $\frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$; on demande la valeur de cette somme lorsque $x = 1$? . . . . . On trouvera $\frac{dP}{dQ} = (n + 1)\,x^n - 1 = n$, ce qui est évident.

Soit la quantité $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$. En prenant les différentielles séparément, on aura $\frac{\frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{(2a^3x - x^4)}} - \frac{a}{3x}\sqrt[3]{a^2x}}{-\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = \frac{16}{9}a$, valeur de la quantité proposée.

831. Mais s'il arrive qu'en substituant a au lieu de x dans $\frac{dP}{dQ}$, cette fraction devienne aussi $\frac{0}{0}$, on la traitera de même que la première & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait une valeur dont un des termes au moins soit fini.

Ex. Si on différentie la même équation $\therefore x : x^2 : x^3 : \ldots x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on aura après avoir divisé par $\frac{dx}{x}$, $x + 2x^2 + 3x^3 + n\,x^n = \frac{x + n\,x^{n+2} - (n + 1)\,x^{n+1}}{(1 - x)^2}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 1$. Ainsi $\frac{dP}{dQ} = \frac{1 - x^n(n + 1)^2 + n(n + 1)\,x^{2+n}}{-2(1 - x)}$, mais cette nouvelle expression donne encore $\frac{0}{0}$, en y substituant 1 à x; il faut donc différentier séparément son numérateur & son dénominateur, & on aura $\frac{-n\,x^{n-1}(n + 1)^2 + n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot x^n}{2}$,

qui en faisant $x = 1$, donne $\frac{n(n+1)}{2}$ somme de la progression arithmétique $\div 1.2.3...n$.

Dans la Quadratrice, $y = \frac{a-x}{a} \, tang \, \frac{cx}{a}$; & cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$. Donc $y = \frac{-dx}{a\,d\,cot\,\frac{cx}{a}} = \frac{sin^2\,\frac{cx}{a}}{c} = \frac{a}{c}a$.

On peut avec ces principes trouver dans chaque cas particulier les valeurs indéterminées de $0 \times \infty$, & de $\infty - \infty$. Car $0 \times \infty$ se réduit à $\frac{0}{0}$, parce que $\infty = \frac{a}{0}$. On y ramene aussi $\infty - \infty$, en supposant que le premier ∞ provient de $\frac{a}{0}$, & le second de $\frac{b}{0}$. Par exemple, si $x = 1$, on a $\frac{1}{Lx} - \frac{x}{Lx} = \infty - \infty$; qui en différentiant $\frac{1-x}{Lx}$, se réduit à $-x = -1$.

Quelques autres Applications du Calcul Différentiel.

832. NOUS avons déja trouvé des ſéries qui donnent les valeurs de $\sin z$ & de $\cos z$. Le Calcul différentiel va nous les faire retrouver.

Suppoſons $\sin z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \&c \ldots$ & $\cos z = 1 + az + bz^2 + cz^3 + \&c$; comme le calcul que nous allons faire nous apprendroit que B, D, &c, a, c, &c ſont zéro, faiſons tout ſimplement $\sin z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \&c$, & $\cos z = 1 + az^2 + bz^4 + cz^6 + \&c$; maintenant, puiſque $d(\sin z) = dz \cos z$, & $d(\cos z) = -dz \sin z$, on aura, après avoir diviſé par dz, les deux équations ſuivantes.

$$A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + \&c = 1 + az^2 + bz^4 + cz^6 + \&c$$
$$A + Bz^2 + Cz^4 + Dz^6 + \&c = -2a - 4bz^2 - 6cz^4 - 8dz^6 - \&c.$$

D'où l'on tire $A = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{-1}{2.3}$, $b = \frac{1}{2.3.4}$, $C = \frac{1}{2.3.4.5}$, $c = \frac{-1}{2.3.4.5.6}$, &c. Donc $\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c \ldots$ Et $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \&c$, comme nous l'avons déja vu (562).

833. Cela poſé, ſoit $x = ly$, on aura $dx = l(1 + \frac{dy}{y}) = l(1 + dx) = dx\, le = le^{dx}$; donc $e^{dx} = 1 + dx$, & $e^x = (1 + dx)^{\frac{x}{dx}}$. Soit donc $\frac{x}{dx} = \omega$, la quantité ω ſera infiniment grande, & on aura $e^x = (1 + \frac{x}{\omega})^{\omega}$. Développant cette expreſſion, & ayant égard à ce que $\omega - 1$, $\omega - 2$, &c. ne different pas de ω à cauſe qu'il eſt infini, on a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \&c = (1 + \frac{x}{\omega})^{\omega}$. Comme on l'auroit déduit de la ſérie déja trouvée

(306) .... $n = 1 + ln + \frac{l^2 n}{2} + \frac{l^3 n}{2.3} +$ &c, & en faiſant $ln = x$.

Subſtituons ſucceſſivement $\zeta\sqrt{-1}$ & $-\zeta\sqrt{-1}$, dans la valeur de e^x à la place de x, nous aurons .....

$$e^{\zeta\sqrt{-1}} = 1 + \zeta\sqrt{-1} - \frac{\zeta\zeta}{2} - \frac{\zeta^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} + \frac{\zeta^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \&c.$$

$$e^{-\zeta\sqrt{-1}} = 1 - \zeta\sqrt{-1} - \frac{\zeta\zeta}{2} + \frac{\zeta^3\sqrt{-1}}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \frac{\zeta^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \&c.$$

Ajoutant & ſouſtrayant, il vient

$$e^{\zeta\sqrt{-1}} + e^{-\zeta\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{\zeta\zeta}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \frac{\zeta^6}{2.3.4.5.6} + \&c\right) = 2\cos\zeta;$$

$$\frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = 2\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \&c\right) = 2\sin\zeta.$$

Donc $\sin\zeta = \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ .... $\cos\zeta = \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} + e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2}$,

ou $\sin\zeta = \frac{\left(1 + \frac{\zeta\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega - \left(1 - \frac{\zeta\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2\sqrt{-1}}$ . . . . . &

$\cos\zeta = \frac{\left(1 + \frac{\zeta\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega + \left(1 - \frac{\zeta\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2}$. Et par conſéquent

$$\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta} = tang\,\zeta = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{e^{\zeta\sqrt{-1}} + e^{-\zeta\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2\zeta\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\zeta\sqrt{-1}} + 1}.$$

On a auſſi $e^{\zeta\sqrt{-1}} = \cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta$, $e^{-\zeta\sqrt{-1}} = \cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta$; d'où l'on tire $e^{n\zeta\sqrt{-1}} = (\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)^n$ ...

$e^{-n\zeta\sqrt{-1}} = (\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta)^n$ .... $(\cos\zeta \pm \sqrt{-1}\sin\zeta)^n$

$= \cos n\zeta \pm \sqrt{-1}\sin n\zeta$ .... $\frac{e^{n\zeta\sqrt{-1}} + e^{-n\zeta\sqrt{-1}}}{2} = \cos n\zeta =$

$\frac{1}{2}(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)^n + \frac{1}{2}(\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta)^n$ . . . . . .

$$\frac{e^{n\zeta\sqrt{-1}} - e^{-n\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin n\zeta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)^n - (\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Or les valeurs de $e^{\zeta\sqrt{-1}}$, $e^{-\zeta\sqrt{-1}}$ donnent, en prenant les logarithmes, $\zeta\sqrt{-1} = l(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta) = l\cos\zeta + l(1 + \sqrt{-1}\,tang\,\zeta)$ . . . . $-\zeta\sqrt{-1} = l(\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta) = l\cos\zeta + l(1 - \sqrt{-1}\,tang\,\zeta)$; & en soustrayant

$$2\zeta\sqrt{-1} = l\left(\frac{\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta}{\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta}\right) = l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,tang\,\zeta}{1 - \sqrt{-1}\,tang\,\zeta}\right);$$

d'où l'on déduiroit, comme on le fait déja (567) . . . . . .

$$\zeta = tang\,\zeta - \frac{tang^3\zeta}{3} + \frac{tang^5\zeta}{5} - \text{&c.}$$

834. Avec ces principes, on peut réduire une quantité exponentielle quelconque a^x en série, lorsque x est réel, & à des sinus lorsqu'il est imaginaire. Car si on fait $a^x = e^z$, on aura $x\,la = z$, & $a^x = e^z = 1 + x\,la + \frac{x^2\,l^2\,a}{2} + \frac{x^3\,l^3\,a}{2.3} + \text{&c.}$

Supposant ensuite qu'on ait $a^{x\sqrt{-1}}$, on fera $e^{\zeta\sqrt{-1}} = a^{x\sqrt{-1}}$; d'où l'on déduira encore $\zeta = x\,la$, & $a^{x\sqrt{-1}} = \cos(x\,la) + \sqrt{-1}\sin(x\,la)$.

Reprenons l'équation $\pm\zeta\sqrt{-1} = l\cos\zeta + l(1 \pm \sqrt{-1}\,tang\,\zeta) = l(\cos\zeta \pm \sqrt{-1}\sin\zeta)$, & en supposant la demi-circonférence 3.1415 &c $= \pi$, si on fait $\zeta = (2k+1)\pi$, k étant un nombre entier quelconque, on aura $\sin\zeta = 0$, & $\cos\zeta = -1$: Donc $\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1} = l-1$. Ainsi le logarithme de -1 a une infinité de valeurs toutes imaginaires; ce qui ne doit pas paroître plus étonnant que la multiplicité des racines dans une équation algébrique, & que l'infinité d'arcs différents qui répondent à un même sinus

835. On peut remarquer, en passant, que les logarithmes des quantités positives ont aussi une infinité de valeurs dont une seule est réelle. Il n'y a pourtant que celle-ci dont on fasse usage dans le calcul : on néglige les autres.

Pour s'assurer que ces logarithmes ont réellement un nombre infini de valeurs, on n'a qu'à supposer $z = 2k\pi$ dans la formule $l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \pm z\sqrt{-1}$, il en résultera $l\,1 = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$. Donc le logarithme de $+1$ a une infinité de valeurs imaginaires, & une seule réelle, savoir zéro, que l'on obtiendra, en faisant $k = 0$.

836. Il est facile par ce qui précede 1°. de réduire des logarithmes de quantités imaginaires à des sinus ou des cosinus d'arcs réels. 2°. de trouver une expression simple des logarithmes des nombres négatifs, s'il en étoit jamais besoin.

En effet, soit d'abord $l(a+b\sqrt{-1})$ qui peut représenter le logarithme d'une quantité quelconque imaginaire, on fera $\frac{b}{a} = tang\,u$, u étant un arc réel déterminé par cette valeur. On aura donc $l(a+b\sqrt{-1}) = la + l(1+\sqrt{-1}\,tang\,u) = la - l\cos u + u\sqrt{-1}$. Mais $\cos u = \frac{\sin u}{tang\,u} = \sqrt{1-\cos^2 u} \times \frac{a}{b}$. Donc $\cos u = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, & $l(a+b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(a^2+b^2)} + u\sqrt{-1} = +\frac{1}{2}l(a^2+b^2) + u\sqrt{-1}$.

Soit maintenant $l-a$; puisqu'on a $l-a = la + l-1$, & que $l-1 = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$ on en déduit $l-a = la + (2k+1)\pi\sqrt{-1}$. Donc encore une fois les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires. Mais comme leur expression est assez simple, quoiqu'elle dépende de la circonférence du cercle, on peut les traiter dans le calcul aussi facilement que les logarithmes des nombres positifs.

837. Reprenons maintenant les deux équations . . . . . $\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, & faisons $z = \frac{(2i+1)\pi}{m}$, i étant un nombre entier quelconque, nous aurons

$$\sin\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} + e^{-\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}}}{2}.$$

Puiſqu'on a $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, on aura $e^{(2i+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$, & par conſéquent $e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{-1}$; donc $\sin\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{\sqrt[m]{-1} - \frac{1}{\sqrt[m]{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, & $\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{\sqrt[m]{-1} + \frac{1}{\sqrt[m]{-1}}}{2}$. Soit $\sqrt[m]{-1} = x$, on aura $x^m + 1 = 0$, & $\sin\frac{2i+1}{m}\pi = \frac{xx-1}{2x\sqrt{-1}}$, $\cos\frac{2i+1}{m}\pi = \frac{xx+1}{2x}$. On ſubſtituera donc à x toutes les racines de l'équation $x^m + 1 = 0$, & on aura les valeurs de $\sin\frac{2i+1}{m}\pi$ & de $\cos\frac{2i+1}{m}\pi$.

Par exemple, ſi $m = 3$, on a $x = -1$, $x = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, & les trois valeurs de $\sin\frac{2i+1}{3}\pi = \sin(2i+1)\,60°$ ſont 0, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, quel que ſoit le nombre entier que l'on prenne pour i. On trouvera de même que les trois valeurs de $\cos(2i+1)\,60°$ ſont -1, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$. Il eſt aiſé de vérifier tout cela.

838. Puiſqu'on a $\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{xx+1}{2x}$, il eſt clair que $xx - 2x\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + 1 = 0$ eſt un facteur de l'équation $x^m + 1 = 0$, & par conſéquent que $xx - 2ax\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + aa = 0$ eſt un facteur du ſecond degré de l'équation $x^m + a^m = 0$. Enſorte que ſi on ſubſtitue à i tous les nombres entiers poſſibles, on aura tous les facteurs du ſecond degré de $x^m + a^m = 0$. Il ne pourra donc y en avoir qu'un certain nombre. Auſſi retrouvera-t-on les mêmes facteurs lorſque $2i+1$ ſera plus grand que m. Par exemple, ſi on demande les facteurs du ſecond degré de l'équation

$x^5 + a^5 = 0$, le facteur général ſera dans ce cas

$$xx - 2ax\cos\frac{(2i+1)\pi}{5} + aa = 0.$$

Faiſons $i = 0$, nous aurons pour premier facteur . . . $xx - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + aa = 0$. Soit $i = 1$, le facteur ſera $xx - 2ax\cos\frac{3}{5}\pi + aa = 0$; ſoit $i = 2$, on aura $\cos\frac{2i+1}{5}\pi = -1$, & le facteur ſera $xx + 2ax + aa = 0$, ou $x + a = 0$. Donc les facteurs de l'équation propoſée ſont $x + a = 0$ . . . . $xx - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + aa = 0$ . . . . $xx - 2ax\cos\frac{3}{5}\pi + aa = 0$, & par le moyen du cercle, connoiſſant $\cos\frac{1}{5}\pi$, $\cos\frac{3}{5}\pi$, l'équation propoſée ſera réſolue.

839. Pour trouver de la même maniere les facteurs de $x^m - a^m = 0$, je reprends l'équation $2\cos\zeta = e^{\zeta\sqrt{-1}} + e^{-\zeta\sqrt{-1}}$, & je fais $\zeta = \frac{2k\pi}{m}$, k étant un nombre entier, ce qui donne

$$2\cos\frac{2k\pi}{m} = e^{\frac{2k}{m}\pi\sqrt{-1}} + e^{-\frac{2k}{m}\pi\sqrt{-1}}.$$

Or $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, donc $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = +1$, & $e^{\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{1}$. Soit $\sqrt[m]{1} = x$, on aura $2\cos\frac{2k\pi}{m} = \frac{xx+1}{x}$, & par conſéquent $xx - 2x\cos\frac{2k\pi}{m} + 1 = 0$ eſt le facteur général de l'équation $x^m - 1 = 0$, ou $xx - 2ax\cos\frac{2k\pi}{m} + aa = 0$; celui de $x^m - a^m = 0$.

Par exemple, les cinq facteurs de $x^5 - a^5 = 0$ ſe déduiſent facilement des trois équations $x - a = 0$ . . ; $xx - 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + aa = 0$ . . . $xx - 2ax\cos\frac{4}{5}\pi + aa = 0$; ſi on eût fait $k = 3$, $k = 4$, &c, on auroit trouvé les mêmes facteurs. Paſſons à quelques autres uſages du Calcul différentiel.

840. Soit une fonction quelconque y de la variable x, on ſait que ſi x devient $x + dx$, y deviendra $y + dy$, & par conſéquent ſi x varie uniformément & devient $x + 2dx$, y deviendra $y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + ddy$. De même ſi x devient $x + 3dx$,

y ſe changera en $y + 3\,dy + 3\,ddy + d^3y$, & en général ſi on ſubſtitue dans y, $x + n\,dx$ au lieu de x, y deviendra

$$y + n\,dy + \frac{n.n-1}{2}\,ddy + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,d^3y + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\,d^4y + \&c.$$

Soit donc $n\,dx =$ à la quantité finie a, alors n étant infini on aura $n = n-1 = n-2$ &c. Donc ſi dans y on ſubſtitue $x + a$ au lieu de x, la fonction y ſe changera en $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{2.3.4.dx^4} + \&c$, dx étant ſuppoſée conſtante.

Pour faire voir la vérité de cette formule dans un exemple ſimple, ſuppoſons $y = xx - 2x + 1$, & cherchons la valeur que cette quantité doit avoir ſi on ſubſtitue $x + z$ à x, nous aurons $a = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, &c. Donc y ſe change en $xx - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$, ce qui eſt évident.

Si on fait a négatif dans la formule générale, on aura $y - \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,ddy}{2\,dx^2} - \frac{a^3\,d^3y}{2.3\,dx^3} + \&c$, pour la valeur de y lorſqu'on y ſubſtitue $x - a$ au lieu de x. Voici quelques applications de cette formule.

Soit $y = x^m$, & on aura $\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}$ ... $\frac{ddy}{dx^2} = m.m-1.x^{m-2}$ ... $\frac{d^3y}{dx^3} = m.m-1.m-2.x^{m-3}$, &c. Donc ſi x devient $x + a$, y deviendra $(x+a)^m = x^m + m\,a\,x^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}\,a^2\,x^{m-2} + \&c.$

Faiſons $a = \frac{-bx}{x+b}$, nous aurons

$$(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{m\,b\,x^m}{x+b} + \frac{m.m-1.b^2\,x^m}{2\,(x+b)^2} - \&c,$$

$$\text{ou } \frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{m\,x^{-m}\,b}{x+b} + \frac{m.m-1.x^{-m}\,b^2}{2\,(x+b)^2} - \&c$$

$$= x^{-m}\left(1 - \frac{m\,b}{x+b} + \frac{m.m-1.b^2}{2\,(x+b)^2} - \frac{m.m-1.m-2.b^3}{2.3.(x+b)^3} + \&c\right);$$

ſérie

ſérie qui n'aura qu'un nombre fini de termes lorſque m ſera un nombre entier.

Soit $-m = n$, on aura $(x+b)^m = x^n\left(1+\frac{nb}{x+b}+\frac{n.n+1}{2}\frac{b^2}{(x+b)^2}+\&c\right)$; on peut vérifier ces formules en réduiſant en ſéries les fractions $\frac{1}{x+b}$, $\frac{1}{(x+b)^2}$, &c. Or ces ſéries peuvent ſervir à trouver les racines des nombres d'une maniere prompte, parce qu'on peut toujours les rendre très-convergentes.

841. Soit maintenant $y = lx$; ſi on met $x+a$ au lieu de x, on aura (à cauſe de $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ & de $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}$, &c). . . $l(x+a) = lx + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \&c$ . . . $l(x-a) = lx - \frac{a}{x}\left(1+\frac{a}{2x}+\frac{a^2}{3x^2}+\&c\right)$. Soit $a = \frac{-xx}{b+x}$, on aura $l(x+a) = l\frac{bx}{b+x}$, ou $lbx - l(b+x) = lx - \frac{x}{b+x} - \frac{x^2}{2(b+x)^2} - \frac{x^3}{3(b+x)^3} - \&c$. Donc $l(b+x) = lb + \frac{x}{b+x}\left(1+\frac{x}{2(b+x)}+\frac{x^2}{3(b+x)^2}+\&c\right)$. . . $l(b-x) = lb - \frac{x}{b-x}\left(1-\frac{x}{2(b-x)}+\frac{x^2}{3(b-x)^2}-\&c\right)$; ſéries convergentes qui facilitent beaucoup le calcul des logarithmes.

Suppoſons $y = b^x$, nous aurons $\frac{dy}{dx} = b^x\, l\, b$ . . . $\frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b$, &c. Donc $b^{x+a} = b^x\left(1+a\,lb+\frac{a^2 l^2 b}{2}+\frac{a^3 l^3 b}{2.3}+\&c\right)$, & par conſéquent $b^a = 1 + a\,lb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} + \&c$.

842. Soit à préſent y un arc de cercle dont le ſinus $= x$, que nous déſignerons par $y = A\ \mathit{ſin}\ x$, alors on aura $x = \mathit{ſi}: y$ . . .

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{\cos^3 y} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$, &c. Donc l'arc qui a pour ſinus $x+a$, ou

$A \sin(x+a) = A \sin x + \frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$ + &c. On trouve de même que $A \sin(x-a)$

$= A \sin x - \frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$ — &c.

Ces ſéries ſont très-propres à calculer d'une maniere facile l'arc qui répond à un ſinus donné. Pour cela on cherche dans les Tables l'arc qui en approche le plus; ſon ſinus x étant ôté du ſinus propoſé donnera la quantité a qui ſera toujours extrêmement petite; & comme on a immédiatement $\sqrt{(1-xx)}$, on trouvera l'arc cherché en ajoutant $\frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$ + &c à celui dont le ſinus eſt x.

Mais il faut obſerver 1°, que la ſéric ſera ſi convergente que les deux premiers termes ſuffiront toujours lorſqu'on ne voudra pas pouſſer l'approximation plus loin qu'environ juſqu'aux quintes. 2°, Que l'arc qu'on aura par cette ſérie ſera exprimé en parties du rayon 1, & que pour les exprimer en ſecondes, tierces, &c, il faudra les diviſer par la longueur de l'arc d'une ſeconde ou retrancher de leur logarithme celui de l'arc d'une ſeconde qui eſt 4.685574866823 54, en ſuppoſant le logarithme de l'unité = 10 pour éviter les caractériſtiques négatives. Le reſte eſt le logarithme du nombre de ſecondes de l'arc cherché, ce qui donne auſſi-tôt les tierces, les quartes, &c.

843. Ex. Soit une hyperbole dont la puiſſance = 1, & l'angle fait par ſes Aſymptotes = A, on aura $\sin A \, l\, z$ pour la ſurface d'un trapeze aſymptotique compris entre les ordonnées 1, $\frac{1}{z}$. Donc pour que cet eſpace repréſente le logarithme tabulaire de l'abſciſſe z, il faut que $\sin A$ ſoit égal au module 0.4342944819; cherchons donc l'angle A dont le ſinus = 0.4342944819.

Or celui qui en approche le plus, dans les Tables ordinaires, eſt de 25° 44′. Son *ſinus* x = 0.4341833, & ſon *coſinus* $\sqrt{(1-xx)}$ = 0.9008245. On a donc a = 0.0001112. Maintenant,

pour trouver ce qu'il faut ajouter à 25° 44′ pour avoir l'arc cherché, calculons les deux premiers termes $\frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$, & en faisant 25° 44′ $= y$, on aura $\frac{a}{cos\, y} + \frac{a^2 \sin y}{2\, cos^3 y} = \frac{a}{2\, cos^3 y}$ $(2\, cos^2 y + a \sin y) = \frac{a}{2\, cos^3 y}$ $(1 + cos\, 2y + a \sin y) =$ $\frac{a}{2\, cos^3 y}$ $(1 + cos\, 51° 28′ + a \sin 25° 44′) = \frac{a}{2\, cos^3 y}$. 1,62301807, dont le logarithme est 6,0914025 (en supposant celui de l'unité $= 10$); ôtant 4,6855748, il reste 1,4058277, pour le logarithme du nombre de secondes de l'arc demandé.

Or ce logarithme répond au nombre 25, 4582; l'arc cherché a donc 25″ + 0.4582″; multipliant par 60 cette fraction décimale, elle se réduit à 27‴ + 0.492‴; multipliant par 60, on a 29^{IV} + 0.52^{IV}, ou $29^{IV} + 31^{V} + 12^{VI}$. Donc enfin l'angle que doivent faire entre elles les asymptotes d'une hyperbole dont les espaces asymptotiques représentent les logarithmes des Tables, ou celui qui a pour sinus le module, est de 25° 44′ 25″ 27‴; & si on prenoit le sinus x avec dix ou douze décimales, le calcul seroit exact jusqu'aux 12^{VI}.

344. Faisons actuellement $y = A \cdot cos(x)$, nous aurons $x = cos\, y$... $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-xx)}}$.... $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{-x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$.... $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$, &c. Donc $A\, cos(x+a) = A\, cos\, x - \frac{a}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$ — &c, & $A\, cos(x-a) = A\, cos\, x + \frac{a}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$ — &c, séries dont on fera le même usage que des précédentes. On en trouvera de semblables pour l'arc dont la tangente ou la cotangente est $x \pm a$.

845. Supposons maintenant $y = \sin x$, nous aurons $\frac{dy}{dx} = \cos x$, $\frac{d\,dy}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$, &c, Donc ....

$\sin(x+a) = \sin x + a\cos x - \frac{1}{2}a^2\sin x - \frac{1}{6}a^3\cos x + \frac{1}{24}a^4\sin x + \&c$
$\sin(x-a) = \sin x - a\cos x - \frac{1}{2}a^2\sin x + \frac{1}{6}a^3\cos x + \frac{1}{24}a^4\sin x - \&c.$

De même, si $y = \cos x$, on aura .....

$\cos(x+a) = \cos x - a\sin x - \frac{1}{2}a^2\cos x + \frac{1}{6}a^3\sin x + \frac{1}{24}a^4\cos x - \&c$
$\cos(x-a) = \cos x + a\sin x - \frac{1}{2}a^2\cos x - \frac{1}{6}a^3\sin x + \frac{1}{24}a^4\cos x + \&c.$

Ces formules sont d'un très-grand usage, pour interpoler les Tables des sinus; il nous suffit de l'indiquer.

Faisons $x = 0$, les valeurs de $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, deviendront, à cause de $\sin x = 0$, & de $\cos x = 1$ .....

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3....7} + \frac{a^9}{2.3....9} - \frac{a^{11}}{2.3....11} + \&c$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3....8} - \frac{a^{10}}{2.3....10} + \&c,$$

comme on le sait déja.

846. Supposons encore $y = tang\ x$, nous aurons $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ .... $\frac{d\,dy}{2\,dx^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ .... $\frac{d^3y}{2\,dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ &c. Donc $tang\,(x+a) = tang\,x + \frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4\sin x}{\cos^5 x} + \&c - \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4\sin x}{3\cos^3 x} - \&c.$

Or $\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4\sin x}{\cos^5 x} + \&c$ est une progression géométrique dont le premier terme $= \frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2\sin x}{\cos^3 x}$, & dont le quotient $= \frac{a^2}{\cos^2 x}$. Donc la somme $= \frac{a + \frac{a^2}{2}\frac{tang\,x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{a^2}{\cos^2 x}}$, & par conséquent $tang\,(x+a) = tang\,x +$

$\frac{a + a^2 \, tang \, x}{cos^2 x - a\,a} - \frac{2\,a^3}{3\,cos^2 x} - \frac{a^4 \, sin \, x}{3\,cos^3 x}$ — &c. $= \frac{a + sin \, x \, cos \, x}{cos^2 x - a\,a}$ $- \frac{2\,a^3}{3\,cos^2 x} - \frac{a^4 \, sin \, x}{3\,cos^3 x}$ — &c. On trouvera de semblables formules pour $cot\,(x \pm a)$.

847. Soit maintenant $y =$ le logarithme tabulaire de $sin \, x = m \, l \, sin \, x$, si m représente le module, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{m \, cos \, x}{sin \, x}$ . . . $\frac{d\,dy}{dx^2} = -\frac{m}{sin^2 x}$ . . . $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2\,m\,cos\,x}{sin^3 x}$, &c. Donc $log \, sin\,(x + a) = log \, sin \, x + a\,m \, \frac{cos \, x}{sin \, x} - \frac{m\,a^2}{2\,sin^2 x} + \frac{a^3\,m\,cos\,x}{3\,sin^3 x}$ &c. . . . . $log \, sin\,(x - a) = log \, sin \, x - a\,m \, \frac{cos \, x}{sin \, x} - \frac{m\,a^2}{2\,sin^2 x} - \frac{a^3\,m\,cos\,x}{3\,sin^3 x}$ &c.

Si $y = log \, cos \, x$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-m \, sin \, x}{cos \, x}$ . . . $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{-m}{cos^2 x}$ . . . $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{2\,m\,sin\,x}{cos^3 x}$, &c. Donc $log \, cos\,(x + a) = log \, cos \, x - \frac{a\,m\,sin\,x}{cos\,x} - \frac{a^2\,m}{2\,cos^2 x} - \frac{a^3\,m\,sin\,x}{3\,cos^3 x}$ — &c . . . . . & $log \, cos\,(x - a) = log \, cos \, x + \frac{a\,m\,sin\,x}{cos\,x} - \frac{a^2\,m}{2\,cos^2 x}$ + &c. Soit $y = log \, tang \, x$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{2\,m}{sin\,2\,x}$ . . . . $\frac{d\,dy}{2\,dx^2} = \frac{-2\,m\,cos\,2\,x}{sin^2\,2\,x}$ . . . . &c, & par conséquent $log \, tang\,(x + a) = log \, tang \, x + \frac{2\,a\,m}{sin\,2\,x} - \frac{2\,a^2\,m\,cos\,2\,x}{sin^2\,2\,x}$ &c. Il en seroit de même pour $l \, cot \, x$.

848. Si on suppose maintenant que y soit l'arc dont le logarithme du sinus $= x$, ou $y = A \, l \, sin \, x$, on aura $x = m \, l \, sin \, y$, & par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{sin \, y}{m \, cos \, y}$, $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{sin \, y}{m^2 \, cos^3 \, y}$, &c. Donc $A \, l \, sin\,(x + a) = y + \frac{a \, sin \, y}{m \, cos \, y} + \frac{a^2 \, sin \, y}{2\,m^2 \, cos^3 \, y}$ + &c.

Soit $y = A\,l\,tang\,x$, il viendra $\frac{dy}{dx} = \frac{sin\,2y}{2m}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sin\,4y}{4mm}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{sin\,2y\,cos\,4y}{2m^3}$, &c. Donc $A\,l\,tang\,(x+a) = y + \frac{a\,sin\,2y}{2m} + \frac{a^2\,sin\,2y\,cos\,2y}{4mm} + \frac{a^3\,sin\,2y\,cos\,4y}{12m^3}$ + &c. Ces formules peuvent ſervir à réſoudre d'une maniere très-approchée les problêmes relatifs à l'uſage des Tables des ſinus.

ELÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

DANS le Calcul différentiel on ſuppoſe connu le rapport des quantités variables, & on cherche celui de leurs différentielles; dans le Calcul intégral, au contraire, on détermine le rapport des variables par celui de leurs différentielles.

849. On ſe ſert de la lettre $\int$ pour indiquer une *intégrale*; $\int a\,dx$, par exemple, eſt l'expreſſion générale de toutes les quantités qui par leur différentiation produiſent $a\,dx$; & comme $a\,dx$ peut également provenir ou de ax ſeul, ou de $ax +$ une quantité conſtante, on ajoute à chaque intégrale une conſtante C que l'on détermine enſuite par les conditions du problême.

La quantité ax étant en quelque ſorte la ſomme de tous ſes éléments $a\,dx$, on prononce *ſomme de* $a\,dx$ l'expreſſion $\int a\,dx$; & *ſommer*, *intégrer*, ou *trouver la fluente*, ſont des mots ſynonymes.

S'il n'y avoit de différentielles que celles qui proviennent d'une différentiation exacte, chacune auroit ſon intégrale : mais comme on entend par différentielle toute quantité affectée de dx, dy, &c, il y en a pluſieurs qui ne ſont ſuſceptibles d'aucune intégration, parce qu'elles ne peuvent provenir d'aucune quantité différentiée : $y\,dx$, par exemple, eſt de ce nombre.

Il y en a beaucoup d'autres que l'on n'a pu intégrer juſqu'à préſent que par approximation. Telles ſont les différentielles des logarithmes, des arcs de cercle, & en général de toutes les quantités que l'on appelle tranſcendantes. Voyons d'abord celles dont on a trouvé les intégrales exactes, ou algébriques.

Des Quantités ſuſceptibles d'une Intégration exacte.

850. Puiſque la différentielle de x^n eſt $nx^{n-1}dx$, il eſt clair que l'intégrale de $nx^{n-1}dx$ doit être réciproquement x^n; donc $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}$; & faiſant $n - 1 = m$, on aura $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, ou $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$; formule qui donne pour l'intégration des différentielles monomes la regle inverſe de leur différentiation (848).

851. Ainſi *pour intégrer les différentielles monomes, il faut d'abord augmenter d'une unité l'expoſant de la variable, & diviſer enſuite par l'expoſant ainſi augmenté, & par la différentielle de la variable.*

852. Cette regle eſt cependant ſujette à exception dans le cas où $m=-1$; car alors l'intégrale devient $\frac{1}{0}+C$, c'eſt-à-dire, qu'elle prend une forme infinie. Mais comme la différentielle $x^m\,dx$ ſe réduit dans ce cas à $\frac{dx}{x}$, que l'on ſait d'ailleurs être la différentielle du logarithme hyperbolique de x, ſon intégrale eſt lx. Ainſi $\int\frac{dx}{x}=lx+C$, & par conſéquent les différentielles monomes à une variable peuvent s'intégrer exactement, ou du moins par approximation au moyen des logarithmes. Voici pluſieurs autres différentielles que l'on peut intégrer de la même maniere.

853. Suppoſons $dy=dx\,(a+bx+cx^2+\&c.)=a\,dx+b\,x\,dx+cx^2\,dx+\&c$, & nous aurons $y=C+ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\&c.$

Soit $dy=a\,dx\,(b+x)^m$; ſi on fait $b+x=z$, on aura $dx=dz$, & $dy=a\,z^m\,dz$; d'où $y=\frac{a\,z^{m+1}}{m+1}=\frac{a}{m+1}(b+x)^{m+1}+C$; & lorſque $m=-1$, on aura $y=\int\frac{a\,dx}{b+x}=a\,l\,(b+x)+C=lc\,(b+x)^a$, en faiſant $C=lc$.

854. Soit maintenant $dy=ax^{n-1}\,dx\,(b+x^n)^m$, on aura $y=C+\frac{a}{n\,(m+1)}(b+x^n)^{m+1}$; & en général, ſi on a $dy=x^n\,dx\,(a+bx^m)^k$, on trouvera, en développant cette expreſſion... $dy=a^k\,x^n\,dx+k\,a^{k-1}\,bx^{m+n}\,dx+\frac{k.k-1}{2}a^{k-2}b^2\,x^{2m+n}\,dx+\&c.$ dont l'intégrale eſt $y=C+\frac{a^k\,x^{n+1}}{n+1}+\frac{k}{m+n+1}a^{k-1}\,bx^{m+n+1}+\frac{k.k-1}{2\,(2m+n+1)}a^{k-2}b^2\,x^{2m+n+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3\,(3m+n+1)}a^{k-3}\,b^3\,x^{3m+n+1}+\&c.$ Or cette intégrale ſera toujours finie, lorſque k ſera un nombre entier poſitif. Mais on doit obſerver que ſi après avoir développé le binome, il y a

des termes de la forme $\frac{dx}{x}$, il faut les intégrer par logarithmes. La méthode est la même pour $x^m dx (a+bx+cx^2+\&c)^k$.

855. Concluons donc que toute différentielle binome représentée par la formule $x^n dx (a+bx^m)^k$ est intégrable algébriquement, 1°. toutes les fois que $n = m-1$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de m & de k; 2°, toutes les fois que k est un nombre entier positif, quels que soient m & n. Voici encore deux autres cas où l'intégration exacte est possible.

856. 1°. Soit $a+bx^m = z$; on aura $x^{n+1} = \frac{(z-a)^{\frac{n+1}{m}}}{b^{\frac{n+1}{m}}}$.

$x^m dx = \frac{1}{mb^{\frac{n+1}{m}}} . dz (z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$, & $x^n dx (a+bx^m)^k = \frac{1}{mb^{\frac{n+1}{m}}} z^k dz (z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$, différentielle intégrable toutes les fois que $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier positif.

Soit, par exemple, $x^3 dx (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, qui donne $\frac{n+1}{m} = 2$. La transformée devient alors . . . . . .

$\int \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz (z-a^2) = \int \frac{1}{2} z^{\frac{3}{2}} dz - \int \frac{1}{2} a^2 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\frac{1}{2} z^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} a^2 . \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$

$\frac{1}{5} z^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} a^2 z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{15} z^{\frac{3}{2}} (\frac{1}{15} z - \frac{1}{3} a^2) = \frac{1}{15} (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} . . . . .$

$(\frac{1}{15} (a^2+x^2) - \frac{1}{3} a^2) = \frac{1}{15} (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} (4x^2 - 3a^2)$. Donc

$\int x^3 dx (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = C + \frac{1}{15} (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} (4x^2 - 3a^2)$.

857. 2°. $x^n dx (a+bx^m)^k = x^{mk+n} dx (b+ax^{-m})^k$; or cette différentielle est intégrable, suivant ce que nous venons de dire, si $\frac{mk+n+1}{-m}$, ou $-k-(\frac{n+1}{m})$ est un nombre entier

positif. Soit, par exemple, $x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$; on aura .... $\frac{mk+n+1}{-m}=2$, & $x^{-7}dx(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}=x^{mk+n}dx(b+ax^{-m})^k$. Je suppose $1+ax^{-3}=z$, & j'ai $-\frac{1}{3aa}\cdot z^{-\frac{5}{3}}dz(z-1)$, ou $-\frac{1}{3aa}z^{-\frac{2}{3}}dz+\frac{1}{3aa}z^{-\frac{5}{3}}dz$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{aa}z^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2aa}z^{-\frac{2}{3}}$, qui donne ....

$$\int x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}=C-\frac{1}{aa}(1+\frac{a}{x^3})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{2(1+ax^{-3})}).$$

Lorsqu'une différentielle binome n'a pas les conditions que nous venons d'indiquer, on tâche de la ramener à quelque autre différentielle connue, telle, par exemple, que celle de la quadrature du cercle, ou celle des logarithmes, &c. Si cette réduction est possible, voici une maniere de l'effectuer.

Méthode pour ramener l'intégration de plusieurs différentielles binomes à celle d'autres différentielles connues.

858. Soit proposé d'intégrer la différentielle $x^n dx(a+bx^m)^k$, en supposant connue l'intégrale de $x^p dx(a+bx^m)^k$, & n étant plus grand que p. . . . . .

Je considere la quantité $x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}$, dont la différentielle $d(x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1})=(aq+a)x^q dx(a+bx^m)^k+(bmk+bm+bq+b)x^{m+q}dx(a+bx^m)^k$. Donc

$$\int x^{m+q}dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)}-\ldots\ldots$$

$$\frac{a(q+1)\int x^q dx(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}.$$

Soit $m+q=n$, ou $q=n-m$, on aura $\int x^n dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)}-$ . . . . . .

$\frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)} \int x^{n-m} dx (a+bx^m)^k$. Par la même formule,

$$x^{n-m} dx (a+bx^m) = \frac{x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(1+n+mk-m)} - \ldots.$$

$\frac{a(1+n-2m)}{b(1+n+mk-m)} \int x^{n-2m} dx (a+bx^m)^k$. Donc $\int x^n dx (a+bx^m)^k$

$$= \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b^2(mk+n+1)} \frac{x^{1+n-2m}}{} \times$$

$$\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{(1+n+mk-m)} + \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mk)(1+n+mk-m)} \int x^{n-2m} dx (a+bx^m)^k.$$

On peut donc réduire l'intégrale de la différentielle proposée $x^n dx (a+bx^m)^k$ à celle de $x^{n-m} dx (a+bx^m)^k$, ou même de $x^{n-2m} dx (a+bx^m)^k$; & en général, on la réduira à celle de $x^{n-im} dx (a+bx^m)^k$, i étant un nombre entier positif, par cette formule qui se déduit des précédentes..... $S x^n dx (a+bx^m)^k =$

$$\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(1+n-m)x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{b^2(mk+n+1)(mk+n+1-m)} +$$

$$\frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)x^{1+n-3m}(a+bx^m)^{k+1}}{b^3(mk+n+1)(mk+n+1-m)(mk+n+1-2m)} \text{ \&c. } \mp$$

$$\frac{a^{i-1}(1+n-m)(1+n-2m)\ldots(1+n-m(i-1))x^{1+n-im}(a+bx^m)^{k+1}}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\ldots(mk+n+1-m(i-1))}$$

$$\pm \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots(1+n-im)}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\ldots(mk+n+1-m(i-1))} \int x^{n-im} dx (a+bx^m)^k$$

Le signe supérieur a lieu lorsque i est pair ; le signe inférieur, toutes les fois que i est impair.

859. Cela posé, si $n-im=p$, ou si $\frac{n-p}{m}$ différence des exposants de x hors du binome, divisée par l'exposant de x dans le

binome donne un quotient i entier & positif, on pourra réduire l'intégrale de $x^n dx(a+bx^m)^i$ à celle de $x^p dx(a+bx^m)^i$ par le moyen de la formule précédente.

Ex. Soit la différentielle $x^{10} dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$, dont on propose de réduire l'intégrale à celle de $dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ qui dépend de la quadrature du cercle, comme on le verra bientôt. On aura $m=2$, $n=10$, $p=0$, $k=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$, $\frac{n-p}{m}=5=i$; donc la réduction est possible, & on trouvera que ..... $\int x^{10} dx(1-xx)^{\frac{1}{2}} = -\frac{x^9(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12} - \frac{9x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10} - \frac{9.7x^5(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8} - \frac{9.7.5x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6} - \frac{9.7.5.3x(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6.4} + \frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4}\int dx(1-xx)^{\frac{3}{2}}$.

260. Soit proposé maintenant de réduire l'intégrale de ..... $x^n dx(a+bx^m)^p$ à celle de $x^r dx(a+bx^m)^q$. Puisqu'on a $d[x^{n+1}(a+bx^m)^p] = (n+1)x^n dx(a+bx^m)^p + \ldots . bmpx^{m+n} dx(a+bx^m)^{p-1}$, il est clair que $\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1}\int x^{m+n} dx(a+bx^m)^{p-1}$. Par la même raison $\int x^{m+n} dx(a+bx^m)^{p-1} = \frac{x^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{m+n+1} - \frac{bm(p-1)}{m+n+1}\int x^{n+2m} dx(a+bx^m)^{p-2}$; donc ..... $\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \ldots . \frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)} + \frac{b^2m^2.p.p-1.\int x^{n+2m} dx(a+bx^m)^{p-2}}{(n+1)(n+1+m)}$

& en général $\int x^n dx (a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \ldots$

$\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)} + \frac{b^2m^2.p(p-1)x^{n+1+2m}(a+bx^m)^{p-2}}{(1+n)(1+n+m)(1+n+2m)}$ &c.

$\pm \frac{b^{i-1}m^{i-1}.p.p-1.p-2.\ldots.(p-i+2)}{(1+n)(1+n+m)(1+n+2m)\ldots[1+n+m(i-1)]} \times \ldots$

$x^{1+n+m(i-1)}(a+bx^m)^{p-i+1} \mp \int x^{n+im} dx (a+bx^m)^{p-i} \times \frac{b^i m^i . p.p-1\ldots(p-i+1)}{(1+n)(1+n+m)\ldots[1+n+m(i-1)]}$; le ſigne ſupérieur eſt pour le nombre entier i impair, & l'inférieur pour i pair.

II eſt clair à préſent que ſi $p-i=q$, ou ſi $p-q$ eſt un nombre entier i, l'intégrale de $x^n dx (a+bx^m)^p$ ſe réduira à celle de $x^{n+im} dx (a+bx^m)^q$, laquelle pouvant être réduite à . . . . . $\int x^r dx (a+bx^m)^q$, lorſque $\frac{n+im-r}{m}$, ou $\frac{n-r}{m}$ eſt un nombre entier poſitif, la formule propoſée pourra s'y réduire auſſi.

Qu'il s'agiſſe, par exemple, de ramener $\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}}$ à $\int dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$; on aura $a=1$, $b=-1$, $n=4$, $m=2$, $p=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=0$, $p-q=i=2$. Donc $\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5.7} + \frac{5.3}{5.7}\int x^8 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$; mais $\int x^8 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - 7x^5\frac{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10.8} - \ldots$

$\frac{7.5}{10.8.6} x^3 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{7.5.3}{10.8.6.4} x(1-xx)^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$

$\frac{7.5.3}{10.8.6.4}\int dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Donc $\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{3}{10.8} x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \ldots$

$$\frac{3\cdot5}{10.8.6}x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\cdot5\cdot3}{10.8.6.4}x(1-xx)^{\frac{1}{2}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{3\cdot5\cdot3}{10.8.6.4}\int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}} + C.$$

861. La méthode réuſſira toujours, lorſque $p-q$ ſera un nombre entier poſitif; mais s'il étoit négatif, ou ſi q étoit plus grand que p, au lieu de ramener $\int x^n\,dx\,(a+bx^m)^p$ à la formule ..... $\int x^r\,dx\,(a+bx^m)^q$, il faudroit réduire celle-ci à la premiere, & on auroit une intégrale de cette forme

$$\int x^r\,dx\,(a+bx^m)^q = X + A\int x^n dx\,(a+bx^m)^p;$$

d'où par une ſimple tranſpoſition on déduiroit

$$\int x^n\,dx\,(a+bx^m)^p = \frac{1}{A}\int x^r\,dx\,(a+bx^m)^q - \frac{X}{A}.$$

EXEMPLE. Soit la différentielle $x^4\,dx\,(1+xx)^{-3}$ qu'il faut ramener à $dx\,(1+xx)^{-1}$. Je ſuppoſe, au contraire, qu'il faut ramener celle-ci à la premiere, & j'ai $n=0$, $a=1$, $b=1$, $m=2$, $p=-1$, $q=-3$, $r=4$, $p-q=i=2$. Donc $\int dx(1+xx)^{-1} = x(1+xx)^{-1} + \frac{2}{1}x^3(1+xx)^{-2} + \frac{3}{3}\int x^4\,dx\,(1+xx)^{-3}$, & par conſéquent, ſans avoir recours à la premiere formule, j'ai $\int x^4\,dx\,(1+xx)^{-3} = -\frac{1}{8}x(1+xx)^{-1} - \frac{1}{4}x^3(1+xx)^{-2} + \frac{3}{8}\int dx\,(1+xx)^{-1}$. Or $\int dx\,(1+xx)^{-1} = \int \frac{dx}{1+xx}$ = l'arc de cercle dont le rayon eſt 1, & dont la tangente eſt x; car $d(tang\,\zeta) = \frac{d\zeta}{cos^2\zeta}$; donc $d\zeta = \frac{d\,tang\,\zeta}{1+tang^2\zeta} = \frac{dx}{1+xx}$, ſi on fait $tang\,\zeta = x$.

En général, cette méthode peut ſervir à ramener l'intégrale de $x^{2k}\,dx\,(1+xx)^{-m}$ à celle de $dx\,(1+xx)^{-1}$, ou à un arc de cercle.

De l'Intégration des Fractions différentielles rationelles.

862. Supposons que $\frac{P\,dx}{Q}$ soit une fraction rationelle, & que le plus grand exposant de x dans P soit plus petit, au moins d'une unité que dans Q. S'il ne l'est pas, on divisera le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que cette derniere condition ait lieu. Soit, par exemple, $\frac{x^4\,dx}{a+bx^3}$; on aura en divisant $\frac{x\,dx}{b} - \frac{\frac{a}{b}.x\,dx}{a+bx^3}$, dont la seconde partie est telle que nous l'avons supposée pour $\frac{P\,dx}{Q}$.

863. Cela posé, on cherchera les facteurs de Q, comme si on avoit à résoudre l'équation $Q=0$; & s'ils sont tous du premier degré, réels & inégaux, alors la fraction proposée sera de cette forme $\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}\,\&c.\ldots+\omega}{(x-f)(x-g)(x-h)\,\&c.}\,dx$ en supposant que le nombre des facteurs $x-f$, $x-g$, &c soit m. Pour intégrer dans ce cas on décomposera cette fraction en celles-ci . . . . . $\frac{A\,dx}{x-f}+\frac{B\,dx}{x-g}+\&c$, dont l'intégrale est $A\,l\,(x-f)+B\,l\,(x-g)+\&c$. . . . . avec une constante, & on déterminera les coefficients A, B, &c, en réduisant d'abord au même dénominateur, en transposant ensuite, & égalant successivement à zéro le coefficient de chaque puissance de x, ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

Ex. On demande l'intégrale de $\frac{dx}{(aa-xx)x}$? je décompose cette fraction en celles-ci, $\frac{A\,dx}{x}+\frac{B\,dx}{a-x}+\frac{C\,dx}{a+x}$, & réduisant au même dénominateur, transposant & ordonnant, je trouve . . . . . $\left.\begin{array}{l} Aa^2+Bax+Bxx \\ -1+Ca \\ -A \\ -C \end{array}\right\}=0$,

Donc $A = \frac{1}{aa}$, $B = \frac{1}{2aa}$, $C = -\frac{1}{2aa}$, & $\frac{d'x}{(aa-xx)x} = \frac{1}{aa}\cdot\frac{dx}{x} + \frac{1}{2aa}\cdot\frac{dx}{a-x} - \frac{1}{2aa}\cdot\frac{dx}{a+x}$, dont l'intégrale est $\frac{lx}{aa} - \frac{l(a-x)}{2aa} - \frac{l(a+x)}{2aa} + \frac{lc}{aa} = \frac{1}{aa}\,l\frac{xc}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. On trouvera de même que $\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \int\frac{\frac{1}{2a}dx}{a+x} + \int\frac{\frac{1}{2a}dx}{a-x} = \frac{1}{2a}\,l\frac{c(a+x)}{a-x}$.

864. Cette méthode réussira toujours lorsque les facteurs du dénominateur proposé seront tous réels & inégaux; mais si quelques-uns d'entre eux étoient égaux, si $(x-a)^m$ par exemple, représentoit un nombre m de ces facteurs, alors on décomposeroit la fraction en celles-ci, $\frac{A\,dx}{x-f} + \frac{B\,dx}{x-g} + \&c..... + \frac{A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \&c... + R}{(x-a)^m}dx$, & après avoir déterminé les coefficients, comme ci-dessus, on intégreroit $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m}dx + \frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m}dx + \&c$, ou en général, $x^k\,dx\,(x-a)^{-m}$, en faisant $x-a=z$.

Ex. Soit $\frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, dont on cherche l'intégrale. Je suppose $\frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A\,dx}{x} + \frac{(Bx+C)\,dx}{(x-1)^2} + ... \frac{(Dx+E)\,dx}{(x+1)^2}$, d'où $A=2$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{7}{4}$, $D=-\frac{5}{4}$, $E=-\frac{7}{4}$; ainsi $\frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2\,dx}{x} + \frac{1}{4}\frac{(7-3x)\,dx'}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{(5x+7)\,dx}{(x+1)^2}$. Maintenant pour intégrer la fraction $\frac{(7-3x)\,dx}{(x-1)^2}$, je fais $x-1=z$, ce qui la change en $\frac{(4-3z)\,dz}{zz} = \frac{4\,dz}{zz} - \frac{3\,dz}{z}$, dont l'intégrale est $-\frac{4}{z} - 3\,lz = \frac{-4}{x-1} - 3\,l(x-1)$; & en traitant de la même manière l'autre fraction, je trouve pour l'intégrale totale,

2 lx

$$2lx - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}l(x-1) - \frac{1}{4}l(x+1) + C.$$

865. S'il y avoit dans Q des facteurs imaginaires, en représentant l'un d'eux par $x + a + b\sqrt{-1}$, il y en auroit un autre de la forme $x + a - b\sqrt{-1}$. Donc leur produit $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ seroit un facteur réel de Q. On chercheroit donc (347) les coefficients $2a$, $a^2 + b^2$, & le facteur réel du second degré $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$, ou pour abréger, le facteur $x^2 + mx + n$ seroit déterminé. Ainsi on supposeroit que $\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+mx+n}$ est une des fractions partielles de $\frac{P\,dx}{Q}$, & on détermineroit A & B comme ci-dessus.

Ensuite, faisant $x + \frac{1}{2}m = z$, la fraction deviendroit $\frac{(A'z+B')\,dz}{zz+b'b'} = \frac{A'z\,dz}{zz+b'b'} + \frac{B'\,dz}{zz+b'b'}$. Or $\int\frac{A'z\,dz}{zz+b'b'} = \frac{A'}{2}l(zz+b'b')$, & $\int\frac{B'\,dz}{zz+b'b'} = \frac{B'}{b'}\int\frac{\frac{dz}{b'}}{1+\frac{zz}{b'b'}} = \frac{B'}{b'} \times$ *Arc de cercle dont la tangente est* $\frac{z}{b'} = \frac{B'}{b'} \times$ *Arc tang* $\frac{z}{b'} + C$; on auroit donc l'intégrale demandée.

Ex. Soit $\frac{(z^2-z+1)\,dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{A\,dz}{1+z} + \frac{(Bz+C)\,dz}{1+zz}$; on trouvera $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, ce qui change la fraction en celles-ci ... $\frac{1}{2}\frac{dz}{1+z} - \frac{1}{2}\frac{z\,dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\frac{dz}{1+zz}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}l(1+z) - \frac{1}{4}l(1+zz) - \frac{1}{2}$ *Arc tang* $z + C$.

Soit encore $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$ qui se réduit à $\frac{dx}{x} - \frac{(2x+3)\,dx}{(1+x)^2} + \frac{x\,dx}{1+x+xx}$. Pour intégrer cette derniere quantité, je fais $x = z - \frac{1}{2}$, & elle devient $\frac{(z-\frac{1}{2})\,dz}{zz+\frac{3}{4}} =$

$\frac{2zdz}{zz+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\frac{dz}{zz+\frac{1}{4}}$ dont l'intégrale est $\frac{1}{2}l(zz+\frac{1}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}}$ *Arc tang* $\frac{2z}{\sqrt{3}}$. Substituant donc la valeur de z, j'ai pour l'intégrale entiere,

$$lx - 2l(1+x) + \frac{1}{2}l(1+x+xx) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,Arc\,tang\,\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C.$$

866. Le dernier cas qui nous reste à traiter est celui où le dénominateur Q auroit un ou plusieurs facteurs de cette forme. . . . . $(xx+ax+b)^m$. Alors on supposera que la fraction partielle provenue de ce facteur est $dx\,\frac{(Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+\&c+R)}{(xx+ax+b)^m}$, & on déterminera les coefficients A, B, &c, comme ci-dessus. Ensuite, faisant $x = z - \frac{1}{2}a$, & substituant, la fraction deviendra de cette forme, $\frac{A'z^{2m-1}+B'z^{2m-2}+\&c\ldots.+R'}{(zz+b'b')^m}dz$, que l'on peut décomposer ainsi, $\frac{A'z^{2m-1}}{(zz+b'b')^m}dz + \frac{B'z^{2m-2}}{(zz+b'b')^m}dz + \&c.$ Or les termes où le numérateur a une puissance impaire, sont intégrables, en partie algébriquement, & en partie par logarithmes (854); & ceux où z dans le numérateur a une puissance paire, étant de la forme $\frac{Mz^{2k}dz}{(zz+b'b')^m}$, peuvent se ramener (861) à $\frac{dz}{zz+b'b'}$, c'est-à-dire, qu'on peut les intégrer, en partie algébriquement, & en partie par arcs de cercle; on aura donc par ce moyen l'intégrale de la fraction proposée.

867. Pour éclaircir ces différentes méthodes, voici un exemple qui les comprend toutes.

Soit la fraction $\frac{dx}{(1+x)xx(xx+2)(xx+1)^2} = \frac{Adx}{1+x} + \frac{(Bx+C)dx}{xx} + \frac{(Dx+E)dx}{xx+2} + \frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(xx+1)^2}$,

On trouvera, en réduisant au même dénominateur $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{6}$, $E = -\frac{1}{6}$, $F = \frac{1}{4}$, $G = -\frac{1}{4}$, $H = \frac{1}{4}$,

$I = -\frac{1}{4}$, & la fraction proposée $= \frac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)\,dx}{xx} + \frac{1}{6}\cdot\frac{(x-1)\,dx}{xx+2} + \frac{(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4})\,dx}{(xx+1)^2}$. Or $\int\frac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{12}l(1+x)\ldots\int\frac{1}{2}\frac{(1-x)\,dx}{xx} = \frac{1}{2}l\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\ldots\int\frac{1}{6}\frac{x\,dx - dx}{xx+2} = \frac{1}{12}\int\frac{2x\,dx}{xx+2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}xx+1} = \frac{1}{12}l(xx+2) - \frac{1}{6\sqrt{2}}$ *Arc tang* $\frac{x}{\sqrt{2}}\ldots\int\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3\,dx}{(xx+1)^2} = \frac{1}{8}l(xx+1) + \frac{1}{8(xx+1)}$; $\int\frac{3}{4}\cdot\frac{x\,dx}{(xx+1)^2} = -\frac{3}{8(xx+1)}$. Pour intégrer $-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2\,dx}{(xx+1)^2}$; $-\frac{5}{4}\cdot\frac{dx}{(1+xx)^2}$, il faut se proposer de ramener $\int\frac{dx}{1+xx}$ à la premiere, & on aura (861) $\int\frac{dx}{1+xx} = \frac{x}{1+xx} + 2\int x^2\,dx\,(1+xx)^{-2}$.

Donc $\int x^2\,dx\,(1+xx)^{-2} = -\frac{\frac{1}{2}x}{1+xx} + \frac{1}{2}$ *Arc tang* x. Or $\int x^2\,dx\,(1+xx)^{-2} = -x\,(1+xx)^{-1} + \int dx\,(1+xx)^{-2}$. Donc $\int dx\,(1+xx)^{-2} = x\,(1+xx)^{-1} + \int x^2\,dx\,(1+xx)^{-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{1+xx} + \frac{1}{2}$ *Arc tang* x. Réunissant donc toutes ces intégrales, on a pour celle de la fraction proposée $\ldots\int\frac{dx}{(1+x)xx(xx+2)(xx+1)^2} = \frac{1}{12}l(1+x) + \frac{1}{12}l(xx+2) + \frac{1}{8}l(xx+1) + \frac{1}{2}l\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{\frac{1}{4}(x+1)}{1+xx} - \frac{1}{2}$ *Arc tang* $x - \frac{1}{6\sqrt{2}}$ *Arc tang* $\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

868. Il suit de ce qui précéde que toute différentielle fractionaire & rationelle est intégrable, ou algébriquement, ou par logarithmes, ou par arcs de cercle. La seule difficulté consiste à trouver les facteurs du dénominateur Q. Mais c'est plutôt un défaut de l'Algébre ordinaire, que de la méthode d'intégration que nous venons de donner.

Lorsqu'on pourra donc rendre rationelle une fraction différentielle,

on ſera ſûr d'en trouver l'intégrale ; or voici quelques cas où cette réduction eſt poſſible.

869. Soit d'abord une quantité où il n'entre point d'autres radicaux que des radicaux monomes, telle que $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+xx}{x+\sqrt[4]{x}}\right)dx$; je l'écris ainſi $\frac{x^{\frac{4}{12}}dx+x^{\frac{12}{12}}dx+xxdx}{x+x^{\frac{3}{12}}}$. Or il eſt clair que ſi je fais $x^{\frac{1}{12}}=z$, ce qui donne $x=z^{12}$, & $dx=12z^{11}dz$, la différentielle deviendra rationelle, & par conſéquent intégrable.

Soit maintenant X une fonction rationelle de x ; pour trouver l'intégrale de $dy=Xdx\sqrt{(a+bx+cxx)}$, je cherche les deux facteurs de $a+bx+cxx$; s'ils ſont réels, j'ai $\sqrt{(a+bx+cxx)}=\sqrt{(m+nx)(p+qx)}$. Je ſuppoſe cette quantité $=(m+nx)z$, & en élevant au quarré, j'ai $p+qx=(m+nx)zz$, d'où je tire $x=\frac{p-mzz}{nzz-q}$ . . . . $dx=\frac{2zdz(mq-pn)}{(nzz-q)^2}$ . . . . . $(m+nx)z=\frac{(pn-mq)z}{nzz-q}=\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Or ces valeurs étant ſubſtituées dans la formule $Xdx\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ la rendront rationelle, & par conſéquent intégrable. On voit que la même choſe auroit lieu, ſi on avoit à intégrer $dy=\frac{Xdx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$.

Ex. Soit $dy=dx\sqrt{(aa-xx)}$, on fera $\sqrt{(aa-xx)}=(a-x)z$, donc $x=\frac{-a+az^2}{1+zz}$ . . . $dx=\frac{4azdz}{(1+zz)^2}$ . . . $(a-x)z=\frac{2az}{1+zz}=$ . . . $\sqrt{(aa-xx)}$ . . . $dy=\frac{8a^2z^2dz}{(1+zz)^3}$, quantité rationelle & facile à intégrer.

Soit encore $dy=\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$; en faiſant $\sqrt{(xx-aa)}=(x-a)z$, on aura $dy=\frac{-2dz}{z^2-1}$ . . . $y=l\frac{c(z+1)}{z-1}=l\frac{c}{a}(x+\sqrt{(xx-aa)})$.

870. Lorſque les facteurs de $a+bx+cx^2$ ſont imaginaires, il faut faire évanouir le ſecond terme de cette quantité en ſuppoſant $x+$

$\frac{b}{2c} = \zeta$, & alors $X dx \sqrt{(a + bx + cxx)}$ devient de cette forme ... $Z d\zeta \sqrt{(\zeta\zeta + b'b')}$. Soit donc $\sqrt{(\zeta\zeta + b'b')} = \zeta + u$, on aura $\frac{b'b' - uu}{2u} = \zeta \ldots \sqrt{(\zeta\zeta + b'b')} = \zeta + u = \frac{b'b' + uu}{2u} \ldots d\zeta = -\frac{du}{2uu}(b'b' + uu)$; ces valeurs étant substituées dans la formule .. $\frac{Z d\zeta}{\sqrt{(\zeta\zeta + b'b')}}$; ou $Z d\zeta \times \sqrt{(\zeta\zeta + b'b')}$, la rendront rationelle.

Soit, par exemple, $dy = dx\sqrt{(xx + aa)}$; en faisant $\sqrt{(xx + aa)} = x + \zeta$, on aura $dy = x dx + \zeta dx$; or $dx = -\frac{d\zeta}{2\zeta\zeta}(aa + \zeta\zeta)$. Donc $dy = x dx - \frac{aa}{2}\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\zeta d\zeta}{2}$, & $y = C + \frac{1}{2}xx - \frac{aa}{2} l \zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 = C - \frac{1}{4}aa + \frac{x}{2}\sqrt{(xx + aa)} + \frac{1}{2}aa l(x + \sqrt{xx + aa}) - aa la$; soit donc $C - \frac{1}{4}aa - aa la = C'$, on aura $y = C' + \frac{x}{2}\sqrt{(xx + aa)} + \frac{1}{2}aa l(x + \sqrt{xx + aa})$.

871. On peut appliquer la même méthode au premier cas où $a + bx + cx^2$ a deux facteurs réels; car en faisant évanouir le second terme, on aura à intégrer $d\zeta\sqrt{(\zeta\zeta - bb)}$, ou $d\zeta\sqrt{(bb - \zeta\zeta)}$. Or si on suppose $\sqrt{(\zeta\zeta - bb)} = \zeta - u$, ou $\sqrt{(bb - \zeta\zeta)} = b - u\zeta$, on rendra rationelles l'une & l'autre différentielles.

Méthodes pour intégrer par Séries.

872. LORSQU'UNE différentielle n'est pas susceptible d'une intégration exacte, on a recours aux approximations, & les séries sont alors une des dernieres ressources. On voit bien, en effet, qu'en réduisant en série une fonction X de la variable x, on aura une suite de termes monomes dont les intégrales réunies donneront une valeur approchée de $\int X dx$.

Par exemple, on sait que l'intégrale de $\frac{dx}{a + x}$ est $l(a + x)$, & que $\frac{dx}{a + x} = \frac{dx}{a} - \frac{x dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} - \&c.$ Donc $\int \frac{dx}{a + x}$ ou $l(a + x)$

$= \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ &c. $+$ C. Mais ſi on fait $x = 0$, la conſtante C $= la$; on aura donc $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ &c, & par conſéquent $l(a-x) = la - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \text{&c}\right)$.

Suppoſons maintenant $\frac{x}{a} = \frac{z}{a+z}$, ou $x = \frac{az}{a+z}$, & nous aurons $l(a-x) = 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \frac{z^2}{2(a+z)^2} -$ &c; donc $l(a+z) = la + \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} +$ &c, ſérie d'autant plus convergente que z ſera plus petit que a. Par exemple, $l\,100 = l(99+1) = l\,99 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2(100)^2} +$ &c $= 4{,}605\,17018$; & $l\,11 = l(10+1) = l\,10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2 \cdot 11^2} +$ &c $= 2{,}397$ &c.

Si on a $dy = \frac{dx}{1+xx}$, alors $y = Arc\ tang.\ x$; mais $\frac{dx}{1+xx}$ étant réduit en ſérie, donne $dy = dx - x^2\,dx + x^4\,dx - x^6\,dx +$ &c; donc y ou $Arc\ tang\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ &c.

Soit à préſent y un arc quelconque, x ſon ſinus, ou $y = Arc\ ſinus\ x$, on aura $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \text{&c}\right)$. Donc y, ou $Arc\ ſin\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} +$ &c, intégrale à laquelle il n'y a pas de conſtante à ajouter; ſoit $x = 1$, & la demi-circonférence $= \pi$, on aura $\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} +$ &c.

Si $x = \frac{1}{2}$, l'arc y devient $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} +$ &c.

873. Ces exemples suffisent pour faire entendre la méthode précédente. Celle qui suit, est digne d'attention.

La formule $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, donne $xy = \int x\,dy + \int y\,dx$; Donc, en général, $\int x\,dy = xy - \int y\,dx$, & si on désigne par X une fonction quelconque de x, on aura pareillement $\int X\,dx = Xx - \int x\,dX$. Je suppose $dX = X^{I}\,dx$; donc par le même principe, $\int x\,dX$, ou $\int X^{I}\,x\,dx = \frac{X^{I}\,xx}{2} - \frac{\int x\,x\,dX^{I}}{2}$.

Soit maintenant $dX^{I} = X^{II}\,dx$ on aura . . . . . $\int \frac{x\,x\,dX^{I}}{2} = \frac{x^{3}}{2\cdot 3}X^{II} - \int \frac{x^{3}}{2\cdot 3}\,dX^{II}$, &c. Substituant ces différentes valeurs dans la premiere expression, on trouve . . . $\int X\,dx = Xx - \frac{x^{2}}{2}X^{I} + \frac{x^{3}}{2\cdot 3}X^{II} - \frac{x^{4}}{2\cdot 3\cdot 4}X^{III} + \frac{x^{5}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}X^{IV} -$ &c, ou bien en supposant dx constante, $\int X\,dx = Xx - \frac{x^{2}\,dX}{2\cdot dx} + \frac{x^{3}\,d\,dX}{2\cdot 3\cdot dx^{2}} - \frac{x^{4}\,d\,d\,dX}{2\cdot 3\cdot 4\cdot dx^{3}} +$ &c.

Ex. Soit $X = \frac{1}{a+x}$, on aura $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^{2}}$, $\frac{d\,dX}{dx^{2}} = \frac{2}{(a+x)^{3}}$, $\frac{d\,d\,dX}{dx^{3}} = \frac{-2\cdot 3}{(a+x)^{4}}$, &c. Donc $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^{2}}{2(a+x)^{2}} + \frac{x^{3}}{3(a+x)^{3}} +$ &c. . . . . $+ C$, ou bien $l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{xx}{2(a+x)^{2}} + \frac{x^{3}}{3(a+x)^{3}} +$ &c, comme nous l'avons déja trouvé.

874. Soit maintenant $dy = m(a+x)^{m-1}\,dx$, dont l'intégrale est $y = (a+x)^{m}$; on aura $X = m(a+x)^{m-1}$, $\frac{dX}{dx} = m\cdot(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{d\,dX}{dx^{2}} = m\cdot m-1\cdot m-2\cdot(a+x)^{m-3}$, &c. Donc y, ou $(a+x)^{m} = C + mx(a+x)^{m-1} - \frac{m\cdot m-1}{2}x^{2}(a+x)^{m-2} + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{2\cdot 3}x^{3}(a+x)^{m-3} -$ &c. Soit

$x = o$, on aura $C = a^m$, & $(a+x)^m = a^m + m a (a+x)^{m-1} - \frac{m.m-1}{2} x^2 (a+x)^{m-2} +$ &c. Faiſons $a+x = z$, nous aurons $z^m = (z-x)^m + m x z^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} x^2 z^{m-2} +$ &c; donc $(z-x)^m = z^m - m x z^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} x^2 z^{m-2} -$ &c.... $(z+x)^m = z^m + m x z^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} x^2 z^{m-2} +$ &c.... $\frac{(z+x)^m}{z^m} = 1 + m.\frac{x}{z} + \frac{m.m-1}{2}.\frac{x^2}{z^2} +$ &c.... & $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}} = \frac{z^m}{(z+x)^m} = 1 - m.\frac{x}{z} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{z^2} - \frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{z^3} +$ &c. Maintenant ſi $z+x = b$, on aura $(b-x)^m = b^m (1 - \frac{mx}{b-x} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b-x)^2} -$ &c), & $(b+x)^m = b^m (1 + \frac{mx}{b+x} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b+x)^2} + \frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{(b+x)^3} +$ &c).

875. Pour trouver la valeur de $y = a^x$, je différentie, & j'ai $dy = a^x dx la$ (796). Donc $X = a^x la$, $\frac{dX}{dx} = a^x l^2 a$, $\frac{ddX}{dx^2} = a^x l^3 a$, &c. ce qui donne y, ou $a^x = C + a^x x la - \frac{x x l^2 a}{2} a^x + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} a^x -$ &c. Soit $x = o$, on aura $C = 1$, & $a^x = 1 + x la.a^x + \frac{x x l^2 a}{2} a^x +$ &c; diviſant par a^x, il viendra $1 = a^{-x} + x la - \frac{x x l^2 a}{2} +$ &c. Donc $a^{-x} = 1 - x la + \frac{x^2 l^2 a}{2} -$ &c; & par conſéquent en ſuppoſant x poſitive, ſes puiſſances impaires doivent changer de ſigne, ce qui rend la ſérie toute poſitive... $a^x = 1 + xla + \frac{x x l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} +$ &c, comme on le ſait d'ailleurs.

876. Soit maintenant y un arc quelconque, x ſa tangente, ou

aura $dy = \frac{dx}{1+xx}$; mais comme en faiſant $X = \frac{1}{1+xx}$, on trouveroit une ſérie trop compliquée pour la valeur de l'arc y, on pourra modifier ainſi la méthode précédente.

D'abord il eſt clair que $y = \frac{x}{1+xx} - \int x\, d\left(\frac{1}{1+xx}\right) = \frac{x}{1+xx} + \int \frac{2x^2\, dx}{(1+xx)^2}$. Il eſt clair enſuite que $\int \frac{2x^2\, dx}{(1+xx)^2} = \frac{\frac{2}{3}x^3}{(1+xx)^2} + \int \frac{2.4.x^4\, dx}{3(1+xx)^3}$. De même $\int \frac{2.4.x^4\, dx}{3(1+xx)^3} = \ldots \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} + \int \frac{2.4.6\,x^6\, dx}{3.5(1+xx)^4}$, &c. Donc *Arc tang* $x = \frac{x}{1+xx} + \frac{2x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} + \frac{2.4.6.x^7}{3.5.7(1+xx)^4}$ + &c. Donc en général, $y = \cos y\,(\sin y + \frac{2}{3}\sin^3 y + \frac{2.4}{3.5}\sin^5 y + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7 y +$ &c.$) = \ldots \frac{\sin 2y}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\sin^2 y + \frac{2.4}{3.5}\sin^4 y + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^6 y +\right.$ &c$\left.\right)$. Si $y = 45°$, on aura . . . . . .

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} + \text{\&c}\right).$$

De l'intégration des différentielles Logarithmiques & Exponentielles.

877. POUR intégrer la différentielle logarithmique $X\,dx\,lx$, en ſuppoſant X une fonction quelconque de x, ſoit $y = lx$, & $dz = X\,dx$, on aura $\int X\,dx\,lx = \int y\,dz = yz - \int z\,dy = lx \int X\,dx - \int z\,\frac{dx}{x}$. Donc l'intégrale de la quantité propoſée ſe réduit à celle de $X\,dx$, & de $\frac{dx}{x}\int X\,dx$. On pourra donc la trouver par les regles précédentes, ſi $\int X\,dx$ ne contient pas de tranſcendante.

EXEMPLES. Soit $X = x^n$; on aura $\int X\,dx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, &

$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. Donc $\int x^n\, dx\, lx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}(lx - \frac{1}{n+1})$; intégrale qui n'eſt ſujette à d'autre exception qu'à celle du cas où $n = -1$. Mais alors on a $\int \frac{dx}{x}\, lx = \int lx\, d\, lx = \frac{1}{2} l^2 x$.

Soit encore $X = \frac{1}{(1-x)^2}$, on aura $\int X\, dx = \frac{1}{1-x}$, $\int \frac{X\, dx}{x}$ $= \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{1-x} = lx - l(1-x)$. Donc $\int \frac{dx\, lx}{(1-x)^2} = \frac{lx}{1-x} - lx + l(1-x) = \frac{x\, lx}{1-x} + l(1-x)$.

878. Si X eſt toujours une fonction de x, & qu'il s'agiſſe d'intégrer $d\, X\, l^n x$, on mettra cette expreſſion ſous la forme $\int d\, X\, l^n x = X\, l^n x - n \int \frac{X\, dx}{x}\, l^{n-1} x$; & ſuppoſant enſuite $\int \frac{X\, dx}{x} = X^I$, on aura par la même formule, $\int d\, X^I\, l^{n-1} x = X^I\, l^{n-1} x - (n-1) \int \frac{X^I\, dx}{x}\, l^{n-2} x$. Si on fait $\int \frac{X^I\, dx}{x} = X^{II}$, on aura $\int d\, X^{II}\, l^{n-2} x$ $= X^{II}\, l^{n-2} x - (n-2) \int \frac{X^{II}\, dx}{x}\, l^{n-3} x$, &c. Donc $\int d\, X\, l^n x = X\, l^n x - n\, X^I\, l^{n-1} x + n.n-1.\, X^{II}\, l^{n-2} x - n.n-1.n-2.\, X^{III}\, l^{n-3} x +$ &c; expreſſion qui ne dépend que de l'intégration de quantités algébriques, & qui n'aura qu'un nombre fini de termes, lorſque n ſera entier & poſitif.

Soit, par exemple, $d\, X = x^m\, d\, x$, on aura $X = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int \frac{X\, dx}{x} = X_I = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, $\int \frac{X^I\, dx}{x} = X^{II} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, X^{III} $= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$, &c. Donc $\int x^m\, d\, x\, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} (l^n x - \frac{n}{m+1}$ $l^{n-1} x + \frac{n.n-1}{(m+1)^2} l^{n-2} x - \frac{n.n-1.n-2}{(m+1)^3} l^{n-3} x +$ &c). Le ſeul cas qui échappe à la formule générale eſt celui où $m = -1$, & alors on a $\int \frac{dx}{x}\, l^n x = \frac{l^{n+1} x}{n+1}$.

879. Cette formule générale s'applique également au cas où n eſt négatif. Mais comme on a alors pour intégrale une ſérie infinie, voici un autre moyen d'intégrer.

Propoſons-nous la quantité $\frac{X\,dx}{(lx)^n}$, qui étant miſe ſous cette forme, $X x \cdot \frac{dlx}{(lx)^n}$, donne $\int \frac{X\,dx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1)\,l^{n-1}x} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{l^{n-1}x}\,d(Xx)$. Faiſant maintenant $d(Xx) = X^I\,dx$, $dX^I x = X^{II}\,dx$, $dX^{II}x = X^{III}\,dx$, &c, nous aurons $\int \frac{X\,dx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1)\,l^{n-1}x} - \frac{X^I x}{(n-1)(n-2)\,l^{n-2}x} - \frac{X^{II}x}{(n-1)(n-2)(n-3)\,l^{n-3}x}$ — &c, juſqu'à un terme de la forme $\frac{A}{n-1.n-2.n-3....2.1}\int \frac{X\,dx}{lx}$, dont l'intégration, ſi elle eſt poſſible, donnera celle de la formule propoſée.

Soit par exemple $X = x^m$, nous aurons $X^I = x^m\,(m+1)$, $X^{II} = (m+1)^2\,x^m$, $X^{III} = (m+1)^3\,x^m$, &c. Donc..... $\int \frac{x^m\,dx}{l^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\,l^n x}\left(lx + \frac{m+1}{n-2}\,l^2 x + \frac{(m+1)^2}{n-2.n-3}\,l^3 x + \frac{(m+1)^3}{n-2.n-3.n-4}\,l^4 x + \&c\right) + \frac{(m+1)^{n-2}}{n-1.n-2....1}\int \frac{x^m\,dx}{lx}$; l'intégrale propoſée ſe réduit donc à celle de $\frac{x^m\,dx}{lx}$. Or ſi on fait $x^{m+1} = u$, cette quantité deviendra $\frac{du}{lu}$, différentielle qu'on n'a pas encore pu intégrer. C'eſt pourquoi on ne peut avoir l'intégrale de $\frac{x^m\,dx}{l^n x}$ que par ſéries, excepté dans le cas où $m = -1$; car alors on trouve par la ſérie précédente, & ſans ſon ſecours, $\int \frac{dx}{x\,l^n x} = \frac{1}{1-n}\,l^{1-n}x$.

880. Soit maintenant la formule exponentielle $a^x X\,dx$ qu'il s'agiſſe

d'intégrer. J'observe d'abord que $a^x\,dx\,la = d(a^x)$; donc $\int a^x\,dx = \frac{1}{la}.a^x$, & puisque $\int a^x X\,dx = X\int a^x\,dx - \int dX \int a^x\,dx$, on a $\int a^x X\,dx = \frac{a^x X}{la} - \frac{1}{la}\int a^x\,dX$. Soit $dX = X^I\,dx$, on aura $\int a^x\,dX = \int a^x X^I\,dx = \frac{a^x X^I}{la} - \frac{1}{la}\int a^x\,dX^I$; soit $dX^I = X^{II}\,dx$, & on aura $\int a^x\,dX^I = \frac{a^x X^{II}}{la} - \frac{1}{la}\int a^x\,dX^{II}$, &c. Donc $\int a^x X\,dx = \frac{1}{la}\,a^x X - \frac{1}{l^2 a}\,a^x X^I + \frac{1}{l^3 a}\,a^x X^{II} -$ &c, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale $\int a^x\,dx'$, qui sera au moins la plus simple des intégrales transcendantes de son espéce, si elle n'est pas susceptible d'une intégration exacte.

881. Remarquons que si e est le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\int e^x X\,dx = e^x X - e^x X^I + e^x X^{II} - e^x X^{III} + e^x X^{IV} - e^x X^V +$ &c. Soit, par exemple, $X = x^n$, on aura $X^I = n x^{n-1}$, $X^{II} = n.n-1.x^{n-2}$, $X^{III} = n.n-1.n-2.x^{n-3}$, &c. Donc $\int a^x x^n\,dx = \frac{a^x}{la}\left(x^n - \frac{n x^{n-1}}{la} + \frac{n.n-1}{(la)^2}\,x^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{(la)^3}\,x^{n-3} +\right.$ &c), & par conséquent $\int e^x x^n\,dx = e^x (x^n - n x^{n-1} + n.n-1.x^{n-2} - n.n-1.n-2.x^{n-3} +$ &c).

882. Pour trouver l'intégrale de $\frac{a^x\,dx}{x}$, comme les regles précédentes deviennent inutiles, je réduis en série, & j'ai $\frac{a^x\,dx}{x} = \frac{dx}{x}\left(1 + x\,la + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} +\right.$ &c.) $= \frac{dx}{x} + dx\,la + \frac{x\,dx}{2}\,l^2 a +$ &c. Donc $\int \frac{a^x\,dx}{x} = C + lx + x\,la + \frac{1}{2}.\frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{1}{3}.\frac{x^3 l^3 a}{2.3} +$ &c, & $\int \frac{e^x\,dx}{x} = C + lx + x + \frac{1}{2}.\frac{xx}{2} + \frac{1}{3}.\frac{x^3}{2.3} +$ &c. Soit $e^x = z$, on aura $\frac{e^x\,dx}{x} = \frac{dz}{lz}$ différentielle d'une quantité transcendante qui est égale à la série infinie

$C + l.lz + lz + \frac{1}{2}\frac{l^2 z}{2} + \frac{1}{3}\frac{l^3 z}{2.3}$ + &c. Puisqu'on a $\int \frac{dz}{lz} = z\,llz - \int dz\,llz$, il est clair que $\int dz\,llz = z\,llz - \int \frac{dz}{lz}$, intégrale qui dépend encore de la quantité transcendante $\int \frac{dz}{lz}$.

883. Lorsque les regles précédentes ne pourront pas s'appliquer à l'intégration d'une quantité exponentielle, on la réduira en séries par la formule $a^x = 1 + x\,l\,a + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \frac{x^4 l^4 a}{2.3.4}$ + &c, & il sera facile d'intégrer.

Soit $dy = x^m x\,dx$; on aura par les séries, $dy = dx\,(1 + m\,x\,lx + \frac{m^2 x^2 l^2 x}{2} + \frac{m^3 x^3 l^3 x}{2.3}$ + &c$) = dx + m\,x\,dx\,lx + \frac{m^2}{2} x^2\,dx\,l^2 x$ + &c, dont l'intégrale se trouve par celle de $x^m\,dx\,l^n x$ (878), & on a $\int x^m x\,dx = x\,(1 - \frac{m\,x}{2^2} + \frac{m^2 x^2}{3^2} - \frac{m^3 x^3}{4^4}$ + &c$) + m\,x^2\,lx\,(\frac{1}{2} - \frac{m\,x}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} -$ &c$) + \frac{m^2 x^3 l^2 x}{2}\,(\frac{1}{3} - \frac{m\,x}{4^2} + \frac{m^2 x^2}{5^3} -$ &c$)$ + &c, qui dans le cas particulier de $x = 1$ se réduit à la série convergente $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^2} - \frac{m^3}{4^4}$ + &c. Cet exemple suffit pour faire voir comment on peut intégrer ces sortes de quantités par séries.

De l'Intégration des Quantités différentielles où il entre des Sinus, des Cosinus, &c.

884. Puisque $dx\,cos\,x = d\,sin\,x$, & que $-dx\,sin\,x = d\,cos\,x$, il est évident que $\int dx\,cos\,x = sin\,x$, que $\int dx\,sin\,x = -cos\,x$, que $\int dy\,cos\,ny = \frac{1}{n}\int n\,dy\,cos\,ny = \frac{1}{n}\,sin\,ny$, & que $\int dy\,sin\,ny = -\frac{1}{n}\,cos\,ny$. Il est clair aussi que $\int dz\,cos\,z\,(sin\,z)^n$

$= \int (\sin z)^n \, d \sin z = \frac{1}{n+1} (\sin z)^{n+1}$, & que $\int (dz \sin z) \cos^n z = -\frac{1}{n+1} (\cos z)^{n+1}$. De même, si on avoit à intégrer $dy \sin y \cos ay$, on feroit $\sin y \cos ay = \frac{1}{2} \sin (a+1)y - \frac{1}{2} \sin (a-1)y$, & l'intégrale deviendroit $-\frac{1}{2(a+1)} \cos(a+1)y + \frac{1}{2(a-1)} \cos(a-1)y$.

885. Il en seroit de même pour $dx \sin x \sin ax$, pour $dx \cos x \cos ax$, &c. On traiteroit avec la même facilité $dx \sin x \sin ax \cos bx$, &c, en réduisant ces produits à des sinus ou à des cosinus simples, par le moyen des valeurs de $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$, &c. On pourroit donc intégrer par cette méthode, $dx \sin^2 x$, $dx \sin^3 x$, $dx \cos^2 x$, &c: mais il est plus simple de les intégrer de la maniere suivante.

886. La formule $dx \sin^n x = dx \sin x \cdot \sin^{n-1} x$. On a donc $\int dx \sin^n x = \sin^{n-1} x \int dx \sin x - \int [d(\sin^{n-1} x) \cdot \int dx \sin x] = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x \cos^2 x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x - (n-1) \int dx \sin^n x$; & en transposant, $\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int dx \sin^{n-2} x$. On a donc aussi $\int dx \sin^{n-2} x = -\frac{1}{n-2} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-3}{n-2} \int dx \sin^{n-4} x$; & par conséquent $\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n \cdot n-2} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-1 \cdot n-3}{n \cdot n-2} \int dx \sin^{n-4} x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n \cdot n-2} \cos x \sin^{n-3} x - \frac{n-1 \cdot n-3}{n \cdot n-2 \cdot n-4} \cos x \sin^{n-5} x - \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5}{n \cdot n-2 \cdot n-4 \cdot n-6} \cos x \sin^{n-7} x$ — &c .... $- \frac{n-1 \cdot n-3 \ldots\ldots 2}{n \cdot n-2 \cdot n-4 \ldots\ldots 1} \cos x$; formule qui n'a lieu que dans les cas où n est impair, & alors l'intégrale ne dépend que des quantités $\cos x$, $\sin x$. Mais lorsqu'il est pair, au lieu du dernier

terme de la série, qui seroit de cette forme $-\frac{n-1.n-3\ldots 1}{n.n-2\ldots\ldots 0}\frac{\cos x}{\sin x}$, on auroit $+\frac{n-1.n-3\ldots\ldots 1}{2.4\ldots\ldots n-2.n}\int dx \sin^{n-n} x = +\frac{n-1.n-3\ldots\ldots 1}{2.4\ldots\ldots n}x$. L'intégrale seroit donc alors $\ldots\ldots -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n.n-2}\cos x \sin^{n-3} x$ — &c. $\ldots\ldots + \frac{n-1.n-3\ldots 1}{2.4\ldots\ldots n}x$.

Ex. $\int dx \sin^5 x = -\frac{1}{5}\cos x \sin^4 x - \frac{4}{5.3}\cos x \sin^2 x - \frac{4.2}{5.3}\cos x$; & $\int dx \sin^6 x = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{6.4}\sin^3 x \cos x - \frac{5.3}{6.4.2}\sin x \cos x + \frac{5.3.1}{2.4.6}x$.

887. Faisons $x = 90° - z$, nous aurons $dx = -dz \ldots \sin x = \cos z$, & $\int dz \cos^n z = \frac{1}{n}\sin z \cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n.n-2}\sin z \cos^{n-3} z + \ldots\ldots \frac{n-1.n-3}{n.n-2.n-4}\sin z \cos^{n-5} z + \frac{n-1.n-3.n-5}{n.n-2.n-4.n-6}\sin z \cos^{n-7} z + \ldots + \frac{n-1.n-3.n-5\ldots 2}{n.n-2.n-4\ldots\ldots 1}\sin z$, si n est impair ; & s'il est pair, le dernier terme $= + \frac{n-1.n-3\ldots\ldots 1}{n.n-2\ldots\ldots 2}z$. Par exemple, $\int dy \cos^5 y = \frac{1}{5}\sin y \cos^4 y + \frac{4}{5.3}\sin y \cos^2 y + \frac{4.2}{5.3.1}\sin y$, & $\int dy \cos^6 y = \frac{1}{6}\sin y \cos^5 y + \frac{5}{6.4}\sin y \cos^3 y + \frac{5.3}{6.4.2}\sin y \cos y + \frac{5.3.1}{6.4.2}y$.

888. Soit maintenant à intégrer $dy \sin^m y \cos^n y$; puisque $d(\sin^p y \cos^q y) = p \cos^{q+1} y \sin^{p-1} y . dy - q \cos^{q-1} y \sin^{p+1} y . dy$, on a $\int dy \sin^{p-1} y \cos^{q+1} y = \frac{1}{p}\sin^p y \cos^q y + \frac{q}{p}\int dy$

$cof^{n-1} y \, fin^{m+1} y$. Donc $\int dy \, fin^m y \, cof^n y = \frac{1}{m+1} fin^{m+1} y \, cof^{n-1} y + \frac{n-1}{m+1} \int dy \, cof^{n-2} y \, fin^{m+2} y$. Subſtituant $1 - cof^2 y$ à la place de $fin^2 y$, & tranſpoſant, on a $\int dy \, fin^m y \, cof^n y = \frac{1}{m+n} fin^{m+1} y \, cof^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n} \int dy \, fin^m y \, cof^{n-2} y = \frac{1}{m+n} fin^{m+1} y \, cof^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n \,.\, m+n-2} fin^{m+1} y \, cof^{n-3} y + \ldots \frac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, fin^{m+1} y \, cof^{n-5} y}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\, m+n-4} + \&c \ldots + \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 2 \, fin^{m+1} y}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\, m+1}$, ſi n eſt impair, ou juſqu'au dernier terme $+ \ldots \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 1}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots m+2} \int dy \, fin^m y$, ſi n eſt pair.

889. Faiſons $y = 90^\circ - z$, nous aurons $\int dz \, cof^m z \, fin^n z = - \frac{1}{m+n} fin^{n-1} z \, cof^{m+1} z - \frac{n-1}{m+n \,.\, m+n-2} fin^{n-3} z \, cof^{m+1} z - \ldots \frac{n-1 \,.\, n-3 \, cof^{m+1} z \, fin^{n-5} z}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\, m+n-4} - \&c \ldots - \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 2 \, cof^{m+1} z}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots m+1}$ ſi n eſt impair, & juſqu'au terme $+ \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 1}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots m+2} \int dz \, cof^m z$, s'il eſt pair.

Par exemple, la premiere formule donne $\ldots \int dy \, cof^4 y \, fin^5 y = \frac{1}{8} fin^6 y \, (cof^2 y + \frac{1}{3}) = \frac{1}{8} fin^6 y \, (\frac{4}{3} - fin^2 y)$, & la ſeconde $\ldots\ldots \int dy \, cof^3 y \, fin^5 y = - \frac{1}{8} cof^4 y \, (fin^4 y + \frac{2}{7} fin^2 y + \frac{1}{7})$. Il faut donc que ces deux réſultats ſoient égaux, ou tout au moins qu'ils ne différent que d'une quantité conſtante. Dans le cas préſent, cette quantité eſt $\frac{1}{24}$, en réduiſant tout en ſinus, & comparant les deux réſultats.

890. Conſidérons maintenant les fractions où il entre des ſinus; & comme les plus ſimples ſont $\frac{dy}{fin y} \ldots \frac{dy}{cof y} \ldots \frac{dy \, cof y}{fin y} \ldots \ldots \frac{dy \, fin y}{cof y}$; commençons par les intégrer.

La

La premiere, $\frac{dy}{\sin y} = \frac{dy \sin y}{\sin^2 y} = \frac{-d\cos y}{1-\cos^2 y} = \frac{-\frac{1}{2}d\cos y}{1+\cos y}$ $-\frac{\frac{1}{2}d\cos y}{1-\cos y}$. Donc $\int \frac{dy}{\sin y} = \frac{1}{2} l \frac{1-\cos y}{1+\cos y} = \frac{1}{2} l \tang^2 \frac{1}{2} y$ (557) $= l \tang \frac{1}{2} y$.

Pour intégrer la seconde, soit $y = 90° - z$, & on aura $dy = -dz$, $\sin y = \cos z$; donc $\int \frac{dz}{\cos z} = -l \tang (45° - \frac{1}{2} z) = -l \cot (45° + \frac{1}{2} z) = l \sang (45° + \frac{1}{2} z)$.

La troiſieme de ces fractions, $\int \frac{dy \cos y}{\sin y}$, a pour intégrale $\int \frac{d \sin y}{\sin y}$ $= l \sin y = \int dy \cot y$.

La quatrieme, $\int \frac{dy \sin y}{\cos y} = -l \cos y = l \sec y = \int dy \tang y$; de même $\int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{2\,dy}{\sin 2y} = l \tang y$.

891. Cela poſé, cherchons l'intégrale de la formule $\frac{dy}{\sin^m y}$. Nous avons déja vu (886) que $\int dy \sin^n y = -\frac{1}{n} \cos y \sin^{n-1} y + \frac{n-1}{n} \int dy \sin^{n-2} y$; faiſons donc $n - 2 = -m$, ou $n = 2 - m$, & nous aurons $\int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = \frac{1}{m-2} \cos y \sin^{1-m} y + \frac{1-m}{2-m} \int \frac{dy}{\sin^m y}$; donc $\int \frac{dy}{\sin^m y} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = -\frac{1}{m-1}$ $\frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} - \frac{m-2}{m-1 \cdot m-3} \frac{\cos y}{\sin^{m-3} y} - \frac{m-2 \cdot m-4}{m-1 \cdot m-3 \cdot m-5} \frac{\cos y}{\sin^{m-5} y}$ $-$ &c. . . . . juſqu'au terme $+ \frac{m-2 \cdot m-4 \ldots 1}{m-1 \cdot m-3 \ldots 2} \int \frac{dy}{\sin y}$, c'eſt-à-dire, $\frac{m-2 \cdot m-4 \ldots 1}{m-2 \cdot m-3 \ldots 2} l \tang \frac{1}{2} y$, ſi m eſt impair, & juſqu'à $\frac{m-2 \cdot m-4 \ldots 2}{m-1 \cdot m-3 \ldots 1} \frac{\cos y}{\sin y}$ ſi m eſt pair.

892. Suppoſons $y = 90° - z$, & la formule précédente donnera

$\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{m-1 \cdot m-3} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-3} z} +$
$\frac{m-2 \cdot m-4}{m-1 \cdot m-3 \cdot m-5} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-5} z} +$ &c. . . . . jusqu'au terme
$+ \frac{m-2 \cdot m-4 \ldots\ldots 2}{m-1 \cdot m-3 \ldots\ldots 1} \cdot \frac{\sin z}{\cos z}$, si m est pair, & jusqu'au terme $+$
$\frac{m-2 \cdot m-4 \ldots\ldots 1}{m-1 \cdot m-3 \ldots\ldots 2} \cdot \int \frac{dz}{\cos z} = \frac{m-2 \cdot m-4 \ldots\ldots 1}{m-1 \cdot m-3 \ldots\ldots 2} l \tang (45° + \frac{1}{2} z)$, si m est impair. Par exemple, $\int \frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin y}{\cos^6 y}$
$+ \frac{5}{6.4} \cdot \frac{\sin z}{\cos^4 y} + \frac{5 \cdot 3}{6.4.2} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6.4.2} l \tang (45° + \frac{1}{2} y)$.

893. Il est donc facile d'intégrer la formule $\frac{dy \cos^m y}{\sin^n y}$: car si m est un nombre impair $2k+1$, on a $\frac{dy \cos^{2k+1} y}{\sin^n y} = \frac{d(\sin y)}{\sin^n y} (1 - \sin^2 y)^k$, qui est évidemment intégrable, quel que soit n. Si m est un nombre pair $2k$, alors $\frac{dy \cos^{2k} y}{\sin^n y} = \frac{dy (1 - \sin^2 y)^k}{\sin^n y}$, expression qui étant développée s'intégrera facilement par la formule $\int \frac{dy}{\sin^m y}$.

894. Il en seroit de même pour $\frac{dy \sin^m y}{\cos^n y}$, & la formule . . . $\frac{dy}{\sin^m y \cos^n y}$ s'intégreroit par les mêmes principes; ensorte qu'il est aisé d'intégrer les différentielles où il entre des sinus & des cosinus, lorsqu'elles sont susceptibles d'intégration.

De l'Intégration des Différentielles à plusieurs Variables.

895. SOIT $P dx + Q dy$ une différentielle à deux variables, dans laquelle P & Q sont des fonctions quelconques de x & de y. Si T est son intégrale, on aura $dT = P dx + Q dy$. Donc si on ne prend la différentielle de T qu'en faisant varier y, on

aura $d^x T = Q\,dy$, & ſi on ne prend la différentielle de T qu'en faiſant varier x, on aura $d\,T = P\,dx$.

Marquant donc par $d^y T$ la différentielle de T priſe en faiſant varier y ſeul, & par $d^x T$ ſa différentielle en ne faiſant varier que x, on aura $d^y T = Q\,dy$, $d^x T = P\,dx$. Donc $d^x (d^y T) = dy\,d^x Q$, $d^y (d^x T) = dx\,d^y P$. Or il eſt clair que $d^x d^y T = d^y d^x T$. Donc $dy\,d^x Q = dx\,d^y P$, ou $\frac{d^x Q}{dx} = \frac{d^y P}{dy}$; c'eſt-à-dire, que *ſi la différentielle* $P\,dx + Q\,dy$ *peut être intégrée, la différentielle de* Q *priſe en faiſant varier* x *ſeule & diviſant par* dx, *doit être égale à la différentielle de* P *priſe en faiſant varier* y *ſeul & diviſant par* dy.

896. Cette condition ayant lieu, il ſera facile d'intégrer. Car puiſque $d^x T = P\,dx$, ſi on marque par $\int^x$ les intégrales priſes en ne conſidérant que x comme variable, on aura $T = \int^x P\,dx +$ une conſtante qui peut être une fonction Y de y comme il eſt évident. Ainſi T ou $\int (P\,dx + Q\,dy) = \int^x (P\,dx) + Y$. On a de même $T = \int (P\,dx + Q\,dy) = \int^y (Q\,dy) +$ une fonction X de x. Donc $\int^y (Q\,dy) + X = \int^x (P\,dx) + Y$, ou $\int^y Q\,dy - \int^x P\,dx = Y - X$. On fera donc dans la quantité qu'on aura pour la valeur de $\int^y (Q\,dy) - \int^x (P\,dx)$, $x = o$, & on aura Y. Si on fait $y = o$, on aura la valeur de $-X$, & par-là l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ ſera déterminée.

Soit, par exemple, la quantité $(3z^2 + 2bzy - 3y^2)\,dz + (bz^2 - 6zy + 3cy^2)\,dy$, qui eſt intégrable, parce que $\frac{d^y (3z^2 + 2bzy - 3yy)}{dy} = 2bz - 6y = \frac{d^z (bz^2 - 6zy + 3cy^2)}{dz}$.

On aura $\int^z (P\,dz) = z^3 + byz - 3y^2 z$, $\int^y (Q\,dy) = bz^2 y - 3zy^2 + cy^3$. Par conſéquent $Y - X = cy^3 - z^3$, faiſant $z = o$, on a $Y = cy^3$, & ſi on ſuppoſe $y = o$, on aura $X = z^3$. Donc l'intégrale de la différentielle propoſée eſt $z^3 + bz^2 y - 3zy^2 + cy^3 + C$.

897. On pourroit trouver la quantité Y ſans avoir beſoin de

$\int^y Q\,dy$. Car puiſque $\int (P\,dx + Q\,dy) = \int^x P\,dx + Y$, il eſt clair que ſi on différentie $\int^x (P\,dx)$ en faiſant varier y ſeul, en ſorte que le réſultat ſoit $P'\,dy$, on doit avoir $Q\,dy = P'\,dy + dY$; donc $Y = \int (Q - P')\,dy$. Ainſi dans l'exemple précédent, $\int^z P\,dz = z^3 + b z^2 y - 3 z y^2$, dont la différentielle priſe en faiſant varier y ſeul donne $P'\,dy = (b z^2 - 6 z y)\,dy$. Donc $Y = \int (Q - P')\,dy = \int 3 c y^2\,dy = c y^3$.

898. Si on a une différentielle à trois variables $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, en appellant ſon intégrale T, on aura $d^x T = P\,dx$, $d^y T = Q\,dy$, $d^z T = R\,dz$. Donc pour que la différentielle propoſée ſoit complette, ou puiſſe être intégrée, il faut qu'on ait $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$, $\frac{d^z P}{dz} = \frac{d^x R}{dx}$, $\frac{d^z Q}{dz} = \frac{d^y R}{dy}$. Ces trois conditions ayant lieu, l'intégrale ſera $\int^x P\,dx + V$, V étant une fonction des deux autres variables y & z.

899. Pour la déterminer, on différentiera $\int^x P\,dx$, en faiſant varier y & z, & on aura une quantité de cette forme, $P'\,dy + P''\,dz$; il faudra donc qu'on ait $dV + P'\,dy + P''\,dz = Q\,dy + R\,dz$, & par conſéquent $V = \int [(Q - P')\,dy + (R - P'')\,dz]$, intégrale où il n'entrera que deux variables, & qu'on aura par la méthode précédente. Il eſt clair qu'on pourroit trouver l'intégrale par le moyen de $\int^y Q\,dy$, ou par $\int^z R\,dz$, de la même maniere que par $\int^x P\,dx$.

Soit, par exemple, la quantité $(2xy^2 + 4bz^2x^3)\,dx + [\frac{y}{\sqrt{(yy+zz)}} + 3y^2 + 2yx^2]\,dy + [4z^3 + 2bx^4 z + \frac{z}{\sqrt{(yy+zz)}}]\,dz$ qui a les trois conditions néceſſaires pour être intégrable; on aura $\int^x P\,dx = y^2x^2 + bz^2x^4$, dont la différentielle, priſe en faiſant varier y & z, donne $P' = 2yx^2$, $P'' = 2bzx^4$. Donc $dV = [\frac{y}{\sqrt{(yy+zz)}} + 3y^2]\,dy + [4z^3 + \frac{z}{\sqrt{(yy+zz)}}]\,dz = 4z^3\,dz + 3y^2\,dy + \frac{y\,dy + z\,dz}{\sqrt{(yy+zz)}}$, dont l'intégrale s'apperçoit tout de

ſuite, ſans le ſecours de la méthode précédente, & on a $V=z^4+y^3+\sqrt{(yy+zz)}$. Donc celle de la différentielle propoſée eſt $z^4+y^3+\sqrt{(yy+zz)}+y^2x^2+bz^2x^4+C$. Il n'eſt pas difficile à préſent de trouver les conditions que doivent avoir les différentielles à un plus grand nombre de variables, & d'intégrer lorſque ces conditions ont lieu.

900. Cela poſé, voyons comment on integre les différences ſecondes. Soit d'abord la différentielle du ſecond ordre $P\,dd\,x+Q\,dx^2$, dans laquelle P & Q ſont des fonctions quelconques de la variable x. Si on conſidere dx comme une variable y, la différentielle propoſée ſera $P\,dy+Q\,y\,dx$. Or pour qu'elle ſoit intégrable, il faut que $\frac{d^x P}{dx}=\frac{d^y Qy}{dy}$; mais il n'entre que des x dans P, il n'y a point de y dans Q. Donc $\frac{dP}{dx}=\frac{Q\,dy}{dy}=Q$, ou $dP=Q\,dx$; condition néceſſaire pour qu'une différentielle du ſecond ordre $P\,dd\,x+Q\,dx^2$ ſoit intégrable. Si cette condition a lieu, on a $\int(P\,dd\,x+Q\,dx^2)=\int(P\,dd\,x+dx\,dP)=\int^y P\,dy=Py=P\,dx$.

Exemple. La différentielle $mx^{m-1}dd\,x+m.m-1.x^{m-2}dx^2$ eſt intégrable, parce que $dP=m.m-1.x^{m-2}dx=Q\,dx$; & l'intégrale eſt $mx^{m-1}dx$, qui étant intégrée de nouveau donne x^m+C.

901. Si dx a été ſuppoſée conſtante, la différentielle eſt $Q\,dx^2$, dont l'intégrale (à cauſe de $P=\int Q\,dx$) eſt $dx\int Q\,dx+$la conſtante $C\,dx$. Par exemple, $\int dx^2(1-xx)=dx\int(dx-xx\,dx)=dx(x-\frac{1}{3}x^3)+C\,dx$, & en intégrant de nouveau, on a $Cx+C'+\frac{1}{2}xx-\frac{1}{12}x^4$.

902. Soit une différentielle générale du ſecond ordre $P\,dd\,x+Q\,dx^2$; ſi on la différentie, on aura $P\,d^3x+(dP+2Q\,dx)\,dd\,x+dQ\,dx^2$. Donc réciproquement une différentielle générale du troiſieme ordre $R\,d^3x+S\,dx\,dd\,x+T\,dx^3$ ſera intégrable, ou réductible à une différentielle du ſecond ordre, ſi $\frac{S}{2}-\frac{dR}{2dx}=\int T\,dx$; alors l'intégrale ſera $R\,dd\,x+dx^2\int T\,dx$. Par exemple, $xx\,d^3x+2x^2\,dx\,dd\,x+(3xx-1)\,dx^3$, a la condition néceſſaire pour être intégrable, & ſon intégrale eſt $xx\,dd\,x+dx^2(x^3-x)$.

903. Si dx est constante, alors il est clair que, sans aucune condition, $\int T dx^3 = dx^2 \int T dx + C dx^2$, l'intégrale de cette différentielle est $dx \int (dx \int T dx) + C x dx + C' dx$; enfin l'intégrale de celle-ci est $\int dx \int dx \int T dx + \frac{C x x}{2} + C' x + C''$. C'est ainsi que $\int x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{m+1 . m+2 . m+3} + \frac{1}{2} C x^2 + C' x + C''$. On trouveroit de la même maniere les intégrales des différentielles plus élevées, & les conditions de leurs coefficients.

904. Considérons maintenant les différentielles du second ordre à deux variables, représentées généralement par $P dd x + Q dd y + R dx^2 + S dx dy + T dy^2$. Pour trouver les conditions des coefficients P, Q, R, &c, je prends la différentielle de $A dx + B dy$, dans laquelle A & B sont des fonctions quelconques de x & de y, & j'ai $A dd x + B dd y + dA dx + dB dy$. Or $dA = \frac{d^x A}{dx} . dx + \frac{d^y A}{dy} . dy$; on a donc $A dd x + B dd y + \frac{d^x A}{dx} . dx^2 + (\frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx}) dx dy + \frac{d^y B}{dy} . dy^2$; d'où il suit que la différentielle proposée est intégrable, toutes les fois que $R = \frac{d^x P}{dx}$, que $S = \frac{d^y P}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, & que $T = \frac{d^y Q}{dy}$.

905. Ces conditions ayant lieu, l'intégrale sera $P dx + Q dy$, & si dx a été supposée constante, l'intégrale de $Q dd y + R dx^2 + S dx dy + T dy^2$ sera $Q dy + dx \int^x R dx + C dx$, (à cause de $P = \int^x R dx$), & les conditions de cette nouvelle différentielle seront $T = \frac{d^y Q}{dy}$, $S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y \int^x R dx}{dy}$. Par exemple, $6x^2 dx dy + 6xy dx^2 + x^3 dd y$ dans laquelle dx est constante, a les conditions précédentes, & son intégrale est $x^3 dy + 3x^2 y dx + C dx$, qui en intégrant de nouveau donne $x^3 y + C x + C'$. On trouveroit de la même maniere les conditions pour un plus grand nombre de variables.

FIG.

Applications du Calcul Intégral.

LES applications du Calcul Intégral s'étendent à toutes les parties des Mathématiques : mais pour nous borner à celles qui sont purement géométriques, & qui servent de fondement aux autres, nous déterminerons les formules des quadratures & des rectifications des courbes, les solidités des corps, celles des solides de révolution, ainsi que leurs surfaces, & nous finirons par quelques usages de la méthode inverse des tangentes.

De la Quadrature des Courbes.

906. SOIT la courbe A M, son axe A P, P M l'ordonnée au point M ; pour trouver la quadrature de l'espace A M P, je mène une autre ordonnée mp, & la ligne M r parallele à P p ; alors j'ai la surface de l'espace $M m p P = MP \times Pp + M m r$: imaginons maintenant que le point m s'approche du point M, le triangle M m r diminuera de plus en plus, mais ne pourra devenir zéro que lorsque le point m tombera sur le point M ; alors M m p P s'évanouira & sera la différentielle de l'espace A M P ; P p sera dx, & on aura $d(AMP) = y\,dx$, & par conséquent A M P $= \int y\,dx + C =$ (873) $C + xy - \frac{x\,x\,dy}{2\,dx} + \frac{x^3\,dy\,dy}{2.3.dx^2} - \frac{x^4\,d^3y}{2.3.4\,dx^3} +$ &c. Donc l'espace A Q M $= \int x\,dy = C + xy - \frac{y\,y\,dx}{2\,dy} + \frac{y^3\,d^2x}{2.3.dy^2} -$ &c. 198.

907. Ex. I. Soit un quart de cercle décrit du centre A & du rayon a, on aura $y = \sqrt{(aa - xx)}$, & l'espace A Q M P $=$ $\int dx\sqrt{(aa - xx)} + C = C + ax - \frac{x^3}{2.3\,a} - \frac{1.x^5}{2.4.5\,a^2} -$ $\frac{1.3\,x^7}{2.4.6.7\,a^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9\,a^7} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{x^{11}}{11\,a^9} -$ &c. Faisons $x = 0$, nous aurons A Q M P $= 0$, & par conséquent $C = 0$. Donc A Q M P $= ax - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3\,a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5\,a^2} -$ $\frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7\,a^3} -$ &c. (712). 199.

FIG.

Ex. II. Dans l'ellipſe, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$. Donc $\int y\,dx = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5a^3} - \&c\right)$, comme nous l'avons déja trouvé (714).

Ex. III. Dans la parabole, $y\,dx = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\,dx$, & $\int y\,dx =$

198. $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$, ou l'eſpace A P M eſt les deux tiers du rectangle circonſcrit (715). L'équation aux paraboles de tous les degrés eſt $y^m = x^n a^{m-n}$; donc $m\,l\,y = n\,l\,x + (m-n)\,l\,a$; donc $\frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x}$, ou $m : n :: y\,dx : x\,dy :: \int y\,dx : \int x\,dy :: A\,M\,P : A\,M\,Q$. Par conſéquent l'eſpace A M P eſt au rectangle circonſcrit A P M Q :: $m : m + n$.

Ex. IV. Dans l'hyperbole équilatere, $xy = aa$, & $y\,dx =$

200. $\frac{aa\,dx}{x}$. Donc $\int y\,dx = aa\,l\,x + C$. Si on veut compter les eſpaces depuis l'origine A, lorſque $x = o$, l'eſpace ſera $= o$. Donc $C = -aa\,l\,o$, & l'eſpace $Q'APMN = aa\,l\,x - aa\,l\,o = \infty$.

Si $x =$ A D, alors Q' A D B N $= aa\,l\,a - aa\,l\,o$; donc $BDPM = aa\,l\,x - aa\,l\,a = aa\,l\,\frac{x}{a}$, comme on le ſavoit déja.

201. EXEMPLE V. Dans la ciſſoïde, $y = \frac{x^3}{\sqrt{ax - xx}}$, & $y\,dx = x^{\frac{3}{2}}\,dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\int y\,dx$ ou l'eſpace A K M P A $= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Or $\int dx\,(ax-xx)^{\frac{1}{2}} =$ le demi-ſegment A O N P, & ſi on ſe propoſe de ramener $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a-x)^{\frac{1}{2}}$ à $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera que la réduction eſt poſſible, & que l'on a (860), $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Donc $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int dx\,(ax-xx)^{\frac{1}{2}} - 2x\,(ax-xx)^{\frac{1}{2}}$, ou A P M K A $= 3$ A P N O A $- 4$ A N P $= 3$ A O N A $-$ A N P. Donc l'eſpace infiniment long M K A B Q eſt triple du demi-cercle générateur A N B.

202. Ex. VI. Dans la logarithmique, $y\,dx = m\,dy$, & $\int y\,dx$, ou

$ABPM = my + C$. Mais lorſque $y = 1 = AB$, l'eſpace ABMP devient nul. Donc $C = -m$, & $ABMP = m(y-1) =$ le rectangle OIQM. Si on fait $y = 0$, on aura l'eſpace infiniment long $BXYA = -m =$ le rectangle PQIT. FIG.

Ex. VII. Soit une courbe BM qui ait pour équation $y = x^x$, 203.
on aura (883) l'eſpace $ABMP = S x^x dx = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \text{&c.}\right) + x\,x\,lx\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{xx}{4^3} - \text{&c.}\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \text{&c.}\right) + \text{&c}$; & lorſque $x = AP = PM = 1$, on a l'eſpace $ABMP = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{&c}$, $= 0{,}783430497589$.

Ex. VIII. Soit la courbe des ſinus AMA'M', &c dont l'équation 204.
eſt $y = \mathit{ſin}\, x$, on aura $APM = \int dx\, \mathit{ſin}\, x = C - \mathit{coſ}\, x$. Faiſons $x = 0$, nous aurons $C = 1$, & $APM = 1 - \mathit{coſ}\, x$. Soit $x = 180° = \pi$, on aura $AMA'A = 2 =$ le double du quarré du rayon. Si on ſuppoſe $x = 2\pi = AA''$, on aura l'eſpace $AMA'A + A'M'A''A' = 0$, ce qui eſt évident, puiſque l'un eſt poſitif & l'autre négatif. En général ſi $x = 2k\pi$, l'eſpace ſera zéro, & ſi $x = (2k+1)\pi$, l'eſpace ſera $= 2$.

Si on met l'origine des x au point A, milieu de A' A', on aura 205.
$y = \mathit{coſ}\, x$. Donc l'eſpace $ABMP = \mathit{ſin}\, x$, l'eſpace $ABA'A = 1$, & $A'MBA'A = 0$, ou $= 2$, ſi on ne fait pas attention à ſes deux parties, l'une poſitive, l'autre négative.

908. Si les ordonnées partent d'un point fixe C, voici comment 206.
on peut trouver la quadrature de la courbe. On menera les deux rayons CM, Cm, & on décrira du centre C & du rayon CM l'arc Mr; alors le triangle $CMm = \frac{Mr \times CM}{2} +$ Mmr. Mais lorſque le point m eſt infiniment proche de M, l'eſpace Mmr s'évanouit, & il reſte $d(COMC) = \frac{Mr \times CM}{2}$. Soit donc $Mr = dx$, $CM = y$, on aura $COMC = \frac{1}{2}\int y\, dx + C$.

FIG. Si on nomme φ l'angle que fait CM avec une ligne fixe partant du point C, ou l'arc qui mesure cet angle dans un cercle dont le rayon est 1, on aura $Mr = y\,d\varphi$, & $COMC = \frac{1}{2}\int y y\,d\varphi + C$.

207. 909. Ex. I. Soit la conchoïde AM, son pôle P, $PM = y$, $QM = a$, $PB = b$, & l'angle $APM = \varphi$; on aura $cos\,\varphi : b :: 1 : PQ = \frac{b}{cos\,\varphi}$; & $y = \frac{b}{cos\,\varphi} \pm a$. Donc l'espace $APM = \frac{1}{2}\int \frac{b^2\,d\varphi}{cos^2\,\varphi} \pm a\,b\int \frac{d\varphi}{cos\,\varphi} + \int \frac{a^2\,d\varphi}{2} = \frac{b^2}{2}\,tang\,\varphi \pm a\,b\,l\,tang\,(45° + \frac{1}{2}\varphi) + \frac{a^2\varphi}{2}$, sans constante. Donc $\pm APM \mp PBQ$, ou $ABQM = a\,b\,l\,tang\,(45° + \frac{1}{2}\varphi) \pm \frac{a^2\,\varphi}{2}$, & $AAMM = 2\,a\,b\,l\,tang\,(45° + \frac{1}{2}\varphi)$.

201. Ex. II. Dans la cissoïde, si on fait $AM = y$, $MAB = \varphi$, $AQ = \frac{a}{cos\,\varphi}$, $AO = MQ = a\,cos\,\varphi$, & $y = \frac{a}{cos\,\varphi} - a\,cos\,\varphi = \frac{a\,sin^2\,\varphi}{cos\,\varphi}$, donc $AKMOA = \frac{1}{2}\int \frac{a^2\,d\varphi}{cos^2\,\varphi} - \int a\,a\,d\varphi + \frac{1}{2}\int a\,a\,d\varphi\,cos^2\varphi = \frac{1}{2}\,a\,a\,tang\,\varphi - a\,a\,\varphi + \frac{1}{2}\,a\,a\,(\frac{1}{2}\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{2}\,a\,a\,tang\,\varphi + \frac{1}{8}\,a\,a\,sin\,2\,\varphi - \frac{1}{4}\,a^2\,\varphi$. Donc $AKMPA = \frac{1}{4}\,a^2\varphi - \frac{1}{8}\,a^2\,sin\,2\,\varphi + \frac{1}{16}\,a^2\,sin\,4\,\varphi$, & l'espace infiniment long $MKABQ = \frac{1}{4}\,a^2\,\varphi = 3\,AONB$.

206. Ex. III. Dans la spirale d'Archimede, $AGFBN = x$, $AGFBA = c$, $CM = y$, $CA = a$, $Mr = \frac{y\,dx}{a}$, $d\,(COMC) = \frac{y^2\,dx}{2\,a}$, $x = \frac{c\,y}{a}$, $dx = \frac{c\,dy}{a}$, $COMC = \frac{c}{2\,a\,a} \cdot \frac{y^3}{3}$, sans constante. Donc l'espace $COMAC = \frac{a\,c}{2} \cdot \frac{1}{3} =$ le tiers de tout le cercle.

Remarquez qu'on ne doit pas étendre l'intégrale $\frac{1}{2}\int y\,y\,d\varphi$ au-delà de $\varphi = 360°$: car passé 360°, les triangles élémentaires $\frac{1}{2}y\,y\,d\varphi$ contiennent ceux qu'on a déja sommés.

Du reſte il ſeroit aiſé de ſuppléer à ce défaut en calculant les trapezes élémentaires compris entre deux ſpires voiſines. Le même inconvénient auroit lieu pour la formule ordinaire $\int y\,dx$, ſi pluſieurs ordonnées répondoient à la même abſciſſe. FIG. 208.

Ex. IV. Dans la ſpirale hyperbolique, $a : -dx :: y : Mr = -\frac{y\,dx}{a}$; donc $COMC = \frac{1}{2}\int \frac{-yy\,dx}{a}$. Or $xy = ab$, donc $\frac{yy\,dx}{a} = b\,dy$, & l'eſpace compris entre la courbe & deux ordonnées $= \frac{1}{2}by + C$.

De la Rectification des Courbes.

910. Si on imagine le point m infiniment proche de M, Mm ſera la différentielle de l'arc AM, & on aura $dAM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Par conſéquent $AM = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$; formule qui a lieu ſoit que les ordonnées ſoient paralleles, ſoit qu'elles partent d'un point fixe. 209.

911. Ex. I. Dans le cercle $y = \sqrt{(aa - xx)} \ldots dy^2 = \frac{x^2\,dx^2}{aa - xx}$, & $QM = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3aa} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7a^6} +$ &c; donc l'arc $MB = y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3aa} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{y^5}{5a^4} +$ &c, comme nous l'avons déja trouvé (567). 199.

Ex. II. Dans la parabole, $AM = \int dy\sqrt{(1 + \frac{4yy}{pp})} = \ldots \int \frac{2\,dy}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}pp + yy)}$. Or nous avons trouvé (870) $\int dx\sqrt{xx + aa} = C + \frac{1}{2}x\sqrt{(xx + aa)} + \frac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx + aa})$. Donc AM $= C + \frac{y}{p}\sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)} + \frac{1}{4}pl[y + \sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)}]$; faiſons 198.

FIG. $y = o$, nous aurons $C = -\frac{1}{2}p\,l\,\frac{1}{2}p$. Donc $AM = \frac{y}{p}\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)} + \frac{1}{4}p\,l\left(\frac{y+\sqrt{yy+\frac{1}{4}pp}}{\frac{1}{2}p}\right)$.

912. On peut remarquer que ſi du centre A & du demi-grand axe $BA = \frac{1}{2}p$, on décrit une hyperbole équilatere B N', l'eſpace A B N' Q ſera $\int dy\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)}$. Donc $AM \times \frac{1}{2}p = ABN'Q$; d'où il ſuit que *la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, & réciproquement.*

210. Ex. III. Dans l'ellipſe, ſi on ſuppoſe le demi-grand axe $= 1$, on aura $y = b\sqrt{(1-xx)}$, & en faiſant $\sqrt{(1-bb)}$ ou la demi-diſtance des foyers $= c$, on a $BM = \int \frac{dx\sqrt{(1-ccxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$, intégrale qu'on ne peut avoir par les regles précédentes. Il faut donc réduire en ſéries; mais pour ſimplifier, nous ne réduirons que $\sqrt{(1-ccxx)}$; alors nous aurons . . . . . .

$$BM = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\left(1 - \tfrac{1}{2}ccxx - \frac{1}{2.4}c^4x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}c^6x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}c^8x^8 - \&c.\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \tfrac{1}{2}cc\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{2.4}c^4\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1.3}{2.4.6}c^6\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \&c.$$

Or (858) $\int x^{2i}\,dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^{2i-1}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i} - \frac{(2i-1)x^{2i-3}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i.2i-2} - \&c. \ldots - \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 3}{2i.2i-2\ldots 2}x(1-xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.3\ldots 5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Donc

$$BM = \left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \&c.\right)\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} + c^2x(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} + \&c.\right] + c^4x^3(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} + \&c.\right].$$

210. Or $DN = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, on connoît donc

toutes les quantités qui entrent dans cette ſuite dont il eſt facile de reconnoître la loi. FIG.

Soit $x = 1$, on aura . . . . . .

$AMB = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \&c)$ AND. Donc la périphérie de l'ellipſe eſt à celle du cercle circonſcrit : : $1 - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} - \frac{1.1^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{3c^4}{a^4} - \frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{5c^6}{a^6}$ — &c. : 1, (en ſuppoſant a le demi-grand axe). Cette ſuite ſera très-convergente, lorſque les foyers ſeront peu éloignés. Par exemple, ſi $c = \frac{1}{10}a$, la circonférence de l'ellipſe ſera à celle du cercle circonſcrit. . . . . .

: : 0,997 495 292 861 261 : 1.

913. La rectification de l'hyperbole ſe trouve en ſuivant à peu-près la même méthode, & on peut voir dans les Mémoires de Berlin, an. 1746, & ſuiv. la maniere de ramener à la rectification de ces deux courbes, les intégrales d'un grand nombre d'autres différentielles.

Ex. IV. L'équation à la ſeconde parabole cubique eſt $y^3 = ax^2$. Donc $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dy \sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})} = \frac{8}{27}a(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C$, faiſant $y = 0$, on a $C = -\frac{8}{27}a$, & un arc quelconque de cette courbe compté depuis l'origine $= \frac{8}{27}a[(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - 1]$.

Ex. V. Dans la cycloïde, $dy = dx\sqrt{(\frac{a-x}{x})}$. Donc 211
$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{a}{x}}$: intégrant, on a $AM = 2\sqrt{ax} = 2AN$ (817).

Ex. VI. Dans la logarithmique $y\,dx = a\,dy$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{y}\sqrt{(yy + aa)}$, ſoit $\sqrt{(yy + aa)} = z$, on aura $yy = zz - aa$, $\frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{zz - aa}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz + \frac{aa\,dz}{zz - aa}$, dont l'intégrale eſt $z + \frac{a}{2}\,l\,\frac{z-a}{z+a}$, ou $\sqrt{(aa + yy)} -$

FIG. $a l[\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}]+C$, expreſſion d'un arc quelconque de logarithmique dans laquelle C eſt facile à déterminer.

206. Ex. VII. Dans la ſpirale d'Archimede, ſi on fait AGFBN $= x$, CM $= y$, on aura $Mr = \frac{y\,dx}{a}$, $Mm = d(COM) = \sqrt{(dy^2 + \frac{y^2\,dx^2}{a^2})}$. Or $x = \frac{cy}{a}$. Donc COM $= \int \frac{c}{a^2} dy (yy + \frac{a^4}{c^2})^{\frac{1}{2}}$. Décrivons une parabole CN dont le parametre $= \frac{2a^2}{c^2}$, nous aurons, en faiſant CQ = CM, & menant l'ordonnée QN, $CN' = \int \frac{c}{a^2} dy \sqrt{(\frac{a^4}{c^2} + yy)}$. Donc CN' = COM. D'où l'on peut conclure qu'il regne une certaine analogie entre la ſpirale d'Archimede & la parabole.

208. Ex. VIII. Dans la ſpirale hyperbolique, l'arc COM $= \int \frac{dy}{y} \sqrt{(bb+yy)}$. Donc ſi on décrit une logarithmique NK dont la ſoutangente $= b =$ celle de la ſpirale, on aura MOC = l'arc infini NK, en prenant l'ordonnée NR = CQ = CM. Mais ſi on veut avoir l'expreſſion d'un arc de ſpirale ou de logarithmique compris entre les deux ordonnées y, y', on trouvera $\sqrt{(bb+yy)} - \sqrt{(bb+y'y')} + b\,l\frac{y(b+\sqrt{bb+yy})}{y'(b+\sqrt{bb+yy})}$.

191. Ex. IX. Dans la ſpirale logarithmique, $cos\,M\,m\,r(c) : mr(dy) :: 1 : Mm = \frac{dy}{c}$. Donc ADM $= \frac{y}{c} =$ MT.

De la Meſure des Solidités.

914. UN ſolide étant propoſé à meſurer, on l'imaginera décompoſé en une infinité de petites tranches paralleles entre elles. Nommant donc t la ſurface d'une de ces tranches, dx ſon épaiſſeur ou une portion infiniment petite d'une ligne perpendiculaire à cette tranche, $\int (t\,dx) + C$ ſera la ſolidité du ſolide propoſé ; il ne s'agira plus que d'avoir t en x.

915. Par exemple, soit B la base du solide, H sa hauteur ou la FIG. distance de cette base à son sommet; si on suppose que les surfaces de ces tranches soient proportionnelles à une puissance m de leur distance x au sommet, on aura $H^m : B :: x^m : = \frac{B x^m}{H^m}$. Donc la solidité d'une portion du solide sera $C + \frac{B x^{m+1}}{(m+1) H^m}$, ou simplement $\frac{B x^{m+1}}{(m+1) H^m}$, si cette portion commence au sommet. Donc le solide entier $= \frac{B H}{m+1}$. Ainsi dans les pyramides cette solidité $= \frac{1}{3} B H$, parce que $m = 2$.

916. Si une courbe quelconque A M tourne autour de son axe 213 A P, elle engendrera un solide de révolution dont chaque coupe perpendiculaire à l'axe sera un cercle qui aura pour expression $\pi y y$, en faisant P M $= y$, & $\pi = 3.141$ &c. Donc un solide quelconque de révolution $= C + \int \pi y y \, dx$.

Ex. I. Dans la sphere, $y y = 2 a x - x x$. Donc la solidité d'un segment sphérique (535), $= \pi x x (a - \frac{1}{3} x)$, & la sphere $= \frac{2}{3} . 2 a^3 \pi =$ les deux tiers du cylindre circonscrit.

Ex. II. Dans l'ellipse, $y y = \frac{b b}{a a} (2 a x - x x)$. Donc le solide engendré par sa révolution autour du grand axe est à la sphere circonscrite :: $b b : a a$, ou = les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit.

917. On nomme *Ellipsoïde allongé* celui que nous venons de considérer, & *Ellipsoïde applati* celui qui est formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe. Or il est aisé de trouver que ce dernier solide est aussi les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit. Donc l'ellipsoïde allongé est à l'ellipsoïde applati :: $a b b : a a b$ :: $b : a$.

Ex. III. Si une parabole d'un ordre quelconque dont l'équation est $y^m = x^n a^{m-n}$ tourne autour de son axe, elle engendrera un solide qui aura pour expression $\int \pi y^2 d x = \frac{m}{m+2n} \pi x y^2$, ou qui sera au cylindre circonscrit :: $m : m + 2n$; ainsi le paraboloïde

FIG. ordinaire dans lequel $m = 2$, $n = 1$, eſt la moitié du cylindre circonſcrit.

212. Ex. IV. De même, ſi l'hyperbole dont l'équation eſt $y^m x^n = a^{m+n}$ tourne autour de l'aſymptote CP, en prenant CD = AD = a, le ſolide décrit par le trapeze ADMP aura pour expreſſion .... $\frac{m}{2n-m}\pi(a^3 - xy^2)$, & par conſéquent le ſolide décrit par l'eſpace infiniment long OADX eſt au cylindre décrit par ACDE :: m : $2n - m$, & = ce cylindre dans l'hyperbole ordinaire.

Des Surfaces courbes des Solides de révolution.

213. 918. LA différentielle de la ſurface décrite par la courbe AM = le petit cône tronqué décrit par l'élément Mm. Donc cette ſurface courbe = $\int Mm\ circ\ PM = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C = 2\pi \int n\,dx + C$, en appellant n la normale MN.

Ex. I. Dans la ſphere, $n = a$. Donc la ſurface d'une calotte ſphérique quelconque $= 2a\pi x$, & celle de la ſphere $= 4a^2\pi = 4$ grands cercles.

214. Ex. II. La ſurface du paraboloïde, eſt, à cauſe de $n = \sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)}$, $\frac{2\pi}{p} \int 2y\,dy\,(yy + \frac{1}{4}pp)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4\pi}{3p}(y^2 + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} + C$. Soit $y = 0$, on aura $C = -\frac{4\pi}{3p}.\frac{1}{8}p^3$, & la ſurface du ſolide = $\frac{\pi}{6p}[(pp + 4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3]$.

Ex. III. Dans l'ellipſe, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$. Donc la ſurface décrite par la révolution de l'arc AM autour de l'axe a, ſera exprimée par $\frac{2b\pi}{a} \int -dx \sqrt{[aa - (aa - bb)\frac{xx}{aa}]}$, & comme a eſt l'axe de révolution, il déſignera le demi-grand axe dans l'ellipſoïde allongé, & la moitié du petit dans l'ellipſoïde applati.

Dans le premier cas, ſoit $aa - bb = mm$, on aura $\frac{2b\pi m}{aa} \int$

FIG. 214.

$-dx\sqrt{(\frac{a^4}{m^2}-x^2)}$. Donc si du rayon $CD=\frac{a^2}{m}$ on décrit un arc de cercle DBN, on aura pour l'expression de la surface décrite par la révolution de AM autour de AP, $\frac{2b\pi m}{aa}\times ABNP$.

Dans le second cas, en faisant $bb-aa=mm$, on aura . . . . . $\frac{2b\pi m}{aa}\int dx\sqrt{(\frac{a^4}{m^2}+x^2)}=\frac{b\pi mx}{aa}\sqrt{(xx+\frac{a^4}{m^2})}+\frac{aab\pi}{m}l\frac{m}{aa}[x+\sqrt{(\frac{a^4}{m^2}+x^2)}]=$ la surface décrite par la révolution de AM autour de CE. On doit remarquer qu'ici $CE=a$, $CA=b$, $CQ=x$, $QM=y$.

Ex. IV. Dans l'hyperbole, $y=\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$. Donc si cette courbe tourne autour de l'axe AP, la surface décrite par l'arc AM sera, en faisant $aa+bb=mm$, & déterminant la constante, $\frac{2b\pi m}{aa}\int dx\sqrt{(xx-\frac{a^4}{m^2})}=\frac{b\pi mx}{aa}\sqrt{(xx-\frac{a^4}{m^2})}-bb\pi-\frac{a^2b\pi}{m}l\frac{mx+\sqrt{(m^2x^2-a^4)}}{a(m+b)}$. Et si elle tourne autour du second axe CQ, alors $y=MQ=\frac{a}{b}\sqrt{(bb+xx)}$. Donc la surface décrite par l'arc $AM=\frac{a\pi mx}{bb}\sqrt{(xx+\frac{b^4}{m^2})}+\frac{a\pi bb}{m}l[\frac{mx}{bb}+\sqrt{(1+\frac{m^2x^2}{b^4})}]$.

De la Méthode inverse des Tangentes, & des Équations différentielles.

919. On appelle *Méthode inverse des Tangentes*, celle qui apprend à trouver l'équation d'une courbe, dans laquelle on connoît une propriété quelconque des tangentes.

920. Cherchons, par exemple, la courbe dans laquelle la sounormale est constante, ou $=a$. Puisque nous savons d'ailleurs que l'expression générale de cette ligne est $\frac{y\,dy}{dx}$, nous aurons $\frac{y\,dy}{dx}$

$= a$, $y\,dy = a\,dx$, & en intégrant, pour exprimer que la propriété donnée convient à tous les points de la courbe, on a $yy = 2a(x + c)$ équation à la parabole qui réſout le problême propoſé.

921. La méthode inverſe des tangentes ſe réduit toujours à la ſolution d'une équation différentielle; ainſi comme nous n'avons pas encore parlé de ces ſortes d'équations, il eſt à propos d'en dire quelque choſe, avant d'aller plus loin.

On appelle équations différentielles du premier ordre, celles où il n'entre que des différences premieres. Les équations différentielles du ſecond ordre ſont celles où il entre des différences ſecondes, ſans différentielles d'un ordre plus élevé; & ainſi de ſuite.

922. Soient donc en général P & Q deux fonctions quelconques des variables x & y, $P\,dx + Q\,dy = 0$ repréſentera généralement toute équation différentielle du premier ordre à deux variables x & y, & il eſt évident qu'elle ſera intégrable, 1°. lorſque P ſera une fonction de x ou de y ſeule, & qu'il en ſera de même de Q. 2°. Lorſqu'on aura $\frac{dy.P}{dy} = \frac{dx.Q}{dx}$.

923. Mais lorſque ces conditions n'ont pas lieu, on tâche de *ſéparer l'équation*, c'eſt-à-dire, de la partager en deux membres qui ne renferment l'un & l'autre qu'une ſeule variable avec ſa différentielle. Il s'en faut bien qu'on ait des méthodes générales pour faire cette ſéparation dans tous les cas. En voici cependant quelques-uns où elle réuſſit.

924. Si $P = XY$, & $Q = X'Y'$, X & X' étant des fonctions de x, Y & Y' des fonctions de y, on aura $\frac{X\,dx}{X'} = -\frac{Y'\,dy}{Y}$ équation ſéparée, & reduite à l'intégration des différentielles à une ſeule variable.

925. Si P & Q ſont des fonctions homogenes de x & de y, c'eſt-à-dire s'il y a dans tous leurs termes le même nombre de dimenſions de x & de y, alors, en faiſant $\frac{x}{y} = z$, on voit aiſément que $\frac{Q}{P}$ ſera une fonction Z de z. Ainſi, on aura $dx + Z\,dy = 0$, ou $z\,dy + y\,dz + Z\,dy = 0$, & en ſéparant on trouvera $\frac{dz}{Z+z} = -\frac{dy}{y}$;

Par exemple $(az+by)\,dx=(mx+ny)\,dy$ devient en faisant $\frac{x}{y}=z$ ..... $\frac{dy}{y}=\frac{(az+b)\,dz}{az^2+(b-m)z-a}$; équation facile à intégrer.

916. Soit maintenant l'équation $(ax+by+c)\,dx+(mx+ny+p)\,dy=0$, on fera $ax+by+c=u$, $mx+ny+p=z$, & on aura $x=\frac{nu-bz+bp-cn}{an-mb}$, $y=\frac{az-mu+mc-ap}{an-bm}$; substituant, on a $(nu-mz)\,du+(az-bu)\,dz=0$ dont l'intégrale est facile à trouver par ce qui précede.

Soit encore $ax\,dy+by\,dx+x^m y^n(fx\,dy+gy\,dx)=0=\frac{a\,dy}{y}+\frac{b\,dx}{x}+x^m y^n(\frac{f\,dy}{y}+\frac{g\,dx}{x})$. Si on fait $y^a x^b=z$, $y^f x^g=t$, on aura $\frac{a\,dy}{y}+\frac{b\,dx}{x}=\frac{dz}{z}$, $\frac{f\,dy}{y}+\frac{g\,dx}{x}=\frac{dt}{t}$ .... $y^{ap}x^{bp}=z^p$ .... $y^{fq}x^{gq}=t^q$ .... $y^{ap-fq}x^{bp-gq}=z^p t^{-q}$. Soit $ap-fq=n$, $bp-gq=m$, on aura $p=\frac{ng-mf}{ag-bf}$, $q=\frac{bn-am}{ag-bf}$, & en substituant $\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}z^p t^{-q}=0$, ou $z^{-p-1}dz+t^{-q-1}dt=0$; intégrant, $qz^{-p}+pt^{-q}=C$, ou $(bn-am)(y^a x^b)^{\frac{mf-ng}{ag-bf}}+(ng-mf)(y^f x^g)^{\frac{am-bn}{ag-bf}}=(ag-bf)C=C'$.

917. Soit à présent $dy+Py\,dx=aQ\,dx$, P & Q étant des fonctions de x, on fera, selon la méthode de Bernoulli, $y=Xz$, X étant une autre fonction de x, alors $X\,dz+z\,dX+PXz\,dx=aQ\,dx$. Supposons $z\,dX+PXz\,dx=0$, nous aurons $\frac{dX}{X}=-P\,dx$, $lX=-\int P\,dx$, $X=e^{-\int P\,dx}$, & par conséquent $aQ\,dx=e^{-\int P\,dx}\,dz$. Donc $z=a\int(e^{\int P\,dx}Q\,dx)$ .... $yz^{\int P\,dx}=a\int(e^{\int P\,dx}Q\,dx)+C$.

Par exemple, l'équation $dy+y\,dx=ax^m\,dx$ donne $y=ae^{-x}$

FIG. $(C+\int e^x x^m dx) = aCe^{-x} + a(x^m - mx^{m-1} + m.m-1.x^{m-2} - \&c)$.

928. On intégrera par la même méthode l'équation $Xy^m dy + X'y^{m+1} dx = X''y^n dx$, en divisant par Xy^n & faisant $y^{m-n+1} = z$.

Il y a peu d'autres cas où la séparation générale d'une équation soit possible. Voyons maintenant quelques applications de ces principes à la méthode inverse des tangentes.

PROB. I. Trouver la courbe dont la soutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{m}{n}\,x$, on aura donc en séparant $\frac{n\,dx}{x} = \frac{m\,dy}{y}$, & en intégrant $n\,lx = m\,ly + (n-m)\,lc$, d'où l'on tire $y^m = x^n c^{m-n}$, équation cherchée.

PROB. II. Quelle est la courbe dont la soutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \ldots \frac{aa+xx}{x}$? on aura d'abord $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{aa+xx}$; puis, $yy = \frac{b^2}{a^2}$ 216. $(aa+xx)$, équation à l'hyperbole.

PROB. III. Quelle est la courbe dans laquelle l'espace $APM = \frac{m}{n}$ AMQ? On a donc $\frac{m}{n}\int x\,dy = \int y\,dx$, $\frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$.

PROB. IV. Trouver la courbe BM dont l'espace ABMP = l'arc 217. BM multiplié par une constante a, ou telle que $\int y\,dx = a\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, & $\frac{x}{a} = l\frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{c}$ est l'équation cherchée.

218. PROB. V. Trouver la courbe AM dans laquelle le rayon osculateur $MC = \frac{m}{n}\,MN$.

Si on suppose dx constante, on aura $\frac{m}{n}\,y = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, ou $\frac{m}{n}\,y\,ddy + dx^2 + dy^2 = 0$. Pour intégrer, soit $dx = p\,dy$, on aura $ddy = -\frac{dp\,dy}{p}$, & $\frac{n}{m}\cdot\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p(p^2+1)}$. Donc

$\frac{n}{m} l \frac{y}{c} = l \frac{p}{\sqrt{(p^2+1)}}$ .... $p = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}})}}$, & $dx = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}})}}$: c'eſt l'équation différentielle du premier ordre de la courbe cherchée.

Si $n = m$, on a $dx = \pm y\,dy\,(cc - yy)^{-\frac{1}{2}}$, & $x = c' \pm \sqrt{(cc - yy)}$ équation au cercle. Si $m = 2n$, on a $dx = \frac{\pm dy \sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}$, équation à la cycloïde.

PROB. VI. Trouver une courbe BM, telle qu'en menant par l'origine A une droite AO, qui faſſe avec l'axe un angle de 45°, on ait toujours cette proportion .... l'ordonnée PM eſt à la ſoutangente PT :: une ligne donnée a : OM. 219.

On voit par l'énoncé de ce problême, que $dy : dx :: a : y - x$, & $a\,dx = (y-x)\,dy$. Soit $y - x = z$, on aura $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a-z}$, $\frac{y}{a} = l \frac{C}{a-z}$, & $x = y - a + C e^{-\frac{y}{a}}$. On auroit pu trouver immédiatement cette intégrale, en comparant l'équation $dx + \frac{x}{a} dy = \frac{y\,dy}{a}$, avec celle des numéros 926 & 917. La plus petite ordonnée BD ſe trouve en faiſant $\frac{dy}{dx} = \infty$, & alors on a $BD = AD = a l \frac{C}{a}$; l'eſpace $DBMP = xy - \frac{1}{2} yy + a\,a\,l \frac{a}{C} + \frac{1}{2} a\,a\,l^2 \frac{a}{C} + ax$

PROB. VII. Trouver la courbe BM qui faſſe par tout avec l'ordonnée PM un angle EMP proportionel à l'abſciſſe AP. 220.

On aura donc $EMP = \frac{x}{m}$, m étant conſtant, & $tang\ EMP = tang \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}$; par conſéquent $\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} cot \frac{x}{m} = \frac{dx}{m} \frac{cof \frac{x}{m}}{fin \frac{x}{m}}$. Donc $y = C + m\ log\ fin \frac{x}{m}$; équation qui fait

voir que la courbe rencontre la ligne des abſciſſes en des points E, F, E', F', &c, tels que $log\ ſin\ \frac{x}{m} = -\frac{c}{m}$; & que par conſéquent $x = m$ multiplié par tous les arcs dont le ſinus $= e^{-\frac{c}{m}}$: or le nombre de ces arcs eſt infini ; car ſi le premier eſt a, & ſi l'arc de 180° eſt c, ceux qui auront le même ſinus, formeront la ſuite a, $c - a$, $2c + a$, $3c - a$, $4c + a$, $5c - a$, &c : ainſi les diſtances où la courbe rencontrera la ligne des abſciſſes, ſeront repréſentées par ma, $m(c - a)$, $m(2c + a)$, $m(3c - a)$, &c.

On prendra donc $AE = ma$, $AF = mc - ma$, $AE' = 2mc + ma$, $AF' = 3mc - ma$, &c ; & on aura les valeurs poſitives de x. On trouveroit de même ſes valeurs négatives, c'eſt-à-dire, les abſciſſes comptées vers la gauche de AS, & on verroit que les intervalles EF, E'F', &c. ſont égaux.

Cherchons maintenant en quel point l'ordonnée de cette courbe eſt un *Maximum*. Pour cela, ſoit $\frac{dy}{dx} = 0$, on aura $cot\ \frac{x}{m} = 0$, & par conſéquent $ſin\ \frac{x}{m} = 1$. Or les valeurs qui ſatisfont dans le ſens poſitif à cette équation, ſont . . . . . .

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c,\ \&c.$$

Et puiſque $ſin\ \frac{x}{m}$ eſt égal à 1 dans ce cas, on a $y = C$; donc aux points les plus élevés C, C', &c. les ordonnées ſont égales entre elles & à la conſtante.

Pour trouver les aſymptotes ; on ſuppoſera $y = \infty$ ce qui donnera $ſin\ \frac{x}{m} = 0$, équation qui aura lieu ſoit que $\frac{x}{m} = 0$, ſoit que $\frac{x}{m} = \pm e$, ou $\pm 2c$, ou $\pm 3e$, &c. Alors x aura une des valeurs ſuivantes, 0, $\pm cm$, $\pm 2cm$, $3am$, à l'infini. La courbe doit donc avoir une infinité d'aſymptotes perpendiculaires à l'axe. La premiere paſſe par l'origine des abſciſſes, c'eſt AS, la ſeconde

passe à la distance $AD = cm$, la troisieme, à une distance AD' FIG.
$= 2AD = 2cm$, &c. Il en est de même dans le sens négatif.

PROB. VIII. Entre toutes les courbes isopérimetres qui passent par les points B & D, trouver celle qui rend l'aire ABDE un 221.
Maximum, en supposant la ligne AE donnée de position.

Si on considere les trois éléments consécutifs MN, NS, SV, il faudra qu'entre tous les isopérimetres qui passent par les points M & V, MNSV soit propre à rendre l'aire MPTVM *Maximum*. Supposons donc les dy constantes, & nommons $PM = a$, $NQ = b$, $SR = c$, $Nr = Sn = Vs = m$, $Mr = u$, $Nn = t$, $Ss = \tau$, on aura 1°, à cause des points M & V dont la distance est constante $du + dt + d\tau = 0$. 2°, à cause de l'arc MNSV dont la longueur est constante aussi, $\sqrt{(u^2 + m^2)} + \sqrt{(t^2 + m^2)} + \sqrt{(\tau^2 + m^2)} =$ à une constante; & par conséquent $\frac{u\,du}{\sqrt{(u^2 + m^2)}} + \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2 + m^2)}} + \frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{(\tau^2 + m^2)}} = 0$. 3°, l'espace MPTV étant un *Maximum*, on a $a\,du + b\,dt + c\,d\tau = 0$. Éliminant $d\tau$ & dt au moyen de ces trois équations, & ayant égard à ce que $b - c = -m$, & que $a - c = -2m$, on a $-\frac{u}{MN} + \frac{2t}{NS} - \frac{\tau}{SV} = 0$, ou $\frac{Nn}{NS} - \frac{Mr}{MN} + \left(\frac{Nn}{NS} - \frac{Ss}{SV}\right) = 0$. Or il suit des principes du Calcul différentiel que $-\frac{Mr}{MN} + \frac{Nn}{NS} = d\frac{Mr}{MN}$, & que $\left(\frac{Ss}{SV} - \frac{Nn}{NS}\right) - \left(\frac{Nn}{NS} - \frac{Mr}{MN}\right) = d\left(-\frac{Mr}{MN} + \frac{Nn}{NS}\right)$. Donc $dd\left(\frac{Mr}{MN}\right) = 0$.

Exprimant cette équation à la maniere accoutumée, c'est-à-dire faisant $Mr = dx$, $MN = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, on a . . . . . $dd\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$. Donc $d\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dy}{C}$, & $\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{y + C'}{C}$. Donc $\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = \frac{C^2}{(y + C')^2}$

$= 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$, & $\pm \frac{dv}{dx} = \sqrt{\left(\frac{C^2}{(y+C')^2} - 1\right)}$; donc $dx = \frac{\pm dy\,(y+C')}{\sqrt{[C^2-(y+C')^2]}}$, & en intégrant . . . . . .

$$x = C'' \pm \sqrt{[C^2-(y+C')^2]};$$

équation au cercle. Donc *le cercle eſt la courbe qui, ſous le même périmetre, renferme le plus de ſurface.*

929. Pour déterminer les conſtantes C'', C', C, ou pour décrire le cercle cherché, on aura ces trois conditions. 1°, lorſque $x = 0$ $y =$ AB. 2°, lorſque $x =$ AE, $y =$ DE. 3°, on cherchera par l'équation précédente la longueur de l'arc BMD, & comme cette longueur eſt ſuppoſée connue, on aura la troiſieme condition néceſſaire pour déterminer les conſtantes C'', C', C.

Réſultats des Solutions de quelques Problêmes énoncés dans le cours de l'Ouvrage.

Pages

5 A.... Soixante-quinze.
Ibid. B.... Huit cents quatre-vingt-treize.
Ibid. C.... Mille cent-onze.
Ibid. D.... Soixante-ſept mille cinq cents-neuf.
Ibid. E.... Dix millions deux cents mille ſept cents-un.
Ibid. F.....302.
Ibid. G.....8001.
Ibid. H.....15016.
Ibid. I.....50001000.
Ibid. K.....22004000079.
7 L.....24619.
Ibid. M.....181164.
Ibid. N.....11167080.
10 O.....2000.
Ibid. P.....145.
Ibid. Q.....1111.
Ibid. R.....429.
Ibid. S.....73616.
14 T.....153170108484 32.
Ibid. U.....4943221371825660.
Ibid. X.....1219326311126352 69.
27. Y.....999 $\frac{2443}{2568}$.
Ibid. Z.....387 $\frac{21998}{99887}$.
Ibid. A'.....1024 $\frac{1121715}{6831675}$.
35 B'..... $\frac{7}{16}$.
Ibid. C'..... $\frac{13}{24}$.

Pages.

35 D'..... $\frac{5}{7}$.

Ibid. E'..... irréductible.

38 F'..... $\frac{1}{3}$.

Ibid. G'..... $\frac{2}{3}$.

Ibid. H'..... 1.

39 I'..... $\frac{1}{2}$.

Ibid. K'..... 4.

Ibid. L'..... 1.

Ibid. M'..... 19.

41 N'... Un dixieme.

Ibid. O'... Trois unités quarante-deux centiemes.

Ibid. P'... Trois cents cinquante-quatre unités soixante-trois dix milliemes.

Ibid. Q'... Huit unités sept mille deux cents-un millioniemes.

42 R'..... 0,0003.

Ibid. S'..... 1000,004.

Ibid. T'..... 9,000002.

Ibid U'..... 0,00013000.

66 A''..... $5x - 34xy$.

Ibid. B''..... $\frac{3}{7} \cdot \frac{a}{b} - \frac{77}{20^e} \cdot a - u^2$.

Ibid. C''..... $295.\alpha\beta + \varphi$.

71 D''..... $2xy^2 - \frac{16}{5}x^2yz - 5uy^2z^3 + 8ux\xi^4$.

Ibid. E''..... $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$.

Ibid. F''..... $\alpha^3\beta^2 + \beta^5$.

103. D''..... 853, 6 &c.

Ibid. E''..... 33333.

Ibid. F''..... 30000,00045 — &c.

110 G''..... 2,828427124746.

Pages 248, 249, 250.

H''

I. Soit A le Courrier de Paris, B celui de Fontainebleau, le rapport de leurs vîteſſes reſpectives :: $m : n$, la diſtance de Paris à Fontainebleau $= d$, la diſtance de Paris au lieu de rencontre ſera $x = \frac{m\,d}{m+n}$. Faiſant dans cette formule $d = 14$, $m = 3$, $n = 4$, on trouvera $x = 6$.

II. Si on appelle x le nombre des pas que le lévrier doit faire avant d'atteindre le lievre, 1°. on trouvera $x = \frac{m\,n\,p}{mp - (m+a)\,q}$;

2°. Le lévrier n'atteindra le lievre que dans le cas où $mp > (m+a)\,q$.

III. Si on nomme x l'argent de B, y celui de C, & a le gain de ce dernier; on trouvera $y = 9$, par conſéquent B aura 6 de reſte; mais la ſeconde partie du problême eſt indéterminée, & en donnant à a une valeur arbitraire, l'argent du ſecond ſera....

$y = 4a \sqrt{\frac{a}{3}}$.

V. La montre marquoit 5 heures 27 $\frac{1}{11}$ minutes.

VI. Le temps demandé $T'' = \frac{E'''}{\frac{E}{T} + \frac{E'}{T'} + \frac{E''}{T''}}$.

VII. Les parties qui compoſent le mélange, ſeront ..... $x = \frac{c\,(m-b)}{a-b}$, & $y = \frac{c\,(a-m)}{a-b}$.

VIII. La Regle de double fauſſe poſition ne réſoud exactement que les Equations du premier degré, & dans les applications qu'on en fait ordinairement, on ne conſidere qu'une ſeule inconnue; il eſt donc néceſſaire lorſqu'il y en a pluſieurs, que ces inconnues aient entre elles & celle que l'on conſidere des rapports immédiats & bien déterminés, afin que l'on puiſſe déduire facilement leurs valeurs d'après les différentes ſuppoſitions qu'on fera pour la valeur de celle que l'on conſidere. Cela poſé, tout problême du

premier degré ſera cenſé n'avoir qu'une ſeule inconnue ; on pourra donc exprimer toutes ſes conditions par une équation de cette forme $Ax = B$: A & B étant des quantités que les conditions du problême feroient trouver ſi on en avoit beſoin, & par conſéquent connues. Cela poſé, on fera pour x deux ſuppoſitions S, S'; il en réſultera deux erreurs e, e', & l'équation $Ax = B$ ſe changera en ces deux autres $AS = B + e$, $AS' = B + e'$: multipliant la premiere par e' & la ſeconde par e, les produits ſeront $Ae'S = Be' + ee'$, $AeS' = Be + e'e$. Souſtrayant la premiere équation de la ſeconde, on trouvera pour reſte $A(eS' - e'S) = B(e - e')$, & par conſéquent $\frac{eS' - e'S}{e - e'} = \frac{B}{A} = x$, équation dans laquelle on reconnoît la regle de double fauſſe poſition.

VIII. La ſomme a été placée au denier 13,463, ou à 7,428 pour $\frac{0}{0}$.

IX. $\frac{a^2 - x^2}{a + bx - x^2} = a - bx + \frac{b^2 + a - 1}{a} \cdot x^2 - \frac{b^3 + (2a - 1)b}{a^2} \cdot x^3 + \frac{b^4 + (3a - 1)b^2 + a^2 - a}{a^3} \cdot x^4 - \&c.$

X. On trouvera $y = \frac{8}{3}x - \frac{1120}{81} \cdot x^2 + \frac{1111868}{10935} \cdot x^3 - \&c.$

XI. Soit a le nombre des habitants pour une époque quelconque, t le nombre d'années écoulées durant la population, b leur nombre à la fin de ce temps, l'accroiſſement annuel $= \frac{1}{x}$, on trouvera $a = \frac{bx^t}{(x+1)^t} \cdots b = \frac{a(x+1)^t}{x^t} \cdots t = \frac{Lb - La}{L(x+1) - Lx} \cdots L(1 + \frac{1}{x}) = \frac{Lb - La}{t}$.

XII. Le plus grand des deux nombres eſt 32, & le plus petit eſt 5.

XIII. Le plus petit nombre eſt $= q[\sqrt[3]{(\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + \frac{q^3}{27})})} + \sqrt[3]{(\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + \frac{q^3}{27})})}]$, qui étant ôté de a donnera le plus grand nombre pour reſte.

XIV. Ce nombre eſt 923.

XV. Les quatre racines ſont imaginaires, & ſe trouveront aiſément en réſolvant les deux facteurs du ſecond degré $x^2 + 2x + 3$, $x^2 - x + 1$, dont l'équation propoſée a été compoſée.

XVI. La Garniſon étoit de 700 hommes.

XVII. Le Voiturier avoit tiré $39\frac{1}{2}$ bouteilles environ.

XVIII. On trouvera 1°. $\sqrt{(14+6\sqrt{5})} = 3 + \sqrt{5}$, 2° & 3°. impoſſible, 4°. $\sqrt{10\sqrt{-1}} = (1+\sqrt{-1})\sqrt{5}$.

XIX. On trouvera 1°. $\sqrt[3]{(22+10\sqrt{7})} = 1+\sqrt{7}$, 2°. impoſſible.

XX. On trouvera $x = 8,95406886$, les deux autres ſont imaginaires.

XXI. Les quatres racines ſont $x = 3,208245 \ldots x = 3,472092 \ldots$ $x = 1,284723 \ldots x = 0,034940$.

XXII. On trouvera $y = 4,8278$.

XXIII. On pourra combiner de 43 manieres différentes.

XXIV. Le nombre 301 ſatisfait aux conditions.

XXV. Deux manieres.

Caffé à 50ſ.	4	11.
Caffé à 38.	20	7.
Caffé à 24.	40	46.

XXVI. Quatre ſolutions.

Maîtres.	1	1	2	3
Domeſtiques	2	5	3	1
Chevaux.	8	4	4	4

XXVII. Problême impoſſible.

XXVIII. 153 Solutions qui commencent ainſi.

in-folio.	1	2	3	153
in-4°.	457	454	451	1
in-12.	542	544	546	846

XXIX. En 1582.

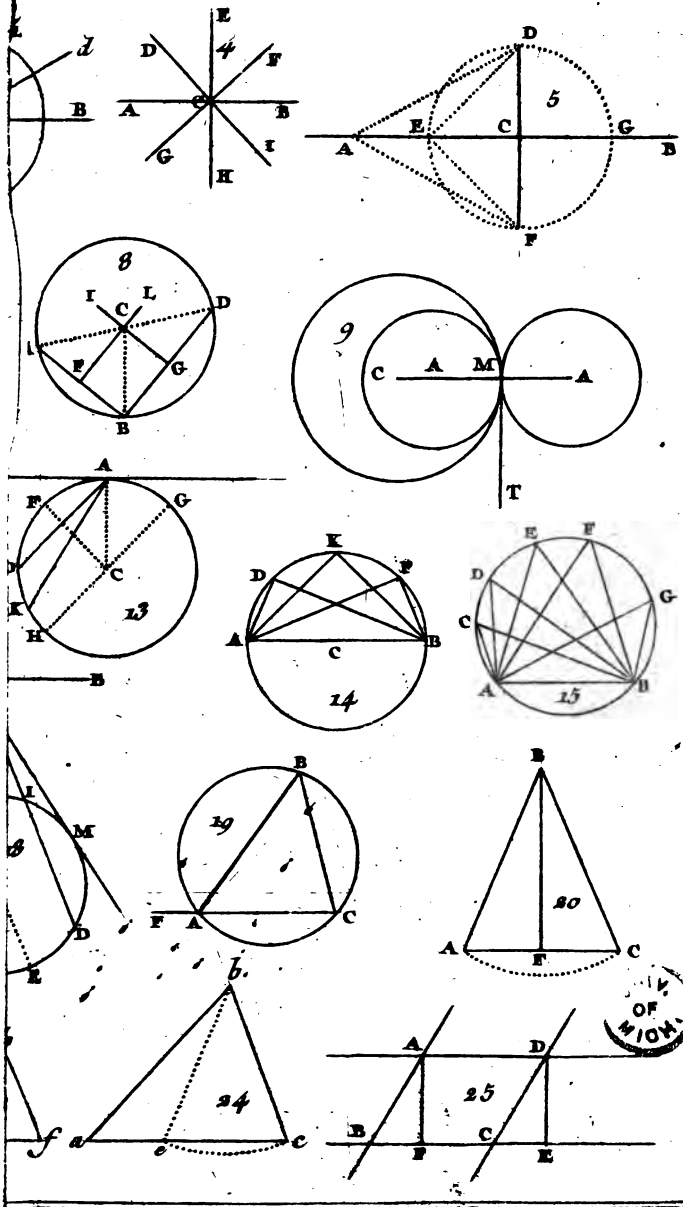
XXX. En l'année 1680.

FAUTES A CORRIGER.

Pag.	lig.	fautes.	corrections.
2.	8.	dût	dut
7.	dernier.	dif-	dif-
35.	23 & 24.	expreſſion $3\ 3\frac{1}{3}$	expreſſion $3\frac{1}{3}$
36.	23.	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$
44.	26.	parce	parce que
46.	30.	418445	418443
57.	14.	57^{tt} 14 ſ. 10 d. $\frac{1}{3}$	557^{tt} 14 ſ. 10 d. $\frac{1}{3}$
71.	19.	parqu'en	parce qu'en
78.	25.	$a^2 = b^2$	$a^2 - b^2$
83.	12.	multipiié	multiplié
180.	29.	22140	22114
Ibid.	30.	$-qz$	$-qz^2$
211.	23.	(307)	(312)
228.	16.	$-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$	$+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$
283.	27.	B	A
290.	32.	AB	EB.
303.	dern.	$\frac{mx^2}{n}$	$\frac{mx^2}{2a}$
304.	1.	$\frac{a^2nm}{m^2+n^2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2nm}{m^2+n^2}$
Ibid.	16.	la ſurface	la double ſurface
308.	1.	ſur les deux plans q	ſur les deux plans pq & Pq.
327.	5.	l'arc C E B	l'arc E B
331.	7.	$ſm^2\frac{1}{2}q$	$ſin^2\frac{1}{2}q$
363.	12.	*tang* A C	*tang* C
364.	30.	A B C	A C B
394.	19 & 20.	le point T	les points T & D
400.	5.	$\frac{x^5}{6a} - \frac{x^3}{40a^3}$	$\frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$

401	20	$\frac{x^5}{5m^3} +$	$\frac{x^5}{5m^3} -$
407	37	AT	AG
439	16	$\frac{d\,tang^2 x}{1+tang^2 x}$	$\frac{d\,tang\,x}{1+tang^2 x}$
458	14	d	c
459	6	$\frac{z^3\sqrt{-1}}{2}$	$\frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3}$
471	32	(848)	(787)
511	27	$x^m a^{m-n}$	$x^n a^{m-n}$
512	20	$\frac{1}{8}pp$	$\frac{1}{8}p^2$.

De l'Imprimerie de Ph.-D. PIERRES, Imprimeur Ordinaire du Roi, &c. 1784.


d
B
4
E
D
F
A
C
B
G
I
H
5
D
E
C
G
A
B
F
8
I
L
C
D
F
G
B
9
C
A
M
A
T
A
F
G
C
13
K
H
B
K
D
F
A
C
B
14
E
F
D
G
C
A
15
B
I
M
B
D
E
19
B
F
A
C
B
20
A
F
C
b.
24
f
a
e
c
A
D
25
B
F
C
E

OF MICH.

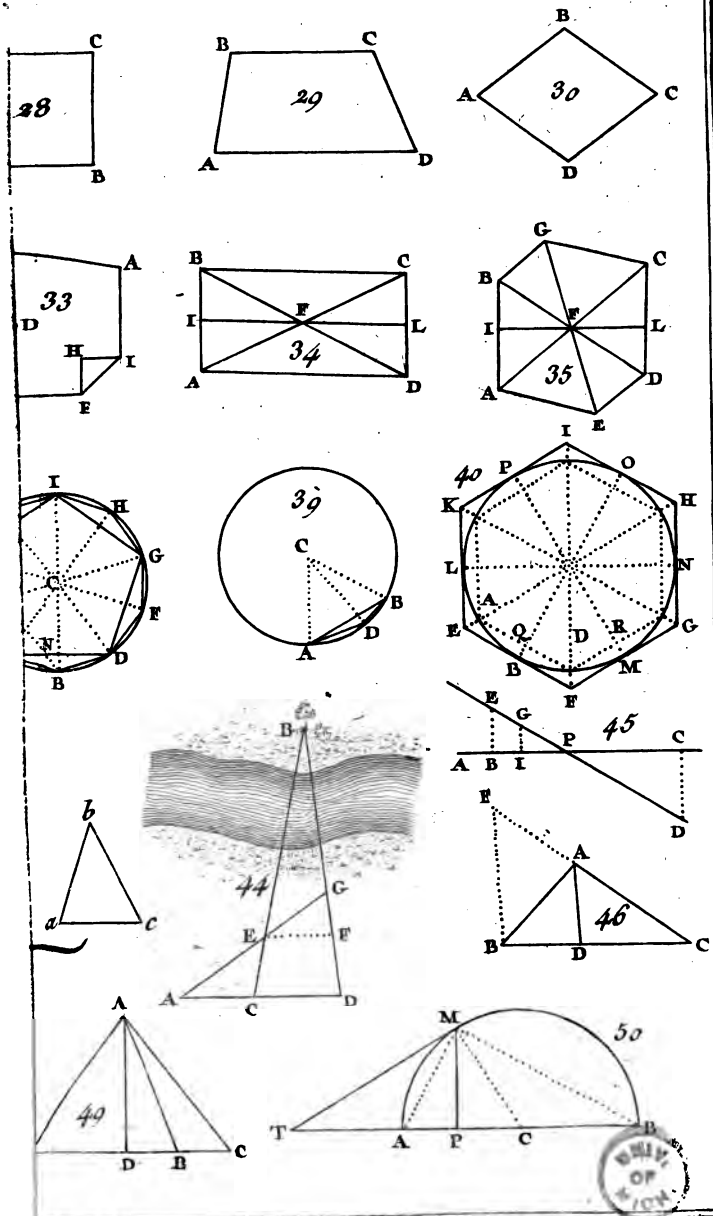


Fig. 50.

Fig. 51.

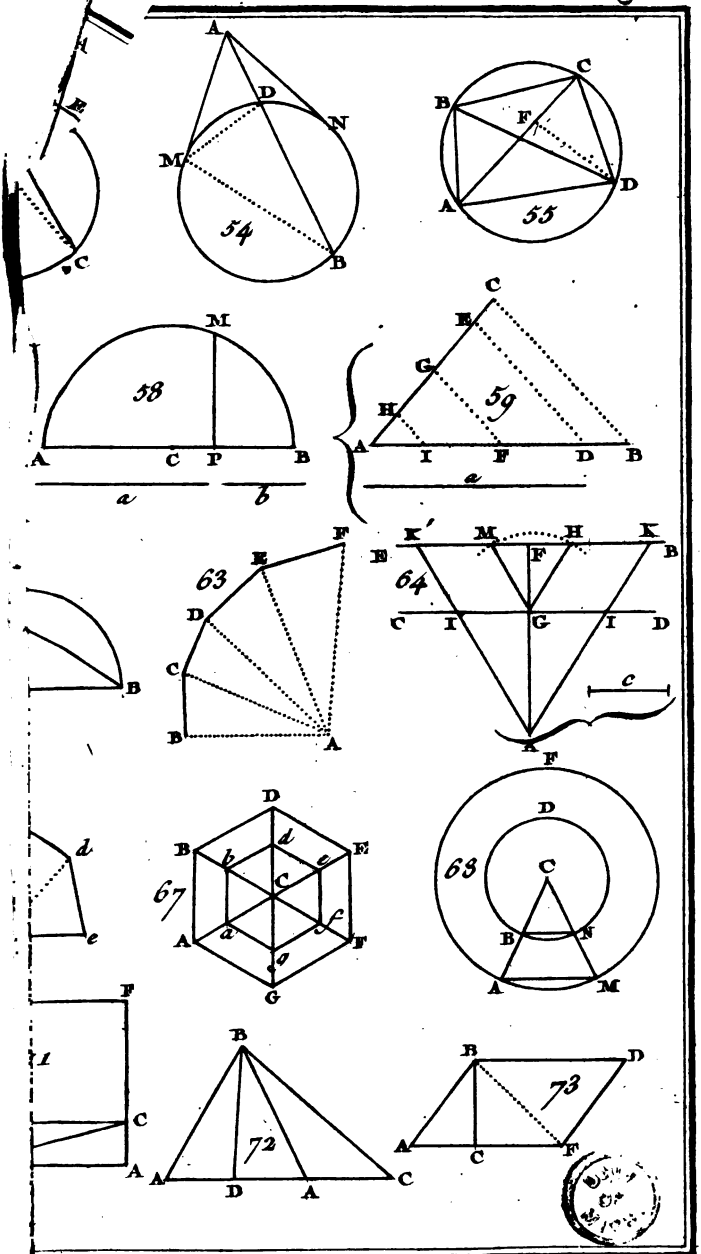

A
D
N
M
54
B
C
B
F
D
A
55
M
38
A
C
P
B
a
b
C
E
G
59
H
A
I
F
D
B
a
63
F
E
D
C
B
A
K'
M
H
K
E
F
B
64
C
I
G
I
D
c
K
F
d
e
D
B
b
d
e
F
67
C
A
a
c
f
F
a
G
D
68
C
B
N
A
M
F
1
C
A
B
72
A
D
A
C
B
D
73
A
C
F

Fig. 73.

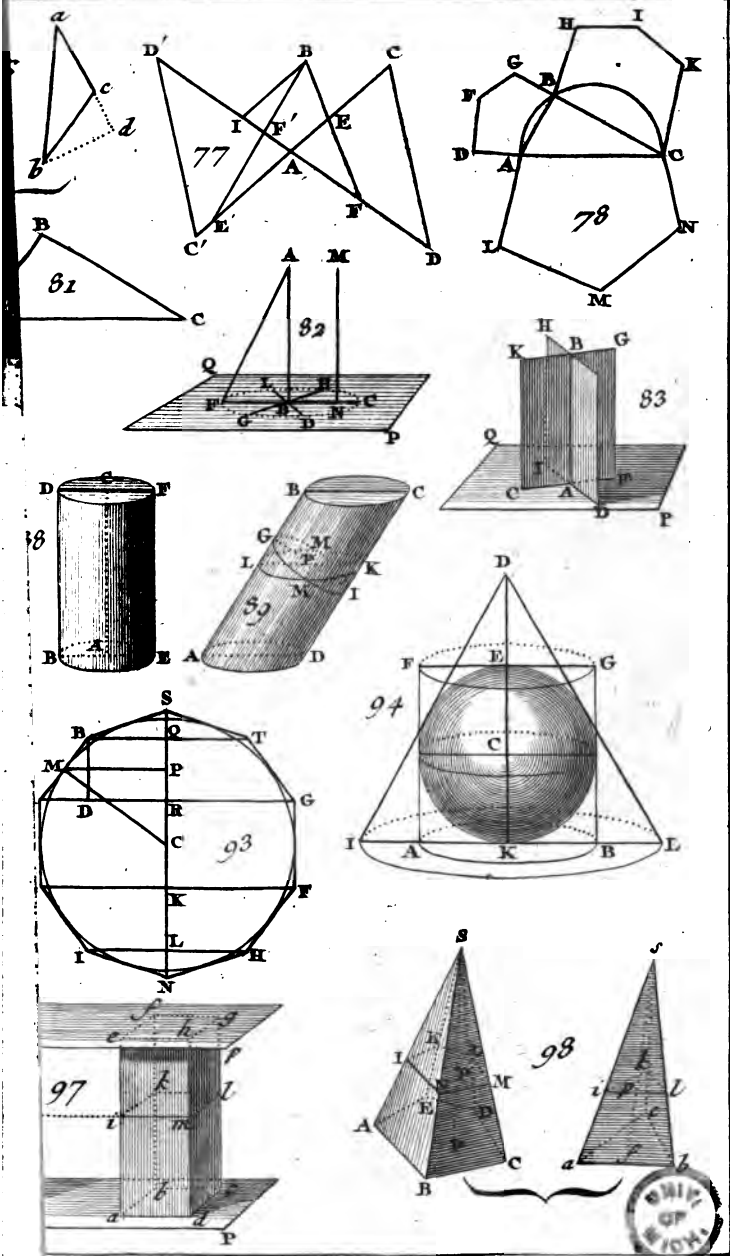
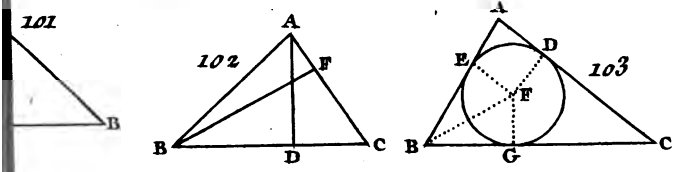
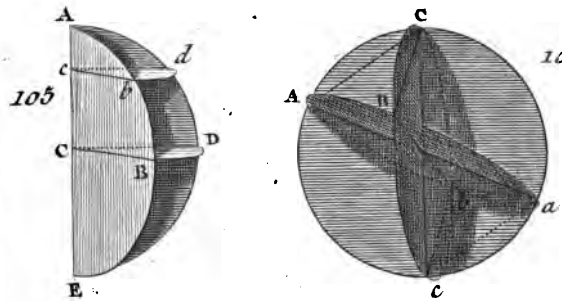
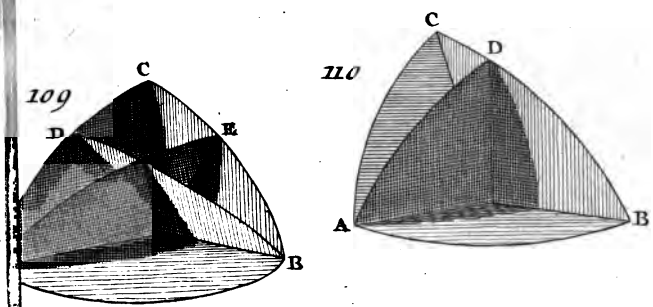

a
c
d
b
D'
B
C
I
F'
E
77
A
E'
F
C'
D
H
I
G
K
F
E
D
A
C
78
L
N
M
B
81
C
A
M
82
Q
L
H
F
C
G
R
D
N
P
H
K
B
G
83
Q
T
C
A
D
P
D
C
F
88
B
A
E
B
C
G
M
L
P
K
M
I
89
A
D
D
F
E
G
94
C
I
A
K
B
L
S
B
Q
T
M
P
G
D
R
C
93
K
F
I
L
H
N
f
e
h
g
97
k
p
l
i
m
b
a
d
P
S
I
h
98
M
E
D
A
C
B
S
f
k
i
p
l
e
a
b

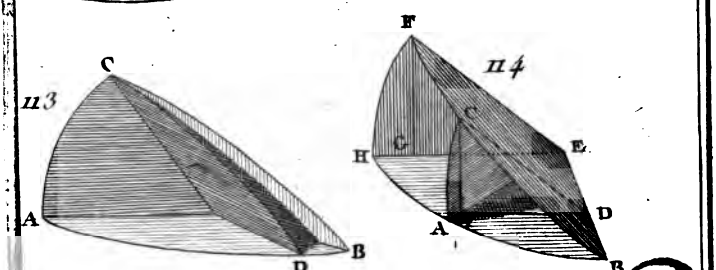
Fig. 98.

Fig. 99.









UNIV. OF MICH.

Fig. 114.

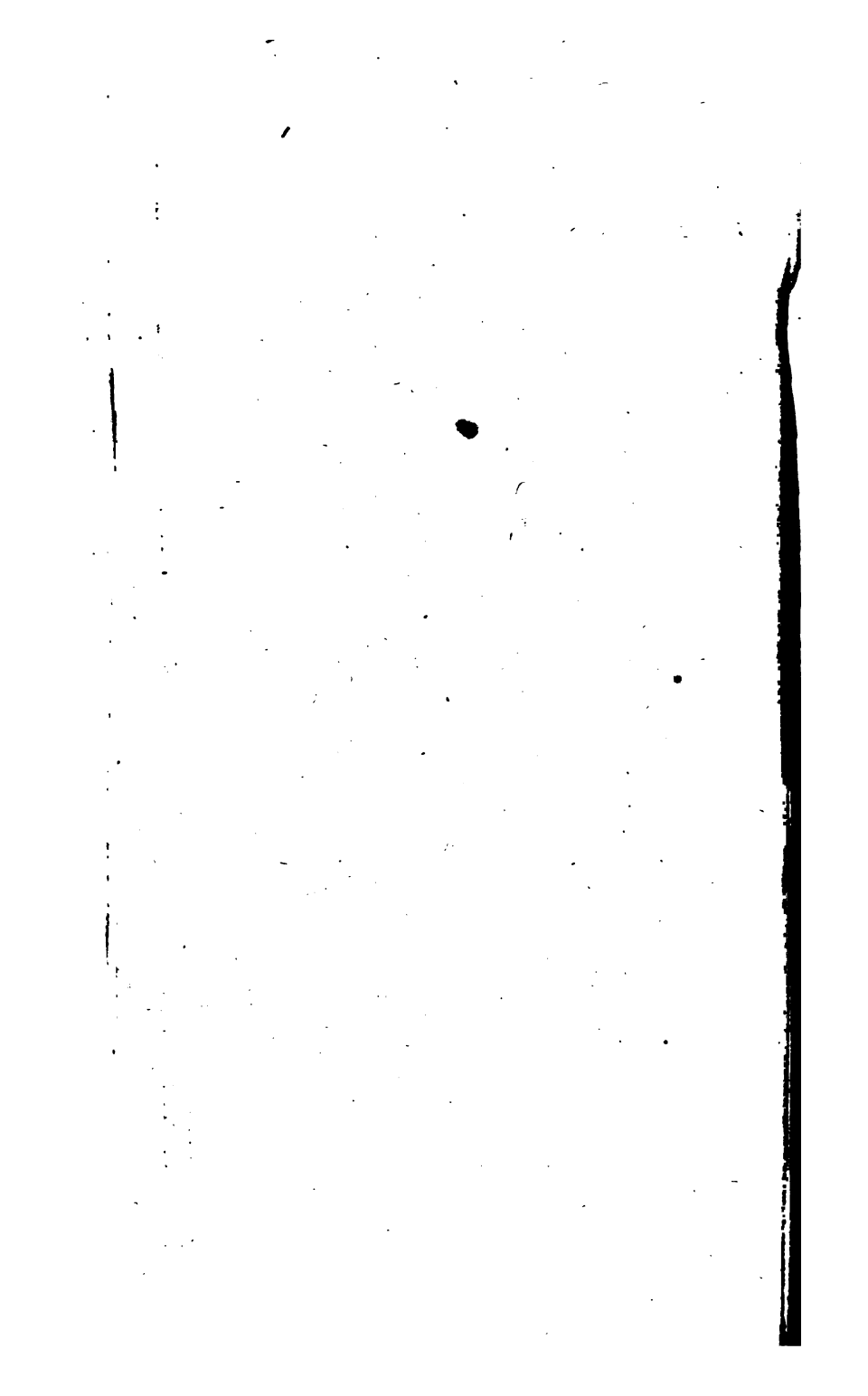


Fig. 115.

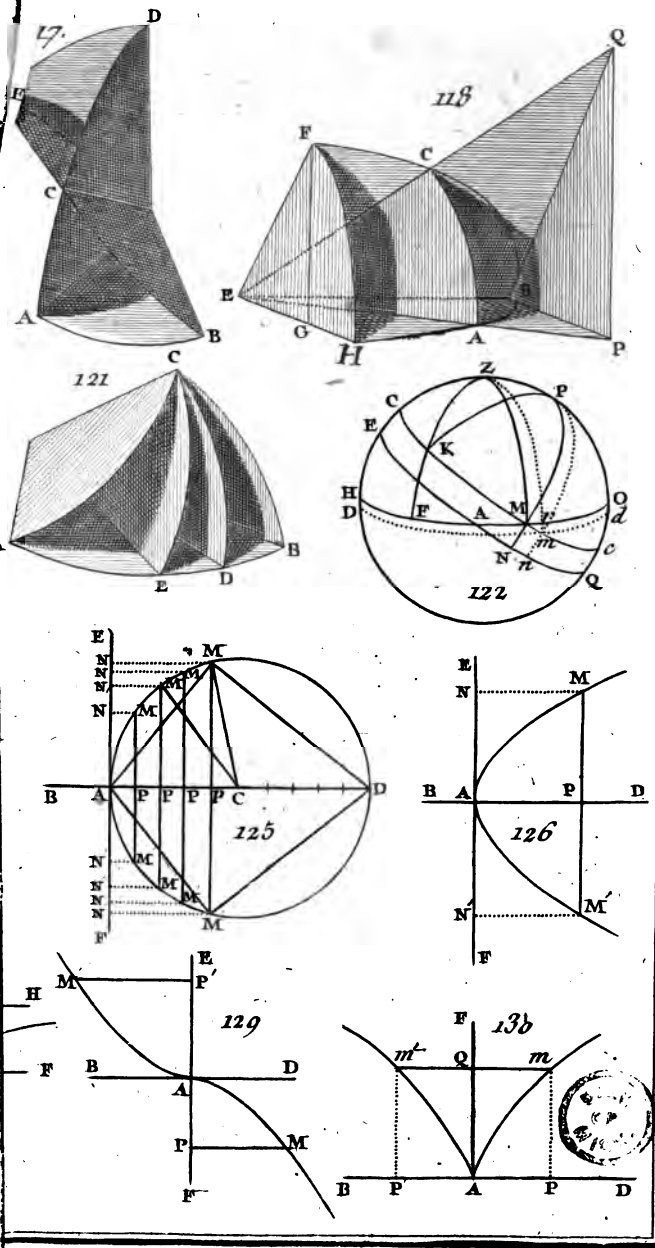
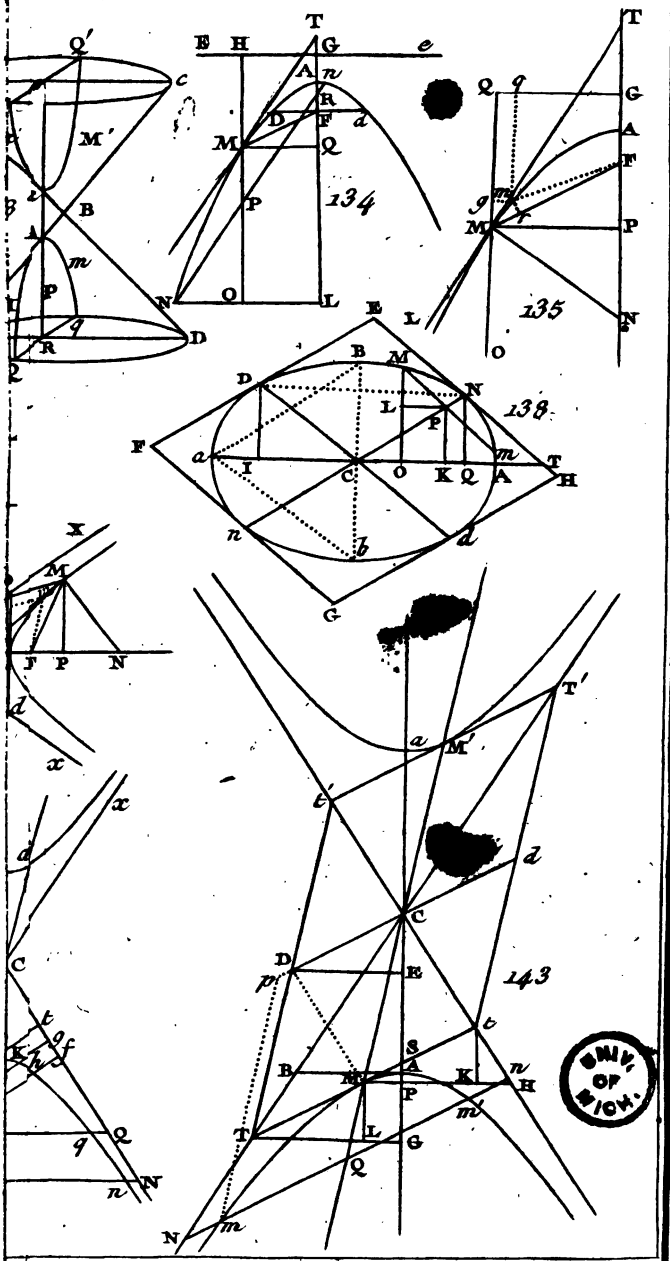


Fig. 130.

Fig. 131.



BRIT. OF RICH.

Fig. 143.

Fig. 144.

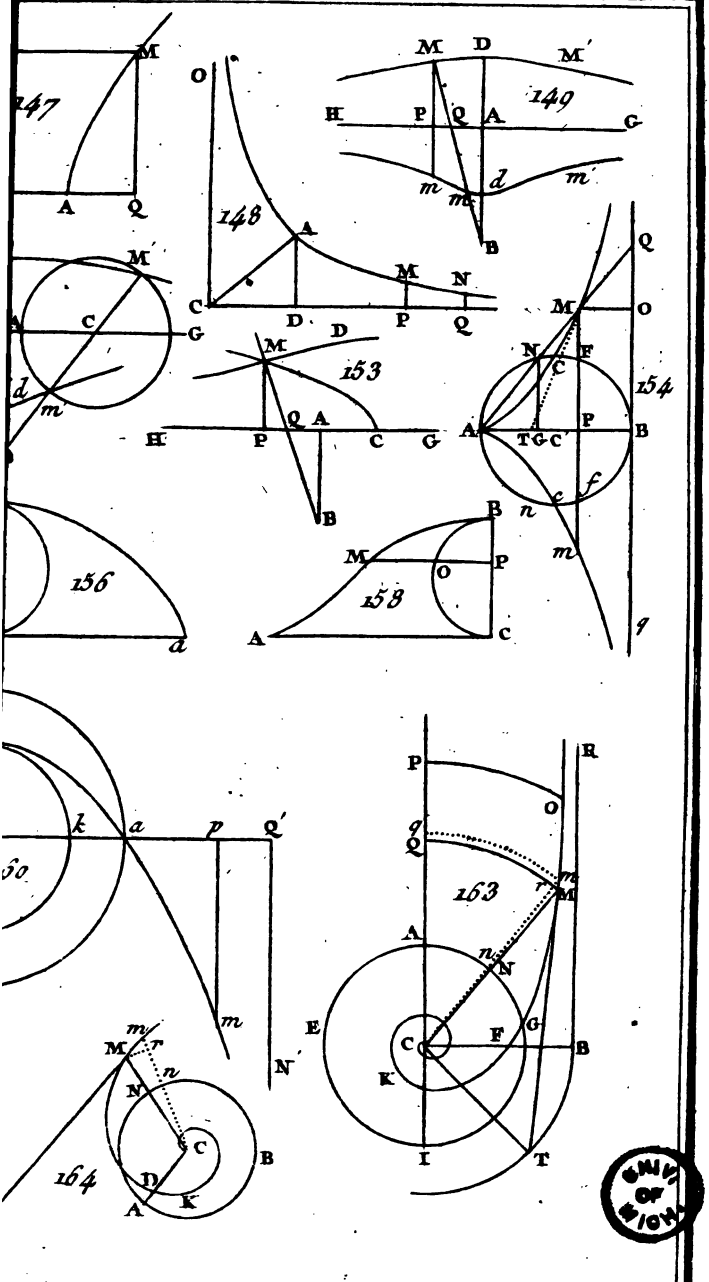


Fig. 164.

Fig. 165.

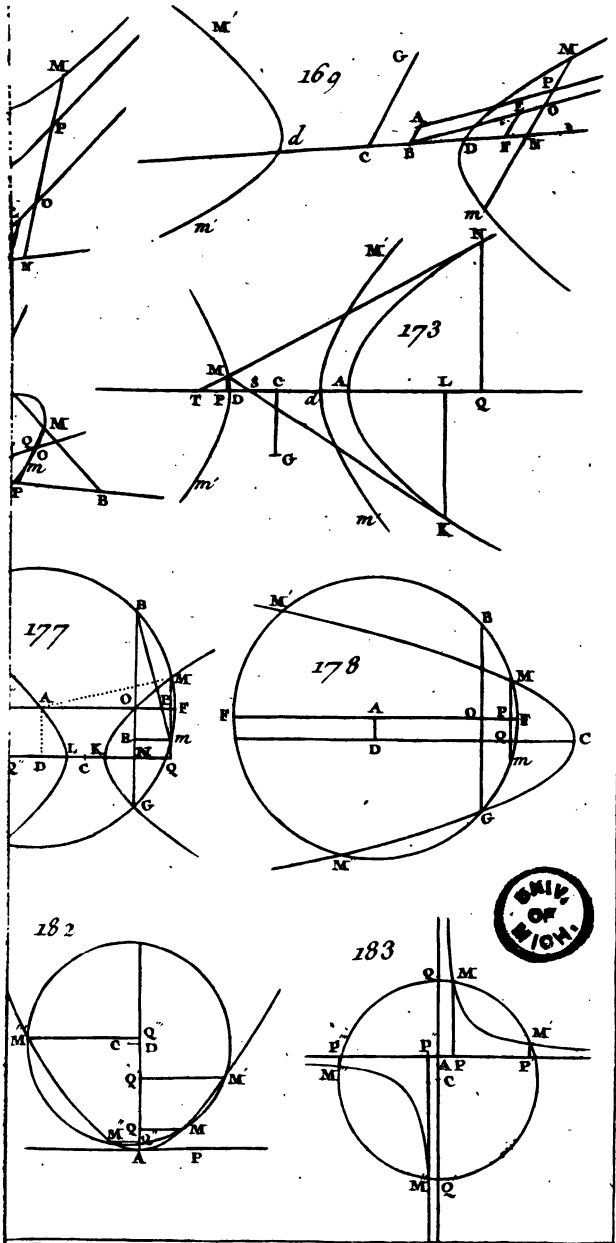
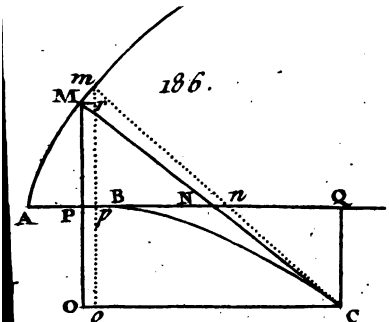
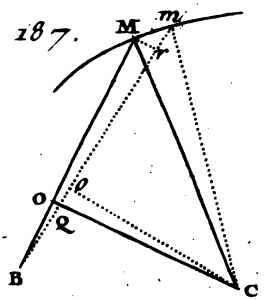
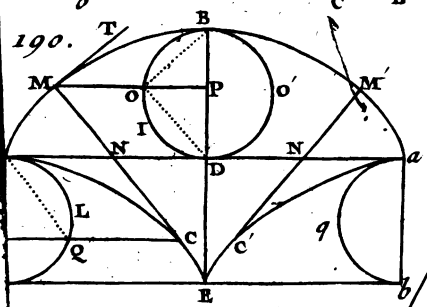
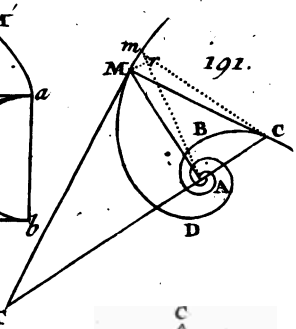


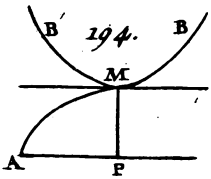
Fig. 183.

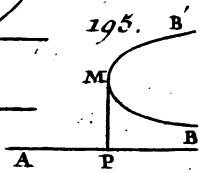

186.
m
M
r
A
P
p
B
N
n
Q
O
o
C

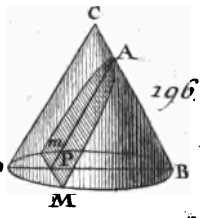

187.
M
m
r
O
Q
B
C

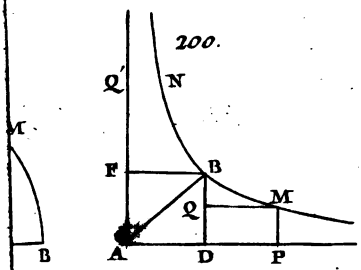

190.
T
B
M
O
P
O'
M'
I
N
N
D
a
L
Q
C
C'
q
E
b

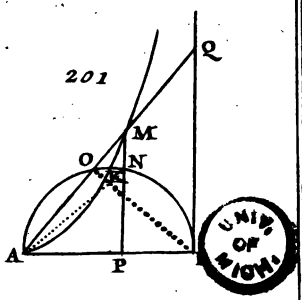

m
M
r
191.
B
C
A
D
T


B'
194.
B
M
A
P


195.
B'
M
B
A
P

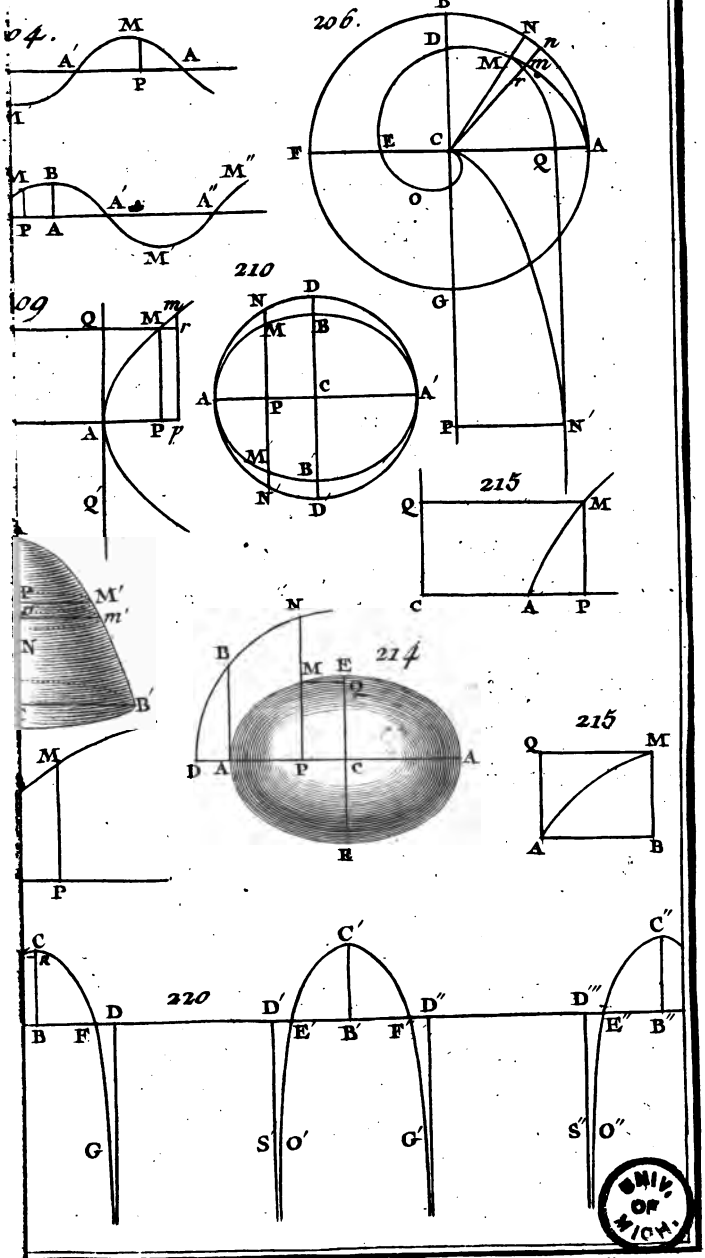

C
A
196
D
m
P
B
M


200.
Q'
N
M
F
B
Q
M'
A
D
P
B


201
Q
M
O
N
A
P

UNIV. OF MICH.

Fig. 202.



UNIV. OF MICH.

Fig. 221.